FACULTAD DE CIENCIAS JURÍDICAS Y SOCIALES

Departamento de Economía de la Empresa (ADO), Economía Aplicada II y
Fundamentos del Análisis Económico - Área de Fundamentos del Análisis Económico

Tesis doctoral

"Equilibrio en modelos de competencia espacial con regulación"

Director: Prof. Dr. D. Hamid Hamoudi Amar-Khodja

Doctorando: D. Pablo Soret Lois

Madrid, 2016

D. Hamid Hamoudi Amar-Khodja, profesor titular del Área de Fundamentos del Análisis Ecónomico, englobada en el Departamento de Economía de la Empresa (ADO), Economía Aplicada II y Fundamentos del Análisis Económico de la Universidad Rey Juan Carlos, en cumplimiento con la normativa vigente que regula los estudios universitarios de tercer ciclo dirigidos a la obtención del título de Doctor, emite el siguiente informe sobre la tesis doctoral "Equilibrio en modelos de competencia espacial con regulación", presentada por el doctorando D. Pablo Soret Lois.

La presente tesis plantea distintas situaciones de competencia espacial en las que un regulador interviene determinando características de un mercado según su sesgo, modificando los equilibrios existentes en los modelos bajo la no existencia de la figura de la regulación, medioambiental o relativa a la producción de las empresas. Los resultados obtenidos muestran la importancia que adquiere la figura de una autoridad reguladora, que mediante su intervención puede modificar las políticas de las empresas en beneficio de consumidores o empresas, o del conjunto de los ciudadanos.

Esta tesis doctoral representa un trabajo de investigación que abre la puerta a futuros desarrollos de los modelos planteados, mostrando así la capacidad del autor de abordar situaciones que suponen un avance en la literatura relacionada existente hasta el momento. A su vez, considero que esta tesis doctoral es ciertamente defendible por su doctorando tanto en sus aspectos formales como en su contenido.

Y para que conste y surta los efectos oportunos, firmo el presente informe en Madrid, a 19 de Julio de 2016.

Fdo.- Dr. D. Hamid Hamoudi Amar-Khodja

A mi madre, a su ejemplo, a su sonrisa luminosa,

y al amor de mi padre por ella.

Agradecimientos

Expreso aquí mi agradecimiento sincero a todos aquellos que me han prestado su colaboración durante la elaboración de esta tesis doctoral.

En primer lugar, a mi director, Dr. Hamid Hamoudi, sin cuya orientación, constancia y conocimiento detallado de la disciplina este trabajo nunca hubiera salido adelante.

A mi amigo y compañero Marcos, que fue el primero en pensar en mí como candidato a realizar esta tesis, y que mantiene siempre viva la inquietud intelectual por encima de cualquier otra consideración.

Al departamento de fundamentos del análisis económico, en donde he desarrollado cada capítulo de este trabajo y he sentido el quehacer diario de las labores docente e investigadora universitarias.

A Alejandro, que me marcó el camino, no dejando que me adelantara yo en tamaña tarea. A Carlos, que asentía con apremio a los pasos que iba dando, sin prisa pero sin pausa. A Pepe, que siempre ha mostrado interés y me ha motivado sin pretenderlo. Y a Antonio, por su viva curiosidad y sus ánimos desinteresados.

A Ana, por su apoyo constante y su positivismo relativista, siempre confiando en aquello de arribar a buen puerto en tiempo y forma. A mis hijas, Verónica y Belén, por sus preguntas curiosas y constantes acerca de esta tesis y su significado práctico. A mis hijos, Álvaro y Darío, que no han dicho nada pero han supuesto un estímulo más en el imaginario del reconocimiento futuro.

A mi tía Ana, siempre inquieta con este asunto, ya puede estar algo tranquila. A mi hermano y mi hermana, que también me animaron a su manera.

A mi padre, acicate siempre. A mi madre, risa contagiosa, recuerdo infinito.

Índice

1. Capítulo I - Presentación

Se plantea este trabajo de tesis con la motivación de desarrollar determinados modelos que responden a situaciones de competencia entre empresas bajo condiciones de regulación, y que suponen una aportación a la literatura de la competencia espacial sobre un duopolio elaborada hasta el momento.

Se estudian los efectos de incluir condiciones de regulación en el mercado, especificadas en la figura de un agente regulador que tiene unas preferencias en cuanto a la ubicación de las empresas, o de forma paralela, a su característica de producción. Al tiempo, se contempla en los modelos el impacto medioambiental que la actividad económica pueda tener en el conjunto de la sociedad, modelizando dicho impacto bien mediante funciones de daño medioambiental, que miden el alcance de las decisiones de empresas y consumidores, implícitas en el modelo; bien mediante la implantación de zonas verdes en las que la actividad comercial queda restringida.

Los objetivos fundamentales de este trabajo de tesis son encontrar los equilibrios en las estrategias de las empresas, tanto en localización, o diferenciación de producto, como en precio, y compararlos con los equilibrios encontrados en trabajos previos en los que la modelización es similar, pero sobre los que se aporta una nueva dimensión a la hora de contemplar los efectos producidos al modificar las distintas variables que intervienen en los modelos.

El trabajo se compone de la presente introducción, un capítulo que desarrolla el marco teórico referido a la competencia espacial sobre un duopolio, y tres capítulos de análisis de modelos alternativos a los existentes en la literatura en los que se incorpora una variante respecto a la casuística estudiada con anterioridad. Se finaliza con un capítulo de conclusiones y una bibliografía de la literatura asociada.

En concreto, en el capítulo 3 se estudian los efectos de un regulador que preconiza una característica de producción determinada a dos empresas que operan sobre un mercado lineal en el que se localiza un *contínuum* de características de preferencia de los consumidores. Se incluye en el modelo una multa para las empresas que va aumentando según se alejan de la característica especificada por el regulador, y una función que mide el daño medioambiental que es causado cuando el producto se consume bajo una característica distinta a la de referencia del regulador.

En el capítulo 4 se trabaja sobre un modelo de zonificación, en el que un regulador persigue optimizar el tamaño de un área verde o medioambiental situada en uno de los extremos del espacio de mercado, que es lineal, y sobre la que no se realiza actividad comercial. El duopolio se resuelve buscando los equilibrios de las estrategias de las empresas condicionados por una función objetivo incluida en el modelo que es combinación lineal de los intereses de empresas y consumidores.

En el capítulo 5 se discute la estrategia de optimización de un duopolio que opera en un mercado circular, sobre la que se diseña un área verde libre de actividad comercial y residencial, pero sobre la que sí se permite el tránsito de mercancías de cara a minimizar los caminos de transporte de bienes. El regulador establece el tamaño óptimo de esta zona medioambiental, bien en base a su impacto medioambiental y social, bien a los beneficios mercantiles que proporciona. Sobre la configuración obtenida las empresas compiten en localización y precio.

El capítulo 6 se dedica a la exposición de las conclusiones del trabajo, así como a la exposición de las posibles vías de ampliación del mismo en diferentes planteamientos alternativos a los estudiados aquí.

2. Capítulo II - Marco teórico

2.1 Competencia espacial

La organización industrial trata de responder de manera particular a la clásica definición de economía, que estipula esta como la asignación óptima de recursos escasos, ocupándose en particular de resolver el problema de la localización de los agentes económicos: "trata la localización de recursos escasos sobre un espacio de mercado y la localización de los agentes económicos" (Duranton (2008)).

La competencia espacial se ocupa fundamentalmente de las relaciones de interdependencia entre agentes económicos bajo competencia imperfecta. Se desarrolla, por tanto, como una especialización de la teoría microeconómica que plantea un énfasis especial sobre la definición y el estudio del papel de la empresa. Ya Fetter (1924) enunció su ley de áreas de mercado, según la cual los consumidores evalúan precios de adquisición y costes de transporte en cada una de la empresas productoras antes de decidirse por la compra del bien en cuestión en una de ellas; a su vez, la frontera de la cuota de mercado entre dichas empresas queda definida por la localización de aquellos consumidores para los cuales el precio total de adquisición es indiferente en una empresa u otra. Su trabajo tuvo influencia en los trabajos sobre teoría de localización, pero no fue tan relevante como el trabajo posterior de Hotelling de 1929.

El inicio de los estudios sobre competencia espacial se remonta a los trabajos de Cournot (1838), quién desarrolló un modelo en el que las empresas compiten en cantidades, y Bertrand (1883), quién basó su planteamiento en un modelo en el que las empresas compiten en precios. La modelización inicial de Bertrand lleva a una solución no realista del problema, la que es conocida como 'paradoja de Bertrand', en la que la diferenciación entre empresas es mínima, los precios son iguales al coste marginal y por tanto los beneficios son nulos. Por el contrario, la competencia en cantidades de Cournot sí produce soluciones factibles desde el punto de vista de la interpretación de los resultados. A la hora del planteamiento de las distintas situaciones a modelizar, la asunción de la competencia en cantidades aparece como menos intuitiva cuando nos referimos a la competencia entre empresas, teniendo en cuenta que el precio es una variable directamente determinante de la demanda de un bien; por el contrario, la cantidad que las empresas producen de dicho bien no se percibe como una variable directa a la hora de construir la demanda por parte del mercado. Además, al asumir una competencia en cantidades la modelización se sitúa en un escenario menos realista que cuando se estipula que la competencia entre las empresas se dirime en precios: en la inmensa mayoría de los casos, el precio de un bien es un factor explicativo de su demanda, mientras que la cantidad disponible o producida de dicho bien puede aportar información a la construcción del modelo en determinados casos únicamente. No obstante, el modelo de competencia de Cournot es un modelo económico utilizado para describir una cierta estructura de industrias, en donde las compañías sí compiten explícitamente con las cantidades a producir.

Frente a estas dos visiones del problema de competencia espacial entre empresas, dos maneras de afrontar la modelización basadas en una única fase de competencia, surgió una evolución en el enfoque de dichos problemas, al plantear una primera etapa en la que las empresas compiten en la localización que adoptan frente a los consumidores en el espacio de mercado, para pasar a competir directamente en precio en la segunda etapa.

Fue el economista y estadístico estadounidense Harold Hotelling (Minessota, EEUU, 1895 - 1973) quién sentó las bases de la corriente mayoritaria en la investigación en competencia espacial a partir de su famoso artículo 'Stability in competition' de 1929, modelizando un mercado lineal en el que dos empresas compiten para vender un producto homogéneo sobre un *contínuum* de consumidores distribuidos uniformemente en dicho espacio, bajo demanda totalmente inelástica, lo que implica que cada consumidor adquirirá una y sólo una unidad del bien. El producto es homogéneo en ambas empresas, y así estas se diferencian en su localización en una primera etapa y en su precio en una segunda. Bajo estas premisas, el autor llega a una solución de equilibrio en la que los dos duopolistas se localizan tan cerca como es posible uno de otro, en el centro del mercado, en lo que se ha dado a conocer como

'Principio de mínima diferenciación', en lugar de situarse en localizaciones que minimicen costes de transporte, por ejemplo.

En su artículo, Hotelling arguye que su modelización es aplicable a múltiples disciplinas de la actividad social, sin restringirse a la actividad económica exclusivamente. En particular, expone la modelización de la competencia política en las elecciones a la presidencia de los EEUU como ejemplo de aplicación de este caso de estudio en "los más diversos campos de la actividad competitiva, incluso en aquellos alejados de los que se conoce como vida económica", indicando cómo los programas políticos de los partidos republicano y demócrata siguen su principio de mínima diferenciación para pasar a ser configurados con el mayor parecido posible al de su oponente y así no incurrir en una hipotética pérdida de votos. Extiende esta 'mínima diferenciación' a todos los ámbitos de la actividad de los mercados, achacándola en parte a las economías de escala:

> *"The tremendous standardisation of our furniture, our houses, our clothing, our automobiles and our education are due in part to the economies of large-scale production, in part to fashion and imitation."*

Este principio de mínima diferenciación no obtuvo objeciones en los años posteriores a su publicación, y su modelo se tomó como punto de partida de diversas investigaciones en el ámbito de la competencia espacial. Sin embargo, a medida que dichos estudios incorporaban condiciones de partida diferentes a las postuladas por Hotelling, a menudo más realistas, fueron apareciendo contradicciones y problemas relacionados con la solución original, entre ellas las discontinuidades en las funciones de demanda y beneficio, que llevaban a la no existencia de solución de equilibrio para todas las posibles localizaciones de las empresas en el modelo. La principal crítica a la modelización de Hotelling se centraba en la falta de robustez de sus resultados: su proposición principal en términos de análisis espacial es, de hecho, que las empresas se localizan en equilibrio agrupándose en una "aglomeración de empresas", y, además, en el centro del espacio de mercado. Pero mediante una ligera alteración de las condiciones iniciales, que consista en tomar unos costes de transporte no lineales sino cuadráticos, se obtiene un resultado antagónico, situando a las empresas en equilibrio en los extremos del espacio de localización.

En efecto, hasta cincuenta años después no se llega a un resultado concluyente acerca de la validez del principio de mínima diferenciación. D'Aspremont *et al* (1979), en su artículo *On Hotelling's "Stability in competition"*, introducen funciones cuadráticas de coste de transporte, eliminando las discontinuidades mencionadas anteriormente, y encontrando que, para ciertos parámetros de su modelo, sí que existe equilibrio, que se corresponde con la solución de máxima diferenciación. Más adelante demuestran definitivamente que la mínima diferenciación nunca se verifica en modelos de dos etapas localización-después-precio *à la Hotelling*, dado que, cuando las empresas coinciden en su localización, los beneficios tienden a cero debido a la competencia en precios *à la Bertrand* (d'Aspremont *et al* (1983)).

A raíz del trabajo de 1979, en la mayoría de los artículos de la literatura relacionada se ha trabajado con modelos en los que las funciones de coste de transporte no son lineales. Una clase de funciones que ha sido ampliamente utilizada para modelizar los costes de transporte en los artículos posteriores a este resultado de d'Aspremont es la de las funciones lineales cuadráticas convexas, de la forma $T(d) = ad + bd^2,\ a, b > 0$, en donde d representa la distancia que separa consumidor de empresa.

En primer término, Gabszwicz & Thisse (1986) demuestran que el equilibrio en precios no existe bajo costes de transporte de este tipo para todas las posibles localizaciones de las empresas. Prueban también que sólo una separación suficiente entre dichas localizaciones permite que se alcance el equilibrio, destacando la relajación de la competencia entre empresas que este resultado conlleva. Todo su trabajo incorpora una condición de partida que allana el camino al cálculo de los resultados, puesto que toma una configuración de localización de ambas empresas simétrica respecto del centro del espacio de mercado. En los modelos con regulación que se desarrollan en el presente trabajo de tesis se incorpora esta condición de simetría, en búsqueda de una mayor simplicidad en los resultados, orientada a poder realizar una interpretación de los mismos en base a los múltiples parámetros que forman parte de la modelización.

Economides (1986) desarrolla el análisis para una familia de funciones de coste de transporte, que ya él denomina de utilidad, no lineales convexas, en concreto $T(d) = td^{\alpha},\ t > 0,\ 1 \leq \alpha \leq 2$, para demostrar que en el juego de dos etapas de localización-después-precio el equilibrio existe cuando "la curvatura de la función de utilidad en el espacio de características es suficientemente grande", esto es, α es grande. Afirma además que nunca aparece mínima diferenciación y que no en todos los casos en los que existe el equilibrio este sigue el principio de máxima diferenciación.

Dasgupta & Maskin (1986) muestran que, aunque no exista el equilibrio en precios en estrategias puras para todo par de localizaciones, el equilibrio en estrategias mixtas sí existe. Osborne & Pitchick (1987) caracterizan dicho equilibrio, con localizaciones situadas cerca de los cuartiles.

Poco después, Anderson (1988) retira la condición de simetría y discrimina aquellos pares de localizaciones asimétricas que no verifican las condiciones necesarias de existencia de equilibrio en precio. Demuestra que, dada una localización concreta para una de las empresas, existen ciertas localizaciones para las que no existe dicho equilibrio cuando la otra empresa se sitúa en ellas. Curiosamente, muestra que las condiciones de equilibrio sí se verifican cuando las empresas se localizan agrupadas, pero en una aglomeración situada en uno de los extremos de la ciudad lineal. De todos modos, el objetivo principal de su estudio no es encontrar condiciones de existencia de equilibrio en precio, antes al contrario, demostrar la no existencia para el juego en estrategias puras y así retomar después el análisis en un juego en estrategias mixtas. Anderson & Engers (1994) resuelven el juego en localización-después-precio para más de dos empresas bajo demanda elástica, mostrando que cuando esta se aproxima a la inelasticidad, como en el modelo de Hotelling, las empresas siguen el principio de máxima diferenciación.

Desde otro enfoque, Lambertini (1994) y Tabuchi & Thisse (1995) amplían el modelo inicial, permitiendo a las empresas localizarse fuera de los límites del espacio de mercado, aprovechando incentivos para situarse allá donde no se sitúan los consumidores.

Una evolución natural en la modelización de las funciones de coste de transporte fue la introducción de funciones lineales cuadráticas cóncavas: $T(d) = ad + bd^2,\ a > 0\ , b < 0$. Los primeros autores en contemplar esta casuística fueron Hamoudi & Moral (2005), quienes realizan una comparativa para el modelo lineal con coste de transporte cuadrático, $T(d) = td^2$, haciendo distinción entre los casos convexo ($t > 0$) y cóncavo ($t < 0$). Encuentran las condiciones necesarias para obtener la región de equilibrio en el caso de tener un coste de transporte cóncavo, y comparan esta región con la que se obtiene en el caso de tener un coste de transporte convexo, que resulta ser de mayor tamaño.

Arguedas & Hamoudi (2008) extienden los resultados de Gabszwicz & Thisse (1986) trabajando ya únicamente con concavidad en los costes de transporte, y realizando el estudio bajo diferenciación vertical (máxima diferenciación para la existencia de equilibrio) y horizontal (no existe equilibrio a menos que ambas empresas se sitúen muy cercanas en uno de los extremos de la ciudad lineal).

Poco después, Hamoudi & Martín-Bustamante (2011) avanzan sobre el resultado ya citado de Gabszwicz & Thisse, en un juego en dos etapas sobre la ciudad lineal con coste de transporte lineal cuadrático convexo, proponiendo simetría en las funciones de beneficio de ambas empresas y encontrando de manera definitiva las regiones de pares de localizaciones para las que existe equilibrio en precio.

En el presente trabajo de investigación se analiza en particular el problema de la existencia de equilibrio y el del patrón de localización para una configuración funcional específica del coste de transporte, modelizando este mediante una función cuadrática convexa, en concreto $T(d) = td^2$, $t > 0$, tomando de nuevo d como la distancia entre el consumidor y la empresa.

En base a una configuración espacial diferente, Salop (1979) introdujo una variante del modelo de Hotelling con el objeto de estudiar la entrada de empresas en una industria determinada, tomando como espacio de mercado la frontera de un círculo sobre el que fija barreras de entrada en forma de coste inicial y, una vez que las empresas deciden situarse en dicho mercado, estableciendo su localización en posiciones enfrentadas entre sí, equidistantes en la circunferencia, pasando a competir en precios en la segunda etapa.

Sobre esta configuración circular, Kats (1995) trabajó con una función de transporte lineal, demostrando que “el modelo tiene un equilibrio perfecto en estrategias puras y que los pares de localizaciones equidistantes constituyen un equilibrio”.

Trabajando a su vez sobre el círculo, De Frutos *et al* (1999) estudian el equilibrio para el juego en dos etapas de localización-después-precio bajo funciones de coste de transporte lineales cuadráticas, $T(d) = ad + bd^2$, haciendo distinción entre los casos convexo ($b > 0$) y cóncavo ($b < 0$), concluyendo la existencia de un único equilibrio perfecto en el caso cóncavo cuando los coeficientes lineal y cuadrático son iguales, $T(d) = t(d - d^2)$, y de un único equilibrio perfecto en el caso convexo cuando el término lineal es nulo. Además explicitan la no existencia de equilibrio en ciertas localizaciones.

Posteriormente, los mismos autores, en De Frutos *et al* (2002), perseveran en su estudio del mercado circular, esta vez con costes de transporte no lineales, estableciendo la equivalencia entre las modelizaciones convexa y cóncava. A su vez, aportan la condición suficiente para asegurar dicha equivalencia en un oligopolio.

Por último, trabajando sobre la particularidad de un mercado en el que las áreas residencial y comercial están separadas físicamente, Arguedas, Hamoudi & Saez (2008) demuestran que tanto en el caso lineal como en el circular no existe equilibrio bajo costes de transporte cuadráticos.

2.2 Localización y diferenciación de producto

A lo largo del presente trabajo se presentan situaciones y modelizaciones de casos aplicados de la economía real que no se corresponden directamente con una localización de las empresas en un espacio de mercado, sino con la dispersión de la producción de dichas empresas respecto a una variable concreta, que se mueve en un espacio de características determinado para dicha variable, o en un rango que define la variabilidad de la característica que define a la misma.

En los modelos de duopolio que se utilizan en competencia espacial se consideran dos variables estratégicas para determinar la competencia entre empresas, a saber: precio, y una variable referida a la producción del producto, homogéneo y a coste cero sin pérdida de generalidad. Esta variable puede ser tomada como la localización de la producción de la empresa en el espacio de mercado, interpretando literalmente el coste de transporte de los consumidores hasta el punto de la empresa como una función de la distancia que los separa de dicho punto; o bien puede ser tomada como la diferenciación de la producción del bien objeto de estudio en un espacio de características que representa a su vez el rango de preferencias de los consumidores por dicho bien, y pasando a interpretar el coste de transporte de los consumidores como la pérdida de utilidad en la que incurren al consumir una característica de producto que se separa de su preferencia ideal.

Mediante la diferenciación o la localización, las empresas compiten entre ellas para acercarse a los consumidores, bien sea físicamente, bien en tanto que produciendo según la preferencia de estos. A continuación se expone un análisis detallado del concepto de diferenciación, su analogía con el concepto de localización, y las dos modalidades de diferenciación que se contemplan en la literatura.

La caracterización de la diferenciación de producto lleva asociada la modelización de la utilidad de los consumidores como referencia frente a la variedad de producción ofrecida por las empresas. Si en los modelos de localización el consumidor debe asumir el coste de transporte para llegar a adquirir un bien de la empresa elegida, en los modelos de diferenciación asume en cambio la pérdida de utilidad que supone alejarse de su característica de producto preferida, lo que supone igualmente una externalidad negativa. El precio total efectivo que los consumidores soportan cuando adquieren una unidad del bien producido por las empresas se compone entonces de: precio de venta del producto especificado por la empresa correspondiente, más:

- coste del transporte que el consumidor realiza para llegar al punto de venta de la empresa elegida para efectuar la adquisición, en el caso de los modelos de localización;

- pérdida de utilidad del consumidor al elegir un producto que no se corresponde con su variedad preferida dentro del rango de características bajo las cuales se puede producir el bien, en el caso de los modelos de diferenciación de producto.

Así mismo, el espacio de mercado que se considera en los modelos de localización, espacio físico o geográfico tal como la línea o el círculo típicamente, se transforma en los modelos de diferenciación de producto en el espacio de características del bien considerado en el modelo, de modo que sobre el mismo se puede establecer una equivalencia entre la localización de las empresas a la hora de producir el bien y la variedad o la característica del bien bajo la que las empresas realizan su producción; y a su vez, entre la localización de los consumidores dentro del espacio de mercado y la preferencia de estos respecto a la variable que entra en competencia, esto es, la variedad que genera para cada consumidor una utilidad máxima, dado que es su preferida dentro del rango de características bajo el que puede encontrar el producto.

Se resume a modo de esquema el paralelismo entre las dos caracterizaciones:

Localización		Diferenciación de producto
Espacio físico de mercado	⇔	Espacio de características
Localización de las empresas	⇔	Característica producida por las empresas
Localización del consumidor	⇔	Variedad preferida del consumidor
Coste de transporte	⇔	Pérdida de utilidad del consumidor

En el análisis de los modelos de competencia espacial es siempre plausible enmarcar los supuestos de cada problema en el marco de la diferenciación de producto, como entorno de modelización más amplio que engloba a un grupo mayor de situaciones de la economía espacial: de manera sencilla un modelo de competencia espacial se transforma en un modelo de diferenciación de producto simplemente reinterpretando el dominio del modelo y la función subyacente de utilidad.

Una vez asimilado el concepto de diferenciación en la producción de las empresas, se asume que constituye una estrategia empresarial clave a la hora de conseguir ventajas competitivas sobre las empresas rivales. Tomar una característica diferenciada del resto proporcionará acceso único o mejorado a los clientes, a los recursos, o a ambos, partiendo de la base de que ofrecer aquello que es valorado por los consumidores y que escasea entre la competencia constituye casi siempre una estrategia rentable.

A lo largo de la investigación en modelos de competencia espacial dentro del ámbito de la economía industrial, y a partir de la modelización de Hotelling, el objeto fundamental del estudio ha sido optimizar las decisiones estratégicas de las empresas en base a lograr mayores beneficios a partir de una mayor demanda de consumidores, y los juegos bietápicos de localización y precio han marcado una línea determinante en la metodología de abordar los problemas económicos. La diferenciación de producto está profusamente tratada en la literatura, enlazada estrechamente con la modelización de los problemas de localización, ya que se trata de distintas interpretaciones de una misma situación.

Aparte de los citados en el apartado anterior, y desde el planteamiento de una competencia espacial *à la Bertrand*, cabe destacar los trabajos de De Palma *et al* (1985), quienes varían la homogeneidad del producto, manteniendo fijos e iguales los precios en ambas empresas, y llegando a probar que los beneficios aumentan según el grado de heterogeneidad de la producción; Lederer & Hurter (1986), que concluyen que las empresas nunca optan por la mínima diferenciación sino que eligen posicionarse de manera socialmente óptima, en los puntos $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ respectivamente, minimizando los costes de transporte. Irmen & Thisse (1998) extienden el modelo de Hotelling a un mercado de n dimensiones, en el que los consumidores otorgan distintos pesos a las distintas variables, mostrando que "Hotelling estaba casi en lo cierto", ya que la mínima diferenciación se sostiene para las variables no fundamentales, mientras que para la variable de referencia del problema las empresas optan por diferenciarse al máximo. Lambertini *et al* (2002) trabajan sobre una entrada secuencial de las dos empresas, probando que cuanto más tarde entra la segunda de ellas, más cerca del centro se posiciona la primera, mientras que la segunda queda relegada siempre a uno de los extremos del espacio de mercado.

Desde el enfoque de la competencia espacial *à la Cournot*, mercados en los que la competencia en cantidades resulta más apropiada que la competencia en precios han sido estudiados en numerosas ocasiones. Se ha de remarcar aquí la diferencia entre formación de precios *mill* y formación de precios de entrega, ya que en el primer caso, son los consumidores los que incurren en un coste de transporte al realizar una adquisición de una empresa concreta, mientras que con los precios de entrega son las empresas las que asumen el coste de transportar sus bienes hasta los consumidores que desean realizar la adquisición. Al estudiar la competencia en cantidades, la formación *mill* de precios no resulta conveniente.

Greenhut & Greenhut (1975) determinan el marco de competencia en cantidades utilizando formación de precios de entrega. Hamilton *et al* (1989) realizan un estudio comparativo entre la competencia en precios y en cantidades, mostrando que, en cantidades, la tendencia es hacia un equilibrio en mínima diferenciación en el centro del mercado, en contraposición con la máxima diferenciación del equilibrio en precios. Hamilton *et al* (1994) repercuten los costes de transporte a los consumidores, como en el caso de Hotelling, pero la demanda sigue siendo elástica, al poder un consumidor modificar la cantidad a adquirir en función del precio. Su resultado insiste en un equilibrio en el centro del mercado para localizaciones simétricas, recurso necesario ya que para el caso asimétrico no existe equilibrio en cantidades. Mayer (2000) y Pal & Sarkar (2002) introducen alteraciones en el mercado, el primero con diferentes costes de producción a lo largo del mercado; los segundos permitiendo más de un puesto de venta para cada una de las empresas. En ambos estudios, la aglomeración de las localizaciones se mantiene, bien en el centro del mercado, bien entre este y la localización con menor coste. Shimizu (2002) añade diferenciación de producto, pero la aglomeración en el centro del mercado sigue siendo el único equilibrio en el caso lineal. Chamorro-Rivas (2000) rebaja los precios de entrega de los bienes, y obtienen que dicho equilibrio deja de ser único; Benassi et al (2007) eliminan el equilibrio central haciendo mínimos (máximos) los precios de entrega, para pasar a tener un equilibrio simétrico.

2.3 Regulación

Las ciudades y los entornos urbanos proporcionan múltiples ejemplos vivos de cómo externalidades de las empresas tienen efecto sobre el conjunto de la sociedad. En algunos casos, la intervención pública puede llegar a ser un mecanismo de asimilación de externalidades negativas tales como contaminación ambiental o falta de espacio de uso residencial. Los reguladores pueden determinar el tamaño de ciertas áreas restringidas dependiendo de distintos factores.

Por ejemplo, las ciudades antiguas con un casco histórico bien conservado pueden, en determinadas ocasiones, promover una regulación específica para las empresas que se localicen en dicho ‘casco viejo’. La zonificación se utiliza como una manera de aislar externalidades negativas, como la contaminación, lejos de los bienes públicos, generalmente situados alrededor de estas áreas. Al tiempo, las autoridades pueden desear preservar espacios de calidad de vida para sus residentes y turistas, con la intención de obtener influencia política (votos de los residentes) y ganancias económicas. Las acciones de los reguladores en este caso dependen de su sesgo político y su masa electora. Reguladores que deseen contentar las exigencias de los consumidores tomarán sus decisiones de zonificación teniendo en cuenta necesidades residenciales y/o externalidades negativas (aglomeración poblacional o contaminación medioambiental). Por otra parte, cuando los reguladores estén más inclinados a satisfacer los intereses de las empresas, pondrán menos énfasis en dicho tipo de externalidades para facilitar la localización de las mismas. Curiosamente, cuando el regulador sólo se interesa por los consumidores, una libre entrada de empresas para aumentar la competencia y una localización de los consumidores basada en criterios endógenos puede ser el planteamiento de bienestar óptimo.

Así mismo, ciudades costeras que basan sus ingresos en el turismo pueden controlar el número y la localización de empresas cerca de las playas con el objeto de mantenerlas libres y aisladas de un ruido y una contaminación excesivos. La localización de centros comerciales cerca de los anillos de autopistas de las grandes ciudades, como Los Ángeles o Milán, es una decisión estratégica que pudiera estar condicionada por restricciones de zonificación. Muchas grandes urbes del planeta, tales como Nueva Delhi, México D.F, Sao Paulo o Paris, están utilizando la zonificación como herramienta política para regular el tráfico (i.e. restricción de acceso de coches a las áreas del centro). Este tipo de políticas triunfan de manera eficiente sobre las empresas, a través de la regulación, al forzar la localización de sus actividades en áreas no restringidas. Como consecuencia, la zonificación puede ser un instrumento útil de cara a diseñar el urbanismo de una ciudad o para desarrollar políticas de industrialización; sin embargo, puede tener efectos desfavorables si se implementa equivocadamente. Así, la ausencia de regulación y la libre entrada de empresas puede ser la política óptima en términos de bienestar social bajo determinadas circunstancias concretas.

Con todo, cuando se implementa la zonificación, las autoridades necesitan encontrar herramientas de regulación (como por ejemplo, decisiones estratégicas de localización) que les permitan reducir de manera eficiente los efectos dañinos de factores externos. Autores como Mills (1989), Henderson (1991), Miceli (1992) y Wheaton (1993) han mostrado que la zonificación puede resultar un instrumento útil de planificación urbanística. En este trabajo de tesis se enfoca el diseño de la regulación en un entorno de competencia duopolística que incluye un regulador con perfiles políticos alternativos.

Los modelos de competencia espacial, particularmente como evolución del modelo de Hotelling, suponen una base de análisis fundamental para la investigación de las políticas de zonificación. La configuración de Hotelling aporta dos supuestos fundamentales: el duopolio y la distribución uniforme de los consumidores. Su alteración permite englobar una casuística mayor en la modelización, permitiendo por ejemplo la entrada de un número mayor de empresas, para llegar a situaciones de competencia oligopolística. Economides (1993) expone que el equilibrio en localización no existe en el modelo lineal de Hotelling cuando el número de empresas aumenta a tres o más, ya que las empresas tienden a situarse en el centro, en una “versión fuerte del principio de mínima diferenciación”, lo que impide el equilibrio cuando se sirve a todo el mercado. Sin embargo, en el caso circular sí aparece equilibrio al no existir las fronteras bajo esta configuración espacial.

Bajo regulación también se ha estudiado la entrada secuencial de empresas, en concreto en Neven (1987), que, como en el citado Lambertini (2002), muestra que las empresas que entran antes se localizan en el centro del mercado, impidiendo a los competidores tardíos localizarse entre ellas. Competencia con entrada secuencial es tratada también por Gupta (1992) a un entorno más amplio al asumir previsión perfecta por parte de las empresas. Anderson (1987), al modelizar un juego de Stackelberg para la localización de las empresas, ofrece una explicación alternativa: el equilibrio aparece cuando la primera empresa se localiza en el centro, mientras mantiene mayores beneficios que el resto.

Un regulador puede ser incorporado a los modelos de competencia espacial al añadir una tercera etapa en el juego de localización-después-precio. Dado que las autoridades sirven a los intereses de consumidores y empresas, es natural definir una función de bienestar como la suma de los excedentes de ambos agentes económicos. En este estudio se utiliza una función de bienestar social que se expresa como una combinación lineal de la utilidad de los consumidores y los beneficios de las empresas (Hamoudi & Risueño, 2012). Esta función de bienestar es interpretada según el sesgo y los intereses de la autoridad pública.

La investigación en competencia espacial incluye el papel del regulador mediante el estudio de la localización óptima de las empresas, la dimensión de las zonas reguladas, el equilibrio en precios, el uso de los terrenos, los efectos sobre el bienestar social, etc. Lai & Tsai (2004) examinan el modelo de ciudad lineal de Hotelling con restricciones en la localización de las empresas, mostrando que el principio de máxima diferenciación se verifica bajo competencia *à la Bertrand* y que el bienestar social se incrementa. A su vez, Tsai *et al* (2006) analizan cómo la zonificación afecta a la localización de las empresas y a las rentas provenientes de los distintos usos del terreno, residencial y comercial o productivo. Chen & Lai (2008) investigan, bajo competición *à la Cournot*, los efectos de zonificación simétrica en la ciudad lineal, encontrando que las empresas se localizan en equilibrio en los extremos del área permitida, y concluyendo que se puede incrementar el bienestar social al implementar un área regulada mediante una política de zonificación. Matsumura & Matsushima (2012) establecen restricciones en la localización de las empresas y analizan los efectos sobre el bienestar de los consumidores, en un modelo relacionado con la dispersión urbana, con el objetivo de determinar la dimensión permitida de la actividad económica.

Hamoudi & Risueño (2012) toman un modelo circular en el que consumidores y empresas se posicionan en zonas separadas de la ciudad, para estudiar el equilibrio en localización bajo coste de transporte cóncavo. Después, introducen una función de bienestar social para medir el efecto de la zonificación, y muestran que la competencia será fuerte, moderada o débil dependiendo del sesgo político del regulador. Bárcena-

Ruiz *et al* (2014-a) estudian de nuevo la optimización de una zona regulada mediante una función ponderada de beneficio de empresas y bienestar social, para los casos de duopolio con dos empresas privadas y de una privada con una pública: demuestran que sólo es necesario regular la localización de las empresas privadas. Bárcena-Ruiz *et al* (2014-b) analizan el comportamiento de las empresas en base al sesgo del regulador en un mercado lineal abierto, en el que la localización de las empresas puede situarse tanto dentro del espacio como fuera de los límites de este.

Por último, Hamoudi *et al* (2015) realizan una comparativa de la zonificación frente a la no zonificación en un modelo circular con costes de transporte cóncavos y convexos. En el caso no regulado, la equivalencia entre los tipos de funciones de coste depende de la longitud del mercado; en el caso regulado se estudia una longitud fija y se demuestra que no hay equivalencia a partir de los dos tipos de costes de transporte, existiendo equilibrio cuando son cóncavos pero no cuando son convexos.

2.4 Implicaciones y alcance de la investigación

Para desarrollar un trabajo de investigación que pretenda servir de base a análisis más avanzados, se hace necesario tratar de apuntar las lagunas o espacios de mejora de los modelos estudiados hasta el momento, en orden a encontrar nuevos supuestos, hipótesis u objetivos que permitan clarificar los problemas o situaciones que surgen de la interpretación de la actividad económica.

Una primera consideración indica que los modelos que tratan la economía espacial contemplan una competencia de tipo local, en la que las empresas rivalizan con empresas adversarias en una vecindad, definida por el espacio de mercado concreto de cada planteamiento económico, en la que a su vez se localizan los clientes que conforman el objetivo de dicha competencia.

A raíz de las limitaciones en cuanto al establecimiento local de la competencia se deriva que los resultados de equilibrio en los modelos tipo Hotelling están condicionados por una contraposición de fuerzas que actúan en el juego de localización de las empresas: por una parte, un efecto de aumento de la demanda al situarse cerca de sus rivales directos, y que se observa en el corto plazo; por la otra, un efecto de disminución de la misma en el medio y largo plazo, consecuencia del aumento de la competencia. De aquí se infiere que la mínima diferenciación responde a una situación de lucha directa por la demanda, mientras que la máxima diferenciación hace referencia al reparto de los consumidores, en base a sus diferentes preferencias de consumo.

En las conclusiones de Tabuchi & Thisse (2011: 250) se encuentra una definición de la intuición económica de estos dos principios:

> *"Firms are attracted by places crowded by many consumers who provide them with large outlets, but they are repelled by places with many firms belonging to the same industry because local competition is tough"*.

Alrededor de estas consideraciones, se infiere que cuando el principio de mínima diferenciación se cumple y las empresas se embarcan en una competencia feroz por el favor de los consumidores, buscando ofrecer mayor calidad en el producto y rebajando los precios, todo ello para aumentar su cuota de mercado, permitiendo incluso la entrada de nuevas empresas que compiten con las ya existentes, el beneficiado es el sujeto que adquiere el bien ya que encuentra una oferta más variada y la encuentra a unos precios más competitivos, esto es, más bajos y por tanto más asequibles a su capacidad de compra. Una mayor competencia activa por tanto la economía desde el punto de vista de empresas y consumidores. Por el contrario, la máxima diferenciación abunda en una relajación de la competencia, formando polos de consumidores alrededor de cada una de las empresas o variedades de producto, promoviendo la aparición de monopolios, duopolios u oligopolios que perjudican a los consumidores y al conjunto de la masa empresarial.

Esta intuición subyace a todo el análisis de los modelos de este trabajo de tesis, en el que se ilustra cómo funcionan los dos principios en tres modelos específicos, incorporando la figura de un regulador. Dicha contraposición de fuerzas o efectos depende estructuralmente de una serie de configuraciones sobre el modelo y el mercado tomados en consideración, a saber: distribución de los consumidores, número de empresas, elasticidad de la demanda, formación de los precios, incentivos a la colusión, incertidumbre, etc.

Más allá del análisis microeconómico de las situaciones modelizadas en esta tesis, resolviendo los equilibrios en localización y precio para un duopolio en un espacio de mercado determinado, existe una visión que relaciona los modelos de competencia espacial con la rama de la macroeconomía que trata la evolución de las localizaciones y el desarrollo de las industrias y las empresas en una economía abierta. Esta disciplina dentro de la literatura macroeconómica trata de englobar procesos y causas de la dinámica de las "economías de aglomeración", que comprenden interacciones de ámbito internacional (Ottaviano & Puga (1998), Bárcena-Ruiz & Garzón (2003)).

Precisamente Ottaviano & Puga (1998) presentan una compilación de los modelos de lo que se ha venido a denominar "nueva geografía económica", fruto de la unión entre el estudio microeconómico de los fenómenos de localización, que formaliza con rigor las pautas de comportamiento de los agentes económicos, y las aplicaciones macroeconómicas derivadas de estos patrones y el análisis de datos que permite contrastar la fiabilidad de los resultados obtenidos. Esta disciplina económica realiza así la fusión de aplicaciones macroeconométricas relativas a la localización con fundamentos microeconómicos aportados por los modelos de competencia espacial.

3. Capítulo III - Diferenciación de producto y política medioambiental

En este capítulo se considera un mercado definido por un *contínuum* de características de preferencia de los consumidores, distribuidas uniformemente en todo el espacio, mientras dos empresas localizan dentro del mismo la producción de un bien homogéneo. Existe un regulador que toma como base una característica de referencia y una multa que las empresas pagarán por desviarse de ella, y se estima un daño medioambiental que los consumidores provocan por efecto de la desviación al adquirir el producto en cada una de las empresas. Se calcula el equilibrio como un juego en tres etapas: en la primera, el regulador minimiza la función de daño medioambiental-social mediante el valor de la característica de referencia; en la segunda, las empresas eligen simultáneamente su característica de producción del bien; y, finalmente, en la tercera etapa las empresas compiten en precios. Coste de transporte, importe de la multa y daño medioambiental-social se incorporan al modelo mediante funciones cuadráticas ponderadas por un parámetro estrictamente positivo. El equilibrio encontrado oscila desde la máxima hasta la mínima diferenciación en tanto en cuanto la multa aumenta, optimizando el daño medioambiental-social en un valor concreto de esta última, en función de los parámetros de daño, transporte y ponderación.

3.1 Introducción

En los modelos de competencia espacial se han estudiado ampliamente los casos en los que las empresas, localizándose a lo largo de un espacio de mercado, buscan maximizar su beneficio, evaluando las implicaciones de sus decisiones de localización y precio de venta, hasta obtener un equilibrio en el clásico juego de dos etapas, 'localización después precio', tratado profusamente en la literatura.

En el capítulo presente se trabaja sobre una modelización que impone una restricción a la libre localización de las empresas sobre el espacio de mercado, de manera que, optimizando un parámetro de multa, estas son penalizadas en función de la desviación en que incurren al producir alejadas de una característica de producción determinada, que el regulador considera óptima. El parámetro de multa queda expresado en función de los parámetros de coste, daño y sesgo medioambiental del regulador. En términos de la teoría de localización, la característica de producción equivale a elegir una ubicación concreta para las empresas dentro del espacio de mercado.

Sobre una ciudad lineal que se considera de longitud 1, sin pérdida de generalidad, en la que se encuentran uniformemente distribuidos los consumidores, buscan fijar su localización dos empresas que compiten para vender un producto homogéneo. En términos de diferenciación, los consumidores cubren todo el espectro de preferencias sobre la característica de producto a producir, y las empresas eligen producir bajo una característica determinada, buscando con su elección la optimización de dos intereses opuestos: cubrir la mayor demanda posible y minimizar las multas impuestas por el regulador.

El propósito principal de este artículo será mostrar cómo, consistentemente con su sesgo, un regulador, al establecer el punto de referencia y la sanción por desviarse de él, puede influir en el bienestar total resultante de la industria y los consumidores. Con todo ello, el modelo propuesto se construye como un juego en tres etapas: en la primera de ellas el regulador escoge el importe de la multa m y partir de este, el valor de la característica de referencia *c*; en la segunda etapa las empresas eligen su característica de producción; y en la tercera etapa las empresas compiten en precios.

En el artículo se analizan dos sub-modelos: en el primero se toman *consumidores miopes* respecto al daño que provoca la elección de empresa en la que realizan la adquisición, de modo que no soportan la carga del daño medioambiental producido, que se cuantifica exclusivamente como un daño para el conjunto de la sociedad; en el segundo se consideran *consumidores conscientes* que soportan una carga por el daño producido al adquirir el producto. Ambos se caracterizan por un regulador que minimiza la desutilidad del daño total de producción y consumo del producto.

El artículo se compone de los siguientes apartados: en la sección 2 se presenta el modelo, caracterizando ambos sub-modelos; en la sección 3 se desarrolla el modelo del *consumidor miope*; en la sección 4 se sigue el mismo patrón para el *consumidor consciente*; la sección 5 se emplea en exponer las conclusiones de ambos modelos. Por último en la sección 6 se incluye el anexo con los cálculos de modelo.

3.2 Planteamiento general

Partiendo del modelo de Hotelling en el que, en un espacio lineal, se localizan dos empresas y un *contínuum* de consumidores, se introduce un regulador que por razones de bienestar social estima conveniente que las empresas se localicen en un determinado punto del mercado. Las empresas producen un mismo bien homogéneo, cuyo coste de producción se supone nulo sin pérdida de generalidad. Los consumidores, distribuidos uniformemente a lo largo del mercado, incurren en un coste de transporte cuando compran el bien. Ningún consumidor tiene preferencia por una empresa u otra a la hora de adquirir el producto, más allá de su precio y del coste de transporte. Con todo ello, el problema se formaliza como un juego en tres etapas:

- en la primera etapa, el planificador elige la cuantía de la multa o sanción;

- en la segunda, las empresas eligen simultáneamente sus ubicaciones;

- en la tercera y última, las empresas determinan a un tiempo sus precios.

Se representa el espacio lineal mediante el intervalo $[0,1]$. En este mercado dos empresas se localizan en los puntos x_1, x_2, tales que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$.

Las empresas venden el bien a los precios p_1, p_2 respectivamente. Se denota mediante c la localización preferida por el regulador, y se expresa mediante x la localización de un consumidor arbitrario.

Como se ha mencionado anteriormente, los consumidores, además del precio del bien, incurren en un coste de transporte que se toma cuadrático y convexo:

$$T_i(x) = td_i^2,\ t > 0, \text{ en donde } d_i = |x_i - x|,\ i = 1, 2$$

esto es, T_i determina dicho coste de transporte en función de la distancia del consumidor x a la empresa elegida, o en términos de diferenciación de producto, de la pérdida de coste de oportunidad del consumidor respecto a su preferencia ideal.

El regulador establece una multa para las empresas cuando se localizan en una ubicación diferente a la de referencia, c. Se representa a su vez esta multa mediante una función cuadrática:

$$M(x_i) = m{u_i}^2,\ m > 0\ ,\ i = 1,2,\ \text{ siendo } u_i = |x_i - c|\ ,\ i = 1,2.$$

Al mismo tiempo, el propio regulador estima el daño social que generan las empresas al producir cada una de las unidades de producto en una localización diferente a la de referencia. De esta manera, dicho daño, producido sobre cada consumidor localizado en x_i, se formaliza también mediante una función cuadrática:

$$\Gamma(x_i) = \gamma {u_i}^2,\ \gamma > 0\ ,\ i = 1{,}2.$$

Tras esta representación general del modelo, se exponen a continuación las dos versiones del mismo: en la primera versión, se supone que los consumidores son *miopes*, es decir inconscientes del daño que se produce al consumir el bien producido en una localización distinta de c, la preconizada por el planificador; en la segunda versión, se considera que los consumidores son conscientes de ese daño, que por tanto es considerado una externalidad negativa para ellos.

Para la resolución de ambas versiones del modelo se utiliza el método de inducción hacia atrás, de la siguiente manera: cuando a las empresas les corresponde elegir los precios, en la tercera etapa del modelo, se enfrentan al problema $\mathcal{P}_1$, dada la localización c preferida del regulador, elegida en la primera etapa, y dadas las localizaciones x_1, x_2, elegidas por las empresas en la segunda etapa:

$$\mathcal{P}_1 : \quad \underbrace{max}_{p_1}\ B_1(p_1, p_2) \quad , \quad \underbrace{max}_{p_2}\ B_2(p_1, p_2)$$

en donde:

- $B_1(p_1, p_2) = p_1 Q_1 - M_1$, $\quad B_2(p_1, p_2) = p_2 Q_2 - M_2$ son las funciones de beneficio de las empresas,
- Q_1, Q_2 representan las demandas de las empresas 1 y 2 respectivamente,
- M_1, M_2 representan las multas de las empresas 1 y 2 respectivamente.

Suponiendo que el problema de optimización $\mathcal{P}_1$ tiene una única solución, que se denota por $p_1^*(x_1, x_2)$, $p_2^*(x_1, x_2)$, entonces a las empresas les corresponde elegir las localizaciones, enfrentándose al problema $\mathcal{P}_2$ en la segunda etapa, que se expresa como sigue:

$$\mathcal{P}_2: \quad \underbrace{max}_{x_1} \; B_1(p_1^*, p_2^*, x_1, x_2) \quad , \quad \underbrace{max}_{x_2} \; B_2(p_1^*, p_2^*, x_1, x_2)$$

Supuesto a su vez que el problema $\mathcal{P}_2$ tiene solución única, que se denota por (x_1^*, x_2^*), se concreta ahora el problema $\mathcal{P}_3$ del regulador en la primera etapa como la minimización de la función de daño social:

$$\mathcal{P}_3: \quad \underbrace{min}_{m} \Psi(m)$$

con

$$\Psi(m) = \lambda D_T(m) + (1 - \lambda) C_T(m)$$

en la que:

· λ es el peso atribuido al daño por uso, atendiendo a la preferencia medioambiental del regulador, $0 \leq \lambda \leq 1$;

· $(1 - \lambda)$ es el peso atribuido a la desutilidad del consumidor;

· C_T es el coste total de transporte a cargo de los consumidores;

· D_T es el daño social total producido por las empresas.

3.3 Análisis del modelo con consumidores miopes

3.3.1 Equilibrio en precio

Se trata ahora de resolver el problema $\mathcal{P}_1$ planteado anteriormente. En primer término, es necesario determinar la demanda de cada empresa para poder calcular la función de beneficio de cada una de ellas. Para ello, se define el consumidor indiferente, que se calcula desarrollando la siguiente igualdad:

$$p_1 + T_1(x) = p_2 + T_2(x)$$

$$p_1 + t(x_1 - x)^2 = p_2 + t(x_2 - x)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2tx(x_2 - x_1) = p_2 - p_1 + t(x_2^2 - x_1^2)$$

lo que lleva a la expresión del consumidor indiferente:

$$\hat{x} = \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$$

Se establecen las condiciones para las cuáles el consumidor indiferente, $\hat{x}$, estará situado en el espacio de mercado, esto es, $0 \leq \hat{x} \leq 1$. Se obtiene:

$$0 \leq \hat{x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \quad \Leftrightarrow \quad -(x_2 + x_1) \leq \frac{p_2 - p_1}{t(x_2 - x_1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -t(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \leq p_2 - p_1$$

$$\hat{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_2 - p_1}{t(x_2 - x_1)} \leq 2 - (x_2 + x_1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 \leq t(x_2 - x_1)(2 - (x_2 + x_1))$$

Se puede expresar por tanto la condición de pertenencia al mercado del consumidor indiferente como un intervalo para la diferencia de precios:

$$0 \leq \hat{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -t(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \leq p_2 - p_1 \leq t(x_2 - x_1)(2 - (x_2 + x_1))$$

Por simplificación, en lo sucesivo se utiliza un cambio de variable que denota la expresión de las variables de localización:

$$s = x_2 + x_1 \quad , \quad r = x_2 - x_1$$

verificando $r \geq 0$, ya que por hipótesis de inicio, $x_1 \leq x_2$ $\left(x_1 = \frac{s-r}{2} \, , \; x_2 = \frac{s+r}{2} \right)$.

Bajo este cambio de variables, las expresiones de consumidor indiferente y su intervalo de pertenencia al mercado, de funciones de demanda ($Q_i, \; i = 1{,}2$), y de funciones de beneficio de cada empresa ($B_i = p_i Q_i - M_i, \; i = 1{,}2$), quedan formuladas de la siguiente manera:

$$\hat{x} = \frac{p_2 - p_1}{2tr} + \frac{s}{2}$$

$$0 \leq \hat{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -trs \leq p_2 - p_1 \leq tr(2-s)$$

$$Q_1(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 0 & si \quad \hat{x} < 0 \\ \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{s}{2} & si \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1 \\ 1 & si \quad \hat{x} > 1 \end{cases}$$

$$Q_2(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 1 & si \quad \hat{x} < 0 \\ 1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{s}{2} & si \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1 \\ 0 & si \quad \hat{x} > 1 \end{cases}$$

$$B_1(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 0 & si \quad \hat{x} < 0 \\ p_1 \left(\dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{s}{2} \right) - \, m \left(\dfrac{s-r}{2} - c \right)^2 & si \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1 \\ p_1 & si \quad \hat{x} > 1 \end{cases}$$

$$B_2(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} p_2 & si \quad \hat{x} < 0 \\ p_2 \left(1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{s}{2} \right) - m \left(\dfrac{s+r}{2} - c \right)^2 & si \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1 \\ 0 & si \quad \hat{x} > 1 \end{cases}$$

Proposición 3.1.- El equilibrio en precios viene dado por:

$$p_1^* = \frac{1}{3}tr(2+s) \qquad , \qquad p_2^* = \frac{1}{3}tr(4-s)$$

Demostración: anexo 3.1.

Observaciones

1.- Dado que el factor de la multa de corrección impuesta por el regulador a las empresas no interviene en los precios de equilibrio obtenidos, el resultado es el conocido en la literatura para un caso de diferenciación horizontal con costes cuadráticos en la ciudad lineal, sin intervención del regulador.

2.- Las expresiones de las funciones de beneficio en equilibrio en precios resultan:

$$B_1(p_1^*, p_2^*, s, r) = B_1^*(s,r) = \frac{1}{18}tr(2+s)^2 - m\left(\frac{s-r}{2} - c\right)^2$$

$$B_2(p_1^*, p_2^*, s, r) = B_2^*(s,r) = \frac{1}{18}tr(4-s)^2 - m\left(\frac{s+r}{2} - c\right)^2$$

Para proceder a estudiar el equilibrio en localización, se deshace el cambio de variables utilizado para el cálculo del equilibrio en precios, y se expresan las funciones de beneficio en función de las localizaciones originales, x_1 , x_2 :

$$B_1^*(x_1, x_2) = \frac{t}{18}(x_2 - x_1)(2 + x_2 + x_1)^2 - m(x_1 - c)^2$$

$$B_2^*(x_1, x_2) = \frac{t}{18}(x_2 - x_1)(4 - x_2 - x_1)^2 - m(x_2 - c)^2$$

3.3.2 Equilibrio en localización

En esta fase se determina el equilibrio en localización, resolviendo el problema $\mathcal{P}_2$ tras incorporar las funciones de beneficio obtenidas en el equilibrio en precios:

$$\mathcal{P}_2: \quad \underbrace{max}_{x_1} \; B_1^*(x_1, x_2) \quad , \quad \underbrace{max}_{x_2} \; B_2^*(x_1, x_2)$$

Llegado este punto, se observa que las funciones de beneficio son expresiones de tercer grado en cada una de sus variables: B_1 es función de tercer grado respecto a x_1; B_2 es función de tercer grado respecto a x_2. Por tanto, el problema de optimización de dichas funciones implica que el análisis del equilibrio en localización conlleva un determinante aumento de complejidad, tanto en los cálculos como en la posible interpretación económica de los resultados, que constituye una situación no práctica desde el punto de vista de la aplicabilidad de las soluciones, y así se llega a que el problema pase a ser *no productivo* por inmanejable. En efecto, la resolución del problema $\mathcal{P}_2$ presenta la expresión de la condición de primer orden como sigue:

$$\frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1\left(36\frac{m}{t} + 8\right) + (36\frac{mc}{t} - 4) \; = 0$$
$$\frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2\left(36\frac{m}{t} + 16\right) + (36\frac{mc}{t} + 16) \; = 0$$

Estas ecuaciones son dos cónicas en $x_1, x_2 \in [0,1]$, cuya intersección en el intervalo $[0,1] \times [0,1]$ arroja unas soluciones de expresión inmanejable desde el punto de vista de los parámetros c, m, t, que no suponen un avance para el problema de optimización que se pretende resolver. No es posible realizar un análisis de signo de estas condiciones de segundo orden, ya que la aparición del componente de multa no permite determinar el carácter positivo o negativo de las mismas sin discriminar en función de los parámetros.

Por tanto, en lo sucesivo se trabajará el equilibrio bajo la condición de simetría en localización: las empresas posicionarán sus producciones en localizaciones simétricas equidistantes del centro del mercado, lo que se traduce en la siguiente restricción:

$$x_2 + x_1 = 1$$

Bajo este supuesto se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que la primera empresa está localizada en la primera mitad del espacio de mercado, mientras que la segunda empresa se sitúa en la segunda mitad, esto es:

$$0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1$$

y los precios de equilibrio y el consumidor indiferente se expresan ahora como:

$$p_1^* = p_2^* = t(x_2 - x_1) \qquad ; \qquad \hat{x} = \frac{1}{2}$$

de donde se deduce que, a medida que aumenta la distancia entre la localización de las empresas, esto es, mayor es x_2 y menor por tanto es x_1, más aumentan los precios, dado $t > 0$ por hipótesis. Por el contrario, a menor distancia en localización de las empresas, menores serán los precios de sus productos.

Por otra parte, de esta condición de simetría se deriva la siguiente expresión de las funciones de beneficio, ahora independiente cada una de la localización de la otra empresa:

$$B_1^*(x_1) = \frac{t}{2}(1 - 2x_1) - m(x_1 - c)^2$$
$$B_2^*(x_2) = \frac{t}{2}(2x_2 - 1) - m(x_2 - c)^2$$

Proposición 3.2.- Según el valor que el regulador asigna a la característica de producción recomendada para las empresas, c, y según la relación entre los parámetros de multa y coste de transporte, m y t, el equilibrio en localización $\{x_1^*, x_2^*\}$ viene dado por:

A. $m \leq t \quad , \quad \max\left\{1 - \frac{t}{2m}, 0\right\} \leq c \leq \min\left\{\frac{t}{2m}, 1\right\} \quad , \quad x_{1\mathrm{A}}^E = 0 \quad , \quad x_{2\mathrm{A}}^E = 1$

B. $t \leq m \quad , \quad c = \frac{1}{2} \quad , \quad x_{1\mathrm{B}}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \quad , \quad x_{2\mathrm{B}}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$

Demostración: anexo 3.2.

Observaciones.-

1.- En el caso A., cuando el valor de la multa impuesta por el regulador es menor que el valor del parámetro de coste de transporte, y para el rango de valores de c dependiente de m y t obtenidos en el equilibrio, y en el caso extremo en el que los parámetros de transporte y multa coinciden, se obtiene el resultado clásico de máxima diferenciación para un modelo de diferenciación horizontal sin regulador, ampliamente conocido en la literatura:

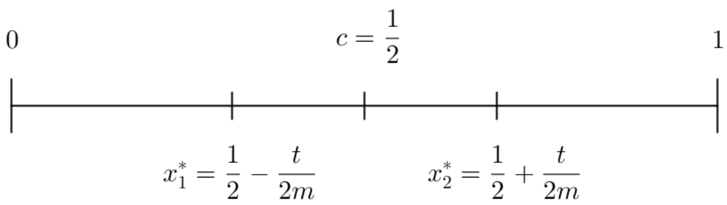
$$m \leq t \qquad \Rightarrow \qquad x_1^* = 0 \;\; , \;\; x_2^* = 1$$

2.- Bajo la condición $m \leq t$, según el valor del parámetro de multa crece y se aproxima al valor del parámetro de coste de transporte, $m \to t$, se tiene en el límite $m = t$ la misma configuración del caso B.

3.- Conforme aumenta el valor de la multa desde $m = t$, el valor de c se mantiene constante en el punto medio del mercado, $c = \frac{1}{2}$, y se reduce progresivamente la diferenciación entre empresas, provocando una disminución del valor de los precios de ambas, motivada por el aumento de la competencia entre las mismas. Los valores que toman las localizaciones de ambas empresas son $x_{12}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m}$, $x_{22}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$, en efecto simétricos respecto al centro del mercado.

4.- El valor de la variable de referencia, $c = \frac{1}{2}$, es la herramienta que tiene el regulador para forzar a las empresas a abandonar las posiciones extremas del mercado, y en función de la cuantía de la multa m respecto al valor del parámetro de coste de transporte, t, conseguir que se aproximen paulatinamente hacia el centro del espacio.

5.- La estructura de las soluciones en el caso B queda reflejada en el siguiente gráfico:



6.- Al tomar $\lim\limits_{m \to \infty}$, la solución se corresponde con la solución de competencia perfecta o de Bertrand, en la que la diferenciación es nula, los precios son iguales a cero y los beneficios son a su vez nulos, solución óptima para el consumidor, resultado que se conoce como *paradoja de Bertrand*.

3.3.3 Optimización de la función de daño medioambiental-social

Una vez que se han resuelto los equilibrios en precio y en localización en los apartados anteriores, el regulador tiene la tarea de minimizar la función de daño medioambiental-social definida previamente, función en la que dicho regulador pondera el peso que atribuye, por un lado, al daño medioambiental en que incurre el conjunto de los consumidores al adquirir los productos de las empresas 1 y 2; y por otro, al coste de transporte total que han de soportar dichos consumidores:

$$\Psi = \lambda D_T + (1 - \lambda) C_T \ , \quad \lambda \in [0,1]$$

De esta manera, un regulador que tenga un marcado carácter 'ecologista' tomará un valor de λ muy próximo o igual a 1, mientras que un regulador que se ocupe del bienestar de los consumidores preferirá minimizar el coste total de transporte en que estos incurren, y tomará por tanto un valor de λ muy pequeño o igual a 0.

El daño medioambiental total se representa como la suma del daño de quienes compran a la empresa 1, es decir, $\hat{x}$ consumidores, y quienes compran a la empresa 2, esto es, $1 - \hat{x}$ consumidores (en este estudio, $\hat{x} = \frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned} D_T(m) = \Gamma_1(u_1) + \Gamma_2(u_2) = \hat{x}\gamma {u_1}^2 + (1-\hat{x})\gamma {u_2}^2 = \\ = \gamma\hat{x}\left(x_{1j}^E - c\right)^2 + \gamma(1-\hat{x})\left(x_{2j}^E - c\right)^2 \\ = \frac{\gamma}{2}\left[\left(x_{1j}^E - c\right)^2 + \left(x_{2j}^E - c\right)^2\right] \; ; \quad j = \mathrm{A,B} \; ; \; \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, el coste total de transporte, C_T, soportado por los consumidores es la suma infinitesimal del coste de transporte que soportan los $\hat{x}$ consumidores que compran a la empresa 1 y, por otra parte, los $(1-\hat{x})$ que compran a la empresa 2:

$$\begin{aligned} C_T(m) = \int_0^{\hat{x}} t\left(x_{1j}^E - x\right)^2 dx + \int_{\hat{x}}^1 t\left(x_{2j}^E - x\right)^2 dx = \\ = \int_0^{\frac{1}{2}} t\left(x_{1j}^E - x\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\left(x_{2j}^E - x\right)^2 dx = \\ = \frac{t}{24}\left(12\left(x_{1j}^E\right)^2 - 6x_{1j}^E + 1\right) + \frac{t}{24}\left(12\left(x_{2j}^E\right)^2 - 18x_{2j}^E + 7\right) = \\ = \frac{t}{12}\left[6\left(\left(x_{1j}^E\right)^2 + \left(x_{2j}^E\right)^2\right) - 3\left(x_{1j}^E + 3x_{2j}^E\right) + 4\right] \; , \qquad j = \mathrm{A,B} \end{aligned}$$

El resultado de estas dos funciones en cada uno de los dos casos en los que se alcanza equilibrio en localización es el siguiente:

A. $m \leq t \quad \Rightarrow \quad x_{1\mathrm{A}}^E = 0 \; , \; x_{2\mathrm{A}}^E = 1$

$$D_T(m) = \frac{\gamma}{2}(2c^2 - 2c + 1)$$

$$C_T(m) = \frac{t}{12}$$

B. $t \leq m \quad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{2} \, , \quad x_{1\mathrm{B}}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \, , \quad x_{2\mathrm{B}}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$

$$D_T(m) = \frac{\gamma t^2}{4m^2}$$

$$C_T(m) = \frac{t}{12}\left(\frac{m^2 - 3tm + 3t^2}{m^2}\right)$$

En un primer paso, es necesario minimizar el componente de daño en el caso A respecto a la variable c :

$$\frac{\partial D_T(m)}{\partial c} = \frac{\gamma}{2}(4c - 2)$$
$$\frac{\partial D_T(m)}{\partial c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 D_T(m)}{\partial^2 c} = 2\gamma > 0 \quad \forall\, c$$

Con el resultado de daño y coste totales se obtiene el valor de la función de daño medioambiental-social total a minimizar, $\Psi = \lambda D_T + (1-\lambda)C_T$, que resulta:

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_{\mathrm{A}} = \lambda\dfrac{\gamma}{4} + (1-\lambda)\dfrac{t}{12} & si \quad m \le t \\[2ex] \Psi_{\mathrm{B}} = \lambda\dfrac{\gamma t^2}{4m^2} + (1-\lambda)\dfrac{t}{12m^2}(m^2 - 3tm + 3t^2) & si \quad t \le m \end{cases}$$

En el caso A en el que el valor de la multa es menor que el coste de transporte, el valor de la función de daño es constante respecto a la variable de control, m; y este valor es siempre mayor o igual que el valor que puede tomar la función en el caso B en el que la multa es mayor o igual al valor del parámetro de coste de transporte, ya que sus dos componentes lo son:

$$\cdot\ \lambda\frac{\gamma t^2}{4m^2} \le \lambda\frac{\gamma}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{m^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \le m^2 \quad \Leftrightarrow \quad t \le m$$

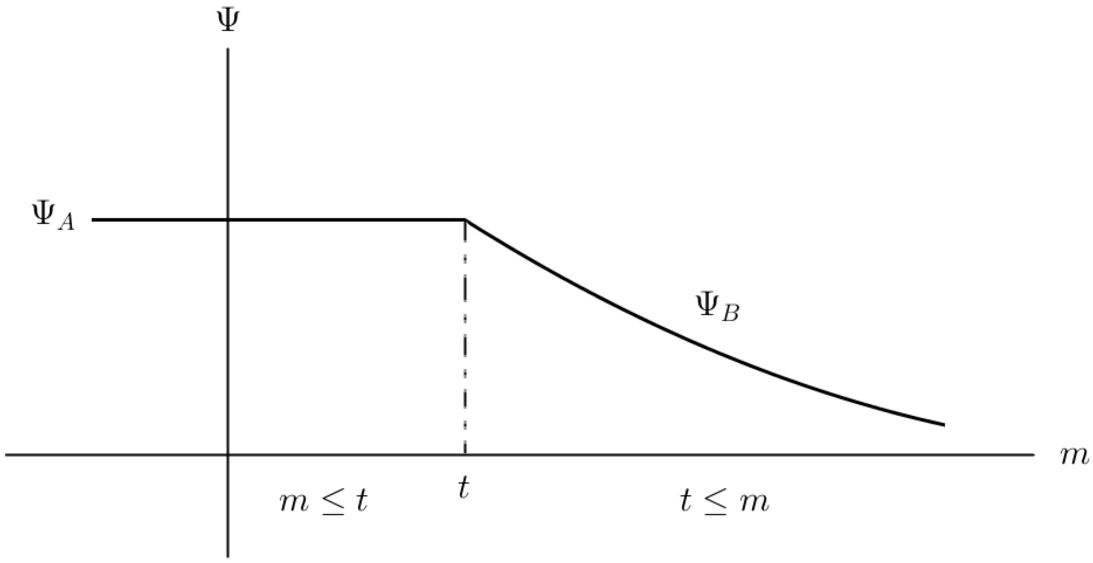
$$\cdot\ (1-\lambda)\frac{t}{12m^2}(m^2 - 3tm + 3t^2) \le (1-\lambda)\frac{t}{12} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{m^2}(m^2 - 3tm + 3t^2) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 3tm + 3t^2 \le m^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-3tm + 3t^2 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3t \le 3m \quad \Leftrightarrow \quad t \le m$$

Luego $\Psi_{\mathrm{B}} \le \Psi_{\mathrm{A}} \quad \forall\, t \le m$.

Tal y como se aprecia en la figura, que aproxima el comportamiento de ambas funciones de daño, la interpretación del resultado final muestra que, cuando la multa es más pequeña que el coste de transporte, el daño es fijo, Ψ_A, y siempre mayor que el valor de la función de daño para una multa mayor que dicho coste de transporte, Ψ_B, ya que esta tiene una asíntota en ∞ en el valor $(1-\lambda)\frac{t}{12}$:



A partir de aquí, se calcula el valor óptimo de la multa, m^*, que minimiza la función de daño medioambiental-social. Para ello, se resuelve en Ψ_B la condición de primer orden respecto a la multa, y se llega a que el mínimo de la función de daño se alcanza para un valor de la multa expresado a partir de los parámetros de transporte, daño y ponderación:

$$m^* = 2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Demostración: anexo 3.3.

Dado este valor óptimo de la multa, el valor de precios y localizaciones en equilibrio en función de los parámetros de transporte, daño y sesgo queda como sigue:

$$x_1^* = \frac{1}{4}\frac{t(1-\lambda)+2\gamma\lambda}{t(1-\lambda)+\gamma\lambda}$$

$$x_2^* = \frac{3}{4}\frac{t(1-\lambda)+2\gamma\lambda}{t(1-\lambda)+\gamma\lambda}$$

$$p_1^* = p_2^* = \frac{t^2(1-\lambda)}{2(t(1-\lambda)+\gamma\lambda)}$$

3.4 Análisis del modelo con consumidores conscientes

3.4.1 Equilibrio en precio

De nuevo se plantea la resolución del problema $\mathcal{P}_1$ inicial. Se determina primeramente la demanda de ambas empresas para después calcular su función de beneficio, y para ello se define el consumidor indiferente, que se obtiene a partir de la siguiente igualdad:

$$p_1 + T_1(x) + \Gamma(x_1) = p_2 + T_2(x) + \Gamma(x_2)$$

Desarrollando se obtiene:

$$p_1 + t(x_1 - x)^2 + \gamma(x_1 - c)^2 = p_2 + t(x_2 - x)^2 + \gamma(x_2 - c)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$p_1 + t(x_1^2 + x^2 - 2x_1x) + \gamma(x_1^2 + c^2 - 2cx_1)$$
$$= p_2 + t(x_2^2 + x^2 - 2x_2x) + \gamma(x_2^2 + c^2 - 2cx_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$2tx(x_2 - x_1) = p_2 - p_1 + t(x_2^2 - x_1^2) + \gamma(x_2^2 - x_1^2) - 2\gamma c(x_2 - x_1)$$

con lo que se llega a la expresión del consumidor indiferente en el caso consciente:

$$\hat{x} = \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{(t+\gamma)(x_2 + x_1)}{2t} - \frac{\gamma c}{t} \equiv \hat{x}_C$$

Es posible relacionar el consumidor indiferente de este caso, $\hat{x}_C$, con el obtenido en el caso anterior, en el que se consideraban consumidores miopes, $\hat{x}_M = \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{(x_2 + x_1)}{2}$, de la siguiente manera:

$$\hat{x}_C = \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{(x_2 + x_1)}{2} + \frac{\gamma(x_2 + x_1)}{2t} - \frac{\gamma c}{t} = \hat{x}_M + \frac{\gamma}{t}\left(\frac{(x_2 + x_1)}{2} - c\right)$$

Se observa que la relación entre el consumidor indiferente del caso consciente y el consumidor indiferente del caso miope no depende de los precios p_1 y p_2, esto es, es independiente de los resultados que se obtendrán en el equilibrio en precios. De este modo, en función de cómo es la característica del regulador respecto a las localizaciones de las empresas, x_1, x_2, se tiene que el nuevo consumidor indiferente (consciente) está más a la derecha o más a la izquierda del anterior (miope):

$c < \frac{(x_2 + x_1)}{2} \;\Rightarrow\; \hat{x}_C > \hat{x}_M$, lo que se traduce en una mayor demanda para la empresa 1

$c > \frac{(x_2 + x_1)}{2} \;\Rightarrow\; \hat{x}_C < \hat{x}_M$, lo que se traduce en una mayor demanda para la empresa 2

$c = \frac{(x_2 + x_1)}{2} \;\Rightarrow\; \hat{x}_C = \hat{x}_M$

lo que lleva el caso consciente a la situación del caso miope sin daño para los consumidores que adquieren características alejadas de la recomendación del regulador.

En la perspectiva de determinar la función de demanda, se verifican cuáles son las condiciones necesarias para que el consumidor indiferente $\hat{x}$ esté situado dentro del espacio de mercado, $0 \leq \hat{x} \leq 1$, o, alternativamente, fuera. Desarrollando las dos situaciones enfrentadas se llega a una condición sobre los valores de los precios en función de la localización elegida por cada empresa y de los parámetros de coste de transporte y de daño:

$0 \leq \hat{x}_C \quad \Leftrightarrow$

$$0 \leq \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{(t+\gamma)(x_2 + x_1)}{2t} - \frac{\gamma c}{t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\gamma c - \frac{(t+\gamma)(x_2 + x_1)}{2} \leq \frac{p_2 - p_1}{2(x_2 - x_1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_2 - x_1)\big(2\gamma c - (t+\gamma)(x_2 + x_1)\big) \leq p_2 - p_1$$

$\hat{x}_C \leq 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{(t+\gamma)(x_2 + x_1)}{2t} - \frac{\gamma c}{t} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$p_2 - p_1 + (t+\gamma)(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2\gamma c(x_2 - x_1) \leq 2t(x_2 - x_1) \quad \Leftrightarrow$$

$$p_2 - p_1 \leq (x_2 - x_1)\big(2t + 2\gamma c - (t+\gamma)(x_2 + x_1)\big)$$

A partir de las expresiones obtenidas, es posible expresar la condición de pertenencia al mercado del consumidor indiferente como un intervalo para la diferencia de precios:

$0 \leq \hat{x}_C \leq 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)[2\gamma c - (t+\gamma)(x_2 + x_1)] &\leq p_2 - p_1 \\ &\leq (x_2 - x_1)[2(t + \gamma c) - (t+\gamma)(x_2 + x_1)]\end{aligned}$$

Al igual que en el caso miope, para simplificar los cálculos se realiza un cambio de variable que denota en lo sucesivo la expresión de las variables de localización:

$$s = x_2 + x_1 \quad , \quad r = x_2 - x_1$$

verificando $r \geq 0$ ya que, por hipótesis de inicio, $x_1 \leq x_2$ $\left(x_1 = \frac{s-r}{2} \,,\; x_2 = \frac{s+r}{2} \right)$.

En virtud de este cambio de variable, las expresiones de: consumidor indiferente y su intervalo de pertenencia al mercado; de funciones de demanda, $Q_i,\ i = 1{,}2$; y de funciones de beneficio de cada empresa, $B_i = p_i Q_i - M_i,\ i = 1{,}2$, vienen dadas por la siguiente formulación:

$$\hat{x}_C = \frac{p_2 - p_1}{2tr} + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t}$$

$$\hat{x}_C = \hat{x}_M + \frac{\gamma}{t}\left(\frac{s}{2} - c\right)$$

$$0 \leq \hat{x}_C \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad r[2\gamma c - (t+\gamma)s] \leq p_2 - p_1 \leq r[2(t+\gamma c) - (t+\gamma)s]$$

$$Q_1(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 0 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{(t+\gamma)s}{2t} - \dfrac{\gamma c}{t} & si \quad 0 \leq \hat{x}_C \leq 1 \\ 1 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

que en términos de la demanda obtenida en el caso de consumidores miopes queda:

$$Q_1^C(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 0 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ Q_1^M + \dfrac{\gamma}{t}\left(\dfrac{s}{2} - c\right) & si \quad 0 \leq \hat{x}_C \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 < \hat{x}_C \end{cases}$$

$$Q_2(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 1 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ 1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{(t+\gamma)s}{2t} + \dfrac{\gamma c}{t} & si \quad 0 \leq \hat{x}_C \leq 1 \\ 0 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

que en términos de la demanda obtenida en el caso de consumidores miopes queda:

$$Q_2^C(p_1, p_2, s, r) = \begin{cases} 1 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ Q_2^M - \dfrac{\gamma}{t}\left(\dfrac{s}{2} - c\right) & si \quad 0 \leq \hat{x}_C \leq 1 \\ 0 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

$$B_1(p_1,p_2,s,r) = \begin{cases} 0 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ p_1\left(\frac{p_2-p_1}{2tr}+\frac{(t+\gamma)s}{2t}-\frac{\gamma c}{t}\right)-m\left(\frac{s-r}{2}-c\right)^2 & si \quad 0 \le \hat{x}_C \le 1 \\ p_1 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

que en términos del beneficio obtenido en el caso de consumidores miopes queda:

$$B_1^C(p_1,p_2,s,r) = \begin{cases} 0 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ B_1^M + p_1\frac{\gamma}{t}\left(\frac{s}{2}-c\right) & si \quad 0 \le \hat{x}_C \le 1 \\ p_1 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

$$B_2(p_1,p_2,s,r) = \begin{cases} p_2 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ p_2\left(1-\frac{p_2-p_1}{2tr}-\frac{(t+\gamma)s}{2t}+\frac{\gamma c}{t}\right)-m\left(\frac{s+r}{2}-c\right)^2 & si \quad 0 \le \hat{x}_C \le 1 \\ 0 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

que en términos del beneficio obtenido en el caso de consumidores miopes resulta:

$$B_2^C(p_1,p_2,s,r) = \begin{cases} p_2 & si \quad \hat{x}_C < 0 \\ B_2^M - p_2\frac{\gamma}{t}\left(\frac{s}{2}-c\right) & si \quad 0 \le \hat{x}_C \le 1 \\ 0 & si \quad \hat{x}_C > 1 \end{cases}$$

En el caso en el que el regulador escoge su característica en el punto medio de las empresas, $c = \frac{s}{2}$, se observa que demandas y beneficios obtenidos en el modelo consciente son iguales a demandas y beneficios obtenidos en el modelo miope:

$$c = \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_i^C = Q_i^M \;, \quad B_i^C = B_i^M \;, \quad i = 1,2$$

Proposición 3.3.- El equilibrio en precios está dado por:

$$p_1^{*C} = \frac{r}{3}\big(t(2+s)+\gamma(s-2c)\big) \quad , \quad p_2^{*C} = \frac{r}{3}\big(t(4-s)-\gamma(s-2c)\big)$$

si y sólo si:

$$\max\left\{0, \frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s)\right\} \;\leq\; c \;\leq\; \min\left\{\frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s), 1\right\}$$

Demostración: anexo 3.4.

Observaciones:

1.- De nuevo se observa que, bajo la condición de localización de la característica del regulador en el punto medio de las dos empresas, $c = \frac{s}{2}$, se tiene la configuración del caso miope, es decir, no se produce daño al consumir alejado de la recomendación del regulador.

2.- Dada la condición sobre la característica c en el equilibrio, es ahora posible comprobar que en el caso $\gamma = 0$ se verifica la condición del caso miope, que es $-t(4-s) \leq 0 \leq t(s+2)$ (condición redundante que se verifica $\forall\ s, r$).

3.- A partir de la condición de la proposición se discriminan los extremos de la misma en función de la relación entre los parámetros de coste de transporte y daño frente al punto medio entre la localización de las empresas:

$$\max\left\{0, \frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s)\right\} = \begin{cases} \frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s) & si \quad \frac{4t}{\gamma+t} \leq s \\ 0 & si \quad s \leq \frac{4t}{\gamma+t} \end{cases}$$

$$\min\left\{\frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s), 1\right\} = \begin{cases} \frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s) & si \quad s \leq \frac{2\gamma - 2t}{\gamma+t} \\ 1 & si \quad \frac{2\gamma - 2t}{\gamma+t} \leq s \end{cases}$$

De esta manera, surgen distintas configuraciones del intervalo de pertenencia del parámetro de control del regulador, c :

1. $\frac{4t}{\gamma+t} \leq \frac{2\gamma-2t}{\gamma+t} \quad \Leftrightarrow \quad 3t \leq \gamma$
   i. $\frac{4t}{\gamma+t} \leq \frac{2\gamma-2t}{\gamma+t} \leq s$
   ii. $\frac{4t}{\gamma+t} \leq s \leq \frac{2\gamma-2t}{\gamma+t}$
   iii. $s \leq \frac{4t}{\gamma+t} \leq \frac{2\gamma-2t}{\gamma+t}$

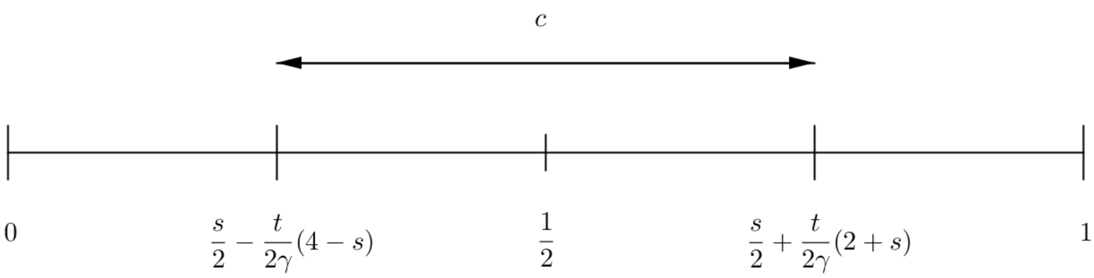
2. $\frac{2\gamma-2t}{\gamma+t} \leq \frac{4t}{\gamma+t} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \leq 3t$
   iv. $\frac{2\gamma-2t}{\gamma+t} \leq \frac{4t}{\gamma+t} \leq s$
   v. $\frac{2\gamma-2t}{\gamma+t} \leq s \leq \frac{4t}{\gamma+t}$
   vi. $s \leq \frac{2\gamma-2t}{\gamma+t} \leq \frac{4t}{\gamma+t}$

Y en cada caso el intervalo sobre c resulta:

1. $3t \leq \gamma$
   i. $\frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s) \leq c \leq 1$
   ii. $\frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s) \leq c \leq \frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s)$
   iii. $0 \leq c \leq \frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s)$

2. $\gamma \leq 3t$
   iv. $\frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s) \leq c \leq 1$
   v. $0 \leq c \leq 1$
   vi. $0 \leq c \leq \frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s)$

Para el caso ii. la siguiente figura ilustra la configuración del intervalo:



Se aprecia que, como se acaba de demostrar, no existe siempre equilibrio en precio a partir de los valores de c. Es posible comparar estos valores con los precios de equilibrio obtenidos en el caso de los consumidores miopes, que se denotan por:

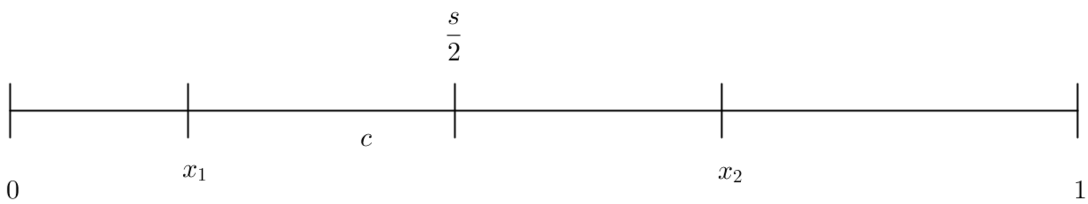
$$p_1^{*M} = \frac{r}{3}t(2+s) \quad , \quad p_2^{*M} = \frac{r}{3}t(4-s)$$

Así, la comparación resulta:

$$p_1^{*C} = \frac{r}{3}(t(2+s) + \gamma(s-2c)) = p_1^{*M} + \frac{r}{3}\gamma(s-2c)$$

$$p_2^{*C} = \frac{r}{3}(t(4-s) - \gamma(s-2c)) = p_2^{*M} - \frac{r}{3}\gamma(s-2c)$$

La discusión sobre estas relaciones lleva a discriminar sobre el valor de c en tanto su situación respecto al punto medio de las localizaciones de las empresas:



$$s - 2c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c \leq \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1^{*C} \geq p_1^{*M} \quad , \quad p_2^{*C} \leq p_2^{*M}$$

es decir, si c se sitúa a la izquierda del punto medio de la distancia entre la localización de las dos empresas, se tiene que, para la empresa 1, el precio de equilibrio cuando los consumidores son conscientes aumenta respecto al precio en equilibrio cuando los consumidores son miopes; y para la empresa 2, el efecto es a la inversa, el precio de equilibrio cuando los consumidores son conscientes disminuye respecto al precio en equilibrio cuando los consumidores son miopes.

Por el contrario,

$$s - 2c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c \geq \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1^{*C} \leq p_1^{*M} \quad , \quad p_2^{*C} \geq p_2^{*M}$$

esto es, si c se sitúa a la derecha del punto medio de la distancia entre la localización de las dos empresas, se tiene que, para la empresa 1, el precio de equilibrio cuando los consumidores son conscientes disminuye respecto al precio en equilibrio cuando los consumidores son miopes; y para la empresa 2, el efecto es a la inversa, el precio de equilibrio cuando los consumidores son conscientes aumenta respecto al precio en equilibrio cuando los consumidores son miopes.

Ambos efectos se explican desde el momento en el que se asume que, para la empresa que está localizada más cerca de c, el hecho de pasar de tener consumidores miopes a tener consumidores conscientes le beneficia, puesto que puede aumentar su precio, y como se puede ver al inspeccionar las funciones Q_1 y Q_2, también su demanda y por tanto su beneficio.

En el modelo consciente, cuando se verifica esta última condición sobre c, p_1^{*C} y p_2^{*C} son de equilibrio, y se llega a que el valor de las funciones de beneficio resulta:

$$B_1(p_1^*, p_2^*, s, r) = B_1^*(s, r) = \frac{r}{18t}(2t + (t+\gamma)s - 2\gamma c)^2 - m\left(\frac{s-r}{2} - c\right)^2$$

$$B_2(p_1^*, p_2^*, s, r) = B_2^*(s, r) = \frac{r}{18t}(4t - (t+\gamma)s + 2\gamma c)^2 - m\left(\frac{s+r}{2} - c\right)^2$$

Así, al escribir las funciones de beneficio de cada empresa en el caso de los consumidores conscientes en términos de las funciones de beneficio del caso de los consumidores miopes, se obtiene:

$$B_1^{*C} = \frac{r}{18t}(2t + (t+\gamma)s - 2\gamma c)^2 - m\left(\frac{s-r}{2} - c\right)^2 =$$

$$\frac{r}{18t}\big(t(2+s) + \gamma(s-2c)\big)^2 - m\left(\frac{s-r}{2} - c\right)^2 =$$

$$\frac{r}{18}t(2+s)^2 - m\left(\frac{s-r}{2} - c\right)^2 + \frac{r}{18t}(\gamma^2(s-2c)^2 + 2t\gamma(2+s)(s-2c))$$

$$B_1^{*C} = B_1^{*M} + \frac{r}{18t}(\gamma^2(s-2c)^2 + 2t\gamma(2+s)(s-2c))$$

$$B_2^{*C} = \frac{r}{18t}(4t - (t+\gamma)s + 2\gamma c)^2 - m\left(\frac{s+r}{2} - c\right)^2 =$$

$$\frac{r}{18t}\big(t(4-s) - \gamma(s-2c)\big)^2 - m\left(\frac{s+r}{2} - c\right)^2 =$$

$$\frac{r}{18}t(4-s)^2 - m\left(\frac{s+r}{2} - c\right)^2 + \frac{r}{18t}(\gamma^2(s-2c)^2 - 2t\gamma(4-s)(s-2c))$$

$$B_2^{*C} = B_2^{*M} + \frac{r}{18t}(\gamma^2(s-2c)^2 - 2t\gamma(4-s)(s-2c))$$

De nuevo se observa que la empresa más cercana a la localización preconizada por el regulador, c, tiene unos beneficios superiores en el caso de consumidores conscientes respecto a los beneficios obtenidos en el caso de consumidores miopes, por lo que la aparición de un daño (por consumir en una localización alejada de la recomendación del regulador) en la función de utilidad del consumidor obliga a las empresas a producir cerca de esta localización regulatoria, c. Y se observa a su vez que los beneficios obtenidos bajo la característica media, $s = \frac{x_1+x_2}{2}$, son los obtenidos en el caso miope.

Para pasar a estudiar el equilibrio en localización, se deshace el cambio de variable utilizado para el cálculo del equilibrio en precios, y se expresan las funciones de beneficio en términos de x_1 , x_2:

$$B_1^*(x_1, x_2) = \frac{(x_2 - x_1)}{18t}(2t + (t+\gamma)(x_2 + x_1) - 2\gamma c)^2 - m(x_1 - c)^2$$

$$B_2^*(x_1, x_2) = \frac{(x_2 - x_1)}{18t}(4t - (t+\gamma)(x_2 + x_1) + 2\gamma c)^2 - m(x_2 - c)^2$$

3.4.2 Equilibrio en localización

En esta fase se determina el equilibrio en localización de producto. Se resuelve el problema $\mathcal{P}_2$, incorporando las funciones de beneficio obtenidas en el equilibrio en precios:

$$\mathcal{P}_2: \quad \underbrace{max}_{x_1} \; B_1^*(x_1, x_2) \quad , \quad \underbrace{max}_{x_2} \; B_2^*(x_1, x_2)$$

Llegado este punto, se observa que las funciones de beneficio son expresiones de tercer grado en cada una de sus variables, B_1 es función de tercer grado respecto a x_1, y B_2 es función de tercer grado respecto a x_2. Por tanto, el problema de optimización de dichas funciones implica que el análisis del equilibrio en localización acarrea un determinante aumento de complejidad, tanto en los cálculos como en la posible interpretación económica de los resultados, que constituye una situación no práctica desde el punto de vista de la aplicabilidad de las soluciones, y así se concluye que el problema pase a ser no productivo por inmanejable. En efecto, la resolución del problema $\mathcal{P}_2$ presenta la expresión de la condición de primer orden como sigue:

$$\frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = (2t + (t+\gamma)(x_2 + x_1) - 2\gamma c)[-2t + (t+\gamma)(x_2 - 3x_1) + 2\gamma c] - 36mt(x_1 - c) = 0$$

$$\frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = (4t - (t+\gamma)(x_2 + x_1) + 2\gamma c)[4t + (t+\gamma)(x_1 - 3x_2) + 2\gamma c] - 36mt(x_2 - c) = 0$$

Estas ecuaciones son de nuevo dos cónicas en $x_1, x_2 \in [0,1]$, cuya intersección en el intervalo $[0,1] \times [0,1]$ arroja soluciones de expresión inmanejable desde el punto de vista de los parámetros c, m, t, que no suponen un avance para el problema de optimización que se pretende resolver.

Por tanto, en lo sucesivo se trabaja el equilibrio bajo la condición de simetría en localización: las empresas posicionarán sus producciones en localizaciones simétricas equidistantes del centro del mercado, lo que se traduce en la siguiente restricción:

$$x_2 + x_1 = 1$$

Se asume, sin pérdida de generalidad, que la primera empresa se localiza en la mitad inferior del segmento, mientras que la segunda se sitúa en la mitad superior:

$$0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1$$

A partir de esta condición de simetría, se reformula la expresión del consumidor indiferente y el contenido mismo de la proposición 3, para obtener ahora un resultado del equilibrio en precios que se expresa como:

$$\hat{x}_C{}^* = \frac{1}{2} + \frac{\gamma(1-2c)}{6t}$$

$$p_1^* = \frac{(x_2 - x_1)}{3}(3t + \gamma(1-2c))$$

$$p_2^* = \frac{(x_2 - x_1)}{3}(3t - \gamma(1-2c))$$

de donde se deduce que, a medida que aumenta la diferencia entre la localización de las empresas, esto es, mayor es x_2 y menor por tanto es x_1, más aumentan los precios, dado por hipótesis que $t > 0$. Por el contrario, a menor diferencia en localización de las empresas, menores serán los precios de sus productos. La máxima diferenciación actúa en contra de la competencia, mientras que la mínima diferenciación relaja los precios y beneficia a los consumidores a través de la competencia.

La condición sobre la característica del regulador, c, también queda modificada por la hipótesis de simetría, que lleva a reinterpretarla de la siguiente manera:

$$\max\left\{0, \frac{1}{2} - \frac{3t}{2\gamma}\right\} \leq c \leq \min\left\{\frac{1}{2} + \frac{3t}{2\gamma}, 1\right\}$$

Los casos estudiados en el caso asimétrico se reducen, bajo simetría, a los dos intervalos simétricos respecto del punto medio del segmento, que corresponden a la situación en la que los dos extremos del intervalo de restricción sobre c están dentro del intervalo $[0,1]$, o los 2 están fuera, y que arrojan una condición sobre los parámetros t y γ:

$$\max\left\{0, \frac{1}{2} - \frac{3t}{2\gamma}\right\} = \begin{cases} 0 & si \quad \gamma \leq 3t \\ \frac{1}{2} - \frac{3t}{2\gamma} & si \quad 3t \leq \gamma \end{cases}$$

$$\min\left\{\frac{1}{2} + \frac{3t}{2\gamma}, 1\right\} = \begin{cases} 1 & si \quad \gamma \leq 3t \\ \frac{1}{2} + \frac{3t}{2\gamma} & si \quad 3t \leq \gamma \end{cases}$$

En función de la relación entre el parámetro de daño social, generado por las empresas al producir cada una de sus unidades de producto alejada de la característica de referencia, y el parámetro de coste de transporte, el intervalo sobre c resulta:

1. $\gamma \leq 3t$

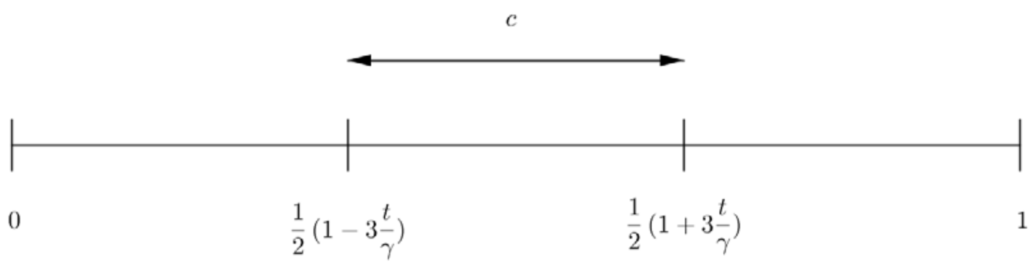
$$0 \leq c \leq 1$$

Cuando el parámetro de daño generado por las empresas es inferior a tres veces el valor del parámetro de coste de transporte, se mantiene la condición de pertenencia al mercado $[0,1]$ para c, y siempre existe equilibrio en precios.

2. $3t \leq \gamma$

$$\frac{1}{2} - \frac{3t}{2\gamma} \leq c \leq \frac{1}{2} + \frac{3t}{2\gamma}$$

Si el parámetro de daño es grande, más que tres veces el parámetro de coste de transporte, se tiene el caso más restrictivo: para que exista equilibrio en precios es necesario que el valor de c esté comprendido en el intervalo de restricción de equilibrio, lo que se refleja en la siguiente figura:



Observaciones:

1.- De nuevo se observa que, bajo una característica del regulador situada en el punto medio del segmento, $c = \frac{1}{2}$, los resultados coinciden con del caso miope: no hay penalización por consumir fuera de la recomendación del regulador.

2.- No siempre existe equilibrio en precio a partir de los valores de c. Al comparar estos precios de equilibrio con obtenidos bajo consumidores miopes:

$$p_1^{*M} = rt \quad , \quad p_2^{*M} = rt$$

resulta:

$$p_1^{*C} = \frac{r}{3}(3t + \gamma(1 - 2c)) = p_1^{*M} + \frac{r}{3}\gamma(1 - 2c)$$

$$p_2^{*C} = \frac{r}{3}(3t - \gamma(1 - 2c)) = p_2^{*M} - \frac{r}{3}\gamma(1 - 2c)$$

Ahora, en función de la localización de la característica del regulador se analizan las implicaciones de la asunción de un tipo de consumidor consciente:

- $c \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1^{*C} \geq p_1^{*M} \quad , \quad p_2^{*C} \leq p_2^{*M}$

es decir, si c se sitúa a la izquierda del punto medio del segmento de mercado, para la empresa 1, aumenta el precio de equilibrio cuando los consumidores son conscientes respecto a cuando son miopes; mientras que para la empresa 2, se da el efecto inverso, el precio de equilibrio cuando los consumidores son conscientes disminuye respecto al obtenido bajo consumidores miopes.

- $\frac{1}{2} \leq c \quad \Rightarrow \quad p_1^{*C} \leq p_1^{*M} \quad , \quad p_2^{*C} \geq p_2^{*M}$

esto es, cuando c se sitúa a la derecha del punto medio del segmento, para la empresa 1, el precio de equilibrio disminuye cuando los consumidores pasan de ser miopes a ser conscientes; y para la empresa 2, se tiene el efecto inverso, aumenta el precio de equilibrio cuando los consumidores pasan de miopes a conscientes.

Bajo la condición de simetría, la localización de la característica del regulador c a un lado u otro del centro del mercado implica, para la empresa que esté localizada en esa mitad del segmento, un beneficio al pasar de tener consumidores miopes a tener consumidores conscientes, dado que aumenta su precio en equilibrio y por tanto también su demanda y así su beneficio.

Con todo ello, se observa que la empresa más cercana a la localización preconizada por el regulador, c, tendrá unos beneficios superiores con consumidores conscientes frente a los que obtenía con consumidores miopes, por lo que la aparición de un daño (por consumir en una localización alejada de la recomendación del regulador) en la función de utilidad del consumidor obliga a las empresas a producir cerca de la localización regulatoria, c.

Por otra parte, de esta condición de simetría, y utilizando que $r = 1 - 2x_1$, $s = 1 - 2x_2$, se deriva la siguiente expresión de las funciones de beneficio, ahora independiente cada una de la localización de la otra empresa:

$$B_1^*(x_1) = \frac{(1-2x_1)}{18t}(3t + \gamma(1-2c))^2 - m(x_1 - c)^2$$
$$B_2^*(x_2) = \frac{(2x_2-1)}{18t}(3t - \gamma(1-2c))^2 - m(x_2 - c)^2$$

Proposición 3.4.- El equilibrio en localización (x_1^*, x_2^*) existe, según el valor de c, en los siguientes casos, y viene dado por:

C. $c \in [0, \min\{c_1, c_7\}] \cap [\max\{c_2, c_8\}, 1] \quad \rightarrow \quad x_{11}^E = 0 \ , \ x_{23}^E = 1$

D. $c \in ([c_1, c_3] \ \cup \ [c_4, c_2]) \ \cap \ ([c_7, c_5] \ \cup \ [c_6, c_8])$

$c = \frac{1}{2} \ , \ x_{12}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \ , \ x_{22}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$

en donde

$$c_1 = \frac{18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma - \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t-\gamma)^2}}{8\gamma^2}$$

$$c_2 = \frac{18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma + \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t-\gamma)^2}}{8\gamma^2}$$

$$c_3 = \frac{18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma - \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 + 9tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_4 = \frac{18mt+4\gamma^2-12t\gamma+\sqrt{(18mt+4\gamma^2-12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2+9tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_5 = \frac{-(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)-\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-9tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_6 = \frac{-(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)+\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-9tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_7 = \frac{-(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)-\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-18tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_8 = \frac{-(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)+\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-18tm)}}{8\gamma^2}$$

y se relacionan entre ellas de la siguiente manera:

$$0 \leq c_1 < c_3 < c_4 < c_2$$

$$0 \leq c_7 < c_5 < c_6 < c_8$$

$$c_5 < c_3$$

$$c_7 < c_1$$

Demostración: anexo 3.5.

Observaciones.-

1.- Si el regulador elige la localización $c = \frac{1}{2}$ para la característica de referencia, el hecho de tener consumidores miopes o conscientes no afecta al beneficio de las empresas.

2.- Para que se verifique la condición de simetría en localizaciones interiores al espacio de mercado se impone la restricción $x_1^* + x_2^* = 1$, de donde se obtiene $c = \frac{1}{2}$, $x_{12}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m}$, $x_{22}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$, que son los valores de equilibrio obtenidos en el caso miope para las localizaciones de equilibrio en localización cuando ambas empresas se separan de la recomendación del regulador, que se sitúa en el centro del mercado.

3.- Es necesario comprobar la condición de pertenencia de $c = \frac{1}{2}$ al intervalo del caso D: $c \in ([c_1, c_3] \cup [c_4, c_2]) \cap ([c_7, c_5] \cup [c_6, c_8])$

Demostración: anexo 3.6.

3.4.3 Optimización de la función de daño medioambiental-social

Una vez que se han resuelto los equilibrios en precio y en localización en los apartados anteriores, el regulador tiene la tarea de minimizar la función de daño medioambiental-social citada previamente, función en la que dicho regulador pondera el peso que atribuye, por un lado, al daño medioambiental en que incurre el conjunto de los consumidores al adquirir los productos de las empresas 1 y 2 , y por otro, al coste total de transporte que han de soportar dichos consumidores:

$$\Psi = \lambda D_T + (1 - \lambda) C_T$$

En la función de daño total se tiene que:

· λ es el peso atribuido al daño por uso, atendiendo a la preferencia del regulador medioambiental, $0 \leq \lambda \leq 1$

· $(1 - \lambda)$ es el peso atribuido a la desutilidad del consumidor

· C_T es el coste total de transporte a cargo de los consumidores

· D_T es el daño medioambiental total producido por las empresas

De esta manera, un regulador que tenga un marcado carácter *ecologista* tomará un valor de λ muy próximo o igual a 1; mientras que un regulador que se ocupe del bienestar de los consumidores preferirá minimizar el coste total de transporte en que estos incurren, y tomará por tanto un valor de λ muy pequeño o igual a 0.

El daño medioambiental total se representa como la suma del daño de quienes compran a la empresa 1, esto es, $\hat{x}$ consumidores, y quienes compran a la empresa 2, esto es, $1-\hat{x}$ consumidores:

$$\begin{aligned} D_T(m) &= \Gamma_1(u_1) + \Gamma_2(u_2) = \hat{x}\gamma {u_1}^2 + (1-\hat{x})\gamma {u_2}^2 = \\ &= \gamma\hat{x}\left(x_{1j}^E - c\right)^2 + \gamma(1-\hat{x})\left(x_{2j}^E - c\right)^2 \\ &= \frac{\gamma}{2}\left[\left(x_{1j}^E - c\right)^2 + \left(x_{2j}^E - c\right)^2\right] \; ; \quad j = \mathrm{C,D} \; ; \; \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, el coste total de transporte, C_T, soportado por los consumidores es la suma infinitesimal del coste de transporte que soportan los $\hat{x}$ consumidores que compran a la empresa 1 y, por otra parte, los $(1-\hat{x})$ que compran a la empresa 2:

$$\begin{aligned} C_T(m) &= \int_0^{\hat{x}} t\left(x_{1j}^E - x\right)^2 dx + \int_{\hat{x}}^1 t\left(x_{2j}^E - x\right)^2 dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} t\left(x_{1j}^E - x\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\left(x_{2j}^E - x\right)^2 dx = \\ &= \frac{t}{24}\left(12\left(x_{1j}^E\right)^2 - 6x_{1j}^E + 1\right) + \frac{t}{24}\left(12\left(x_{2j}^E\right)^2 - 18x_{2j}^E + 7\right) = \\ &= \frac{t}{12}\left[6\left(\left(x_{1j}^E\right)^2 + \left(x_{2j}^E\right)^2\right) - 3\left(x_{1j}^E + 3x_{2j}^E\right) + 4\right] \;, \qquad j = \mathrm{C,D} \end{aligned}$$

Se evalúan ambas funciones para el caso en el que el regulador fija su característica en el centro del mercado, y las empresas se separan simétricamente hacia la derecha y la izquierda respectivamente, $c = \frac{1}{2}$, $x_{12}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m}$, $x_{22}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$, caso D, ya que para el resto de casos, la complejidad de la expresión de c no permite llegar a una conclusión clarificadora sobre el parámetro. Este caso coincide con el caso que minimiza el resultado para la modelización con consumidores miopes, y se tiene:

$$D_T(m) = \gamma \frac{t^2}{4m^2}$$

$$C_T(m) = \frac{t}{12m^2}\left(m^2 - 3mt + 3t^2\right)$$

Incorporando daño y coste totales se obtiene el valor de la función de daño medioambiental-social total a minimizar, $\Psi = \lambda D_T + (1-\lambda)C_T$:

$$\Psi_{\mathrm{D}} = \lambda\gamma \frac{t^2}{4m^2} + (1-\lambda)\frac{t}{12m^2}(m^2 - 3mt + 3t^2)$$

Tal y como se vio en el caso miope, al resolver la condición de primer orden respecto a m se obtiene una relación respecto a los parámetros de transporte, daño y ponderación:

$$\frac{\partial \Psi_{\mathrm{D}}}{\partial m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Luego el valor de la multa que minimiza el daño medioambiental-social es

$$m^* = 2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

3.5 Conclusiones

El modelo de regulación sobre competencia espacial que se ha presentado plantea una autoridad reguladora que determina una característica de preferencia para que las empresas localicen sus productos conforme a ella, multando o perjudicando a las empresas que se desvían de esta recomendación con un penalización en sus beneficios que favorecerá que, al ajustarse a dicha condición, el conjunto de los agentes sociales considerados sufran un menor daño derivado de esta elección. Este modelo ofrece unos resultados diversos en base a la consideración de la modelización que se adopte.

Para el caso de los consumidores miopes, que no son conscientes del daño que aportan al adquirir sus productos sobre una empresa localizada lejos de la característica preconizada, se obtiene un resultado concreto que establece el valor de la acción que debe tomar el regulador para minimizar el daño, favorecer la competencia y optimizar las utilidades de los consumidores y los beneficios de las empresas. Sin embargo, este resultado se obtiene bajo la condición de simetría, puesto que el cálculo del equilibrio en localización exige esta condición para llegar a una expresión de la relación entre la multa impuesta por el regulador y los parámetros del modelo.

Por el contrario, para el caso de los consumidores conscientes del daño que aportan a la función medioambiental-social cuando se dirigen a consumir a empresas alejadas de la recomendación de la autoridad reguladora, no sólo es necesario recurrir al caso simétrico de localización de las empresas en el espacio de mercado, sino que no en todos los equilibrios encontrados en el problema de localización es posible hallar el valor de la función de daño, por lo que no es posible comparar este valor en cada caso y así determinar el valor de una multa que optimice el trabajo de reducir los perjuicios causados por las empresas cuando estas están localizadas fuera de la recomendación regulatoria.

3.6 Anexo

Anexo 3.1.- Demostración de la proposición 3.1.

Dadas funciones de beneficio que dependen de precios y localizaciones, $B_i(p_1, p_2, x_1, x_2)$, $i = 1, 2$. Se define un equilibrio puro, o de Nash, en precios, como un par $\left(p_1^*(x_1, x_2), p_2^*(x_1, x_2)\right)$, tal que:

$$B_1(p_1^*(x_1, x_2), p_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) > B_1(p_1, p_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) \quad \forall\, p_1 \neq p_1^*$$

$$B_2(p_1^*(x_1, x_2), p_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) > B_2(p_1^*(x_1, x_2), p_2, x_1, x_2) \quad \forall\, p_2 \neq p_2^*$$

El equilibrio en estrategias puras en precios puede ser interpretado como un par de expectativas: ninguna de las dos empresas quiere cambiar su estrategia en precio, incluso cuando la otra revela la decisión de su precio. En consecuencia, el par (p_1^*, p_2^*) es un equilibrio de Nash en precios para una localización fija (x_1, x_2) cuando p_1^* maximiza $B_1(p_1, p_2^*)$ sobre $\mathbb{R}^+$ y p_2^* maximiza $B_2(p_1^*, p_2)$ sobre $\mathbb{R}^+$.

Se resuelve el problema $\mathcal{P}_1$ mediante la condición de primer orden respecto a los precios sobre las funciones de beneficio obtenidas, B_1, B_2, hallando la solución del sistema S:

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial B_1}{\partial p_1} = \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{s}{2} + p_1\left(\dfrac{-1}{2tr}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial p_2} = 1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{s}{2} + p_2\left(\dfrac{-1}{2tr}\right) = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{p_2}{2} + tr\dfrac{s}{2} \\ p_2 = \dfrac{p_1}{2} + tr(1 - \dfrac{s}{2})\end{cases}$$

Lo que deriva en las soluciones:

$$p_1^* = \frac{1}{3}tr(2+s) \quad , \quad p_2^* = \frac{1}{3}tr(4-s)$$

Sustituyendo los precios de equilibrio en la expresión del consumidor indiferente, se obtiene:

$$\hat{x}^* = \hat{x}(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{6}(2+s)$$

Analizando la definición del equilibrio puro en precios, el consumidor indiferente tiene la restricción de pertenencia al intervalo $[0,1]$ para mantener un beneficio positivo para cada empresa, ya que, como se indicó en el apartado 3.1, el consumidor indiferente se expresa como un intervalo sobre la diferencia de precios, y situar esta diferencia de precios fuera del intervalo significaría, alternativamente para la empresa 1 o 2, obtener un beneficio nulo, y por tanto así, la no existencia de equilibrio. De este modo, para que el par de precios (p_1^*, p_2^*) sea un equilibrio de Nash, se debe verificar que $0 \le \hat{x}_C^* \le 1$:

- $0 < \hat{x}_C{}^*$ trivialmente, ya que $0 < s \ \ \forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$;
- $\hat{x}_C{}^* \le 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{6}(2+s) \le 1 \ \Leftrightarrow\ 2 + s \le 6 \ \Leftrightarrow\ s \le 4$, cierto $\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$.

Además, se verifica siempre que las condiciones de segundo orden en el punto crítico son negativas, lo que equivale a que en dicho punto las funciones de beneficio alcanzan un máximo relativo:

$$\cdot \frac{\partial^2 B_1}{\partial^2 p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{p_2 - p_1}{2tr} + \frac{s}{2} + p_1\left(\frac{-1}{2tr}\right)\right) = -\frac{1}{tr}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 B_2}{\partial^2 p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(1 - \frac{p_2 - p_1}{2tr} - \frac{s}{2} + p_2\left(\frac{-1}{2tr}\right)\right) = -\frac{1}{tr}$$

Dado que $t > 0$ y $r > 0$ por hipótesis ($x_2 > x_1$), se cumple $\forall\, x_1, x_2$ que $\frac{\partial^2 B_1}{\partial^2 p_1} < 0$ y $\frac{\partial^2 B_2}{\partial^2 p_2} < 0$.

Anexo 3.2.- Demostración de la proposición 3.2.

Para encontrar el equilibrio en localización, se utiliza la condición de primer orden:

$$\frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = -t - 2m(x_1 - c) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1^* = c - \frac{t}{2m}$$

$$\frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = t - 2m(x_2 - c) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2^* = c + \frac{t}{2m}$$

A continuación se determina el valor de máximo de cada una de estas funciones, $\underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*$, $\underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*$, para lo cual se procede a verificar las siguientes condiciones:

$$0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} \leq x_2^* \leq 1$$

Para la empresa 1:

$$\cdot\, x_1^* < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c - \frac{t}{2m} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = 0 = x_{11}^E$$

$$\cdot\, 0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq c - \frac{t}{2m} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{2m} \leq c \leq \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{ArgMax}_{x_1}\ B_1^*(x_1,x_2) = x_1^* = x_{12}^E$$

$$\cdot\ \frac{1}{2} < x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < c - \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} < c \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ArgMax}_{x_1}\ B_1^*(x_1,x_2) = \frac{1}{2} = x_{13}^E$$

Para la empresa 2:

$$\cdot\ x_2^* < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c + \frac{t}{2m} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ArgMax}_{x_2}\ B_2^*(x_1,x_2) = \frac{1}{2} = x_{21}^E$$

$$\cdot\ \frac{1}{2} \le x_2^* \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \le c + \frac{t}{2m} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \le c \le 1 - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{ArgMax}_{x_2}\ B_2^*(x_1,x_2) = x_2^* = x_{22}^E$$

$$\cdot\ 1 < x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 < c + \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{2m} < c \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ArgMax}_{x_2}\ B_2^*(x_1,x_2) = 1 = x_{23}^E$$

En total hay tres casos para cada empresa, en los que se toman los valores $\{0, x_1^*, \frac{1}{2}\}$ y $\{\frac{1}{2}, x_2^*, 1\}$ respectivamente para las empresas 1 y 2, de manera que al combinarlos para encontrar una localización de equilibrio, que se define por $\{x_1^E, x_2^E\}$, aparecen nueve casos de estudio que se presentan a continuación:

i. $x_1^* < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{11}^E = 0$

$x_2^* < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{21}^E = \frac{1}{2}$

Mas en este escenario la simetría impuesta en el modelo no permite que los valores encontrados constituyan una solución de equilibrio, ya que $x_{11}^E + x_{21}^E \neq 1$.

ii. $x_1^* < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{11}^E = 0$

$\frac{1}{2} \le x_2^* \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \le c \le 1 - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{22}^E = x_2^* = c + \frac{t}{2m}$

La condición de simetría en este caso lleva a:

$$c + \frac{t}{2m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 - \frac{t}{2m},$$

asumiendo esta condición, el valor de x_{22}^{E} resulta ser $x_{22}^{E} = 1 - \frac{t}{2m} + \frac{t}{2m} = 1$, y al comprobar ambas restricciones se tiene que la segunda se cumple de manera trivial, pero la primera:

$$c = 1 - \frac{t}{2m} < \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{t}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m < t,$$

con lo que esta solución será de equilibrio únicamente en el caso de que la multa impuesta por el regulador sea estrictamente menor que el parámetro de coste de transporte.

iii. $x_1^* < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{11}^{E} = 0$

$$1 < x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{2m} < c \quad \Leftrightarrow \quad 1 < c + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{23}^{E} = 1$$

Se cumple la condición de simetría, y al combinar ambas restricciones se tiene que:

$$1 - \frac{t}{2m} < c < \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{2m} < \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{t}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m < t,$$

luego esta solución es de equilibrio si y sólo si la multa impuesta por el regulador es estrictamente menor que el parámetro de coste de transporte.

iv. $0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq c - \frac{t}{2m} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{2m} \leq c \leq \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow$

$$x_{12}^{E} = x_1^* = c - \frac{t}{2m}$$

$$x_2^* < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{21}^{E} = \frac{1}{2}$$

La condición de simetría en este caso lleva a:

$$c - \frac{t}{2m} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m},$$

y de aquí se deriva que no se verifica la segunda restricción, con lo que este caso no proporciona solución de equilibrio para el problema de localización.

v. $0 \le x_1^* \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le c - \frac{t}{2m} \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{2m} \le c \le \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow$

$$x_{12}^E = x_1^* = c - \frac{t}{2m}$$

$$\frac{1}{2} \le x_2^* \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \le c \le 1 - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{22}^E = x_2^* = c + \frac{t}{2m}$$

La condición de simetría en este caso lleva a:

$$c - \frac{t}{2m} + c + \frac{t}{2m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2},$$

bajo esta condición, el valor de las localizaciones de equilibrio resulta:

$$x_{12}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m}$$

$$x_{22}^E = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$$

Al comprobar ambas restricciones se tiene que la segunda se cumple de manera trivial, pero la primera:

$$\frac{t}{2m} \le \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{t}{2m}$$

$$\frac{t}{2m} \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t \le m$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} \quad \forall\, t > 0\,,\ m > 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \le \frac{1}{2} \le 1 - \frac{t}{2m}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \le \frac{1}{2} \quad \forall\, t > 0\,,\ m > 0$$

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{2m} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t \leq m$$

Luego en este caso, la solución de equilibrio está condicionada por la restricción de que la multa impuesta por el regulador sea al menos tan grande como el parámetro de coste de transporte.

vi. $$0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq c - \frac{t}{2m} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{2m} \leq c \leq \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow$$
$$x_{12}^E = x_1^* = c - \frac{t}{2m}$$

$$1 < x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{2m} < c \quad \Leftrightarrow \quad 1 < c + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{23}^E = 1$$

La condición de simetría en este caso lleva a:

$$c - \frac{t}{2m} + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{t}{2m},$$

asumiendo esta condición, el valor de x_{12}^E resulta que $x_{12}^E = 0$, y al comprobar ambas restricciones se tiene que la primera se cumple de manera trivial, pero la segunda:

$$1 - \frac{t}{2m} < c = \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{t}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m < t$$

y de nuevo, esta solución será de equilibrio si y sólo si la multa impuesta por el regulador es estrictamente menor que el parámetro de coste de transporte.

vii. $$\frac{1}{2} < x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < c - \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} < c \quad \Rightarrow \quad x_{13}^E = \frac{1}{2}$$

$$x_2^* < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{21}^E = \frac{1}{2}$$

Se cumple la condición de simetría, pero al combinar ambas restricciones:

$$\frac{1}{2} + \frac{t}{2m} < c < \frac{1}{2} - \frac{t}{2m}$$

se comprueba que no existen valores de t y m que las verifiquen, por lo que este caso no proporciona solución de equilibrio.

viii. $\frac{1}{2} < x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < c - \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} < c \quad \Rightarrow \quad x_{13}^E = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \leq x_2^* \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} \leq c \leq 1 - \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{22}^E = x_2^* = c + \frac{t}{2m}$

La condición de simetría en este caso lleva a:

$$\frac{1}{2} + c + \frac{t}{2m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m},$$

bajo esta condición, el valor de x_{22}^E resulta $x_{22}^E = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m} + \frac{t}{2m} = \frac{1}{2}$ pero al comprobar ambas restricciones, la primera no se cumple para ningún valor de t y m,

$$\frac{1}{2} + \frac{t}{2m} < c = \frac{1}{2} - \frac{t}{2m},$$

por lo que no hay solución de equilibrio en este caso.

ix. $\frac{1}{2} < x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < c - \frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{t}{2m} < c \quad \Rightarrow \quad x_{13}^E = \frac{1}{2}$

$1 < x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{2m} < c \quad \Leftrightarrow \quad 1 < c + \frac{t}{2m} \quad \Rightarrow \quad x_{23}^E = 1$

En este último caso, la solución de equilibrio no es posible, ya que no se cumple la condición de simetría, $x_{13}^E + x_{23}^E \neq 1$.

Anexo 3.3.- Optimización de la función de daño medioambiental-social:

$$\frac{\partial \Psi_B}{\partial m} = \lambda\gamma \frac{t^2}{4}\left(\frac{-2}{m^3}\right) + (1-\lambda)\frac{t}{12}\left[\frac{(2m-3t)m^2 - (m^2-3tm+3t^2)2m}{m^4}\right] =$$

$$= -\lambda\gamma \frac{t^2}{2m^3} + (1-\lambda)\frac{t}{12}\left[\frac{2m^2-3tm-2m^2+6tm-6t^2}{m^3}\right] =$$

$$= -\lambda\gamma \frac{t^2}{2m^3} + (1-\lambda)\frac{t}{12}\left[\frac{3tm-6t^2}{m^3}\right] =$$

$$= \frac{t^2}{2m^3}\left(-\lambda\gamma + (1-\lambda)\left(\frac{m-2t}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \Psi_B}{\partial m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{2m^3}\left(-\lambda\gamma + (1-\lambda)\left(\frac{m-2t}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2\lambda\gamma+(1-\lambda)(m-2t)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)m = 2t(1-\lambda) + 2\lambda\gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 2t + 2\gamma\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_B}{\partial^2 m} = \frac{t^2}{2}\left(\frac{-3}{m^4}\right)\left(-\lambda\gamma + (1-\lambda)\left(\frac{m-2t}{2}\right)\right) + \frac{t^2}{2m^3}\left(\frac{(1-\lambda)}{2}\right)$$

$$= \frac{t^2}{2m^3}\left[\left(\frac{3\lambda\gamma}{m} - \frac{3}{m}(1-\lambda)\left(\frac{m-2t}{2}\right)\right) + \left(\frac{(1-\lambda)}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{t^2}{2m^3}\left[\frac{3\lambda\gamma}{m} - \frac{3(1-\lambda)}{2} + \frac{3t(1-\lambda)}{m} + \frac{(1-\lambda)}{2}\right]$$

$$= \frac{t^2}{2m^3}\left[\frac{3\lambda\gamma + 3t(1-\lambda)}{m} - (1-\lambda)\right]$$

$$= \frac{t^2}{2m^4}\left[3\lambda\gamma + 3t(1-\lambda) - m(1-\lambda)\right]$$

$$= \frac{t^2}{2m^4}\left[3\lambda\gamma + (1-\lambda)(3t-m)\right]$$

Y se evalúa en el punto crítico de m obtenido previamente:

$$\frac{\partial^2 \Psi_B}{\partial^2 m}\left(2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)$$
$$= \frac{t^2}{2\left(2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^4}\left[3\lambda\gamma + (1-\lambda)\left(3t - \left(2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{t^2}{2\left(2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^4}\left[3\lambda\gamma + (1-\lambda)\frac{(t(1-\lambda) - 2\gamma\lambda)}{(1-\lambda)}\right]$$
$$= \frac{t^2}{2\left(2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^4}\left[\lambda\gamma + \left(t(1-\lambda)\right)\right] \;>\; 0 \quad \forall\, t, \gamma, \lambda$$

Luego el valor obtenido es el mínimo de la función de daño, mínimo que se alcanza para un valor de la multa expresado a partir de los parámetros de transporte, daño y ponderación:

$$m^* = 2t + 2\gamma \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Anexo 3.4.- Demostración de la proposición 3.3.

Se resuelve el problema $\mathcal{P}_1$ mediante la condición de primer orden respecto a los precios sobre las funciones de beneficio obtenidas, B_1, B_2, hallando la solución del sistema S:

$$(S)\ \begin{cases} \dfrac{\partial B_1}{\partial p_1} = \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{(t+\gamma)s}{2t} - \dfrac{\gamma c}{t} + p_1\left(\dfrac{-1}{2tr}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial p_2} = 1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{(t+\gamma)s}{2t} + \dfrac{\gamma c}{t} + p_2\left(\dfrac{-1}{2tr}\right) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{p_2}{2} + \dfrac{(t+\gamma)sr}{2} - \gamma c r \\ p_2 = tr + \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{(t+\gamma)sr}{2} + \gamma c r \end{cases}$$

Desde donde se deriva que las soluciones son:

$$p_1^{*C} = \frac{r}{3}\left(t(2+s) + \gamma(s-2c)\right) \quad , \quad p_2^{*C} = \frac{r}{3}\left(t(4-s) - \gamma(s-2c)\right)$$

A partir de este resultado, el consumidor indiferente se expresa como:

$$\hat{x}_C{}^* = \frac{1}{3} + \frac{(t+\gamma)s}{6t} - \frac{\gamma c}{3t} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t}\right) = \hat{x}_M^* + \frac{\gamma}{t}\left(\frac{s}{2} - c\right)$$

De nuevo, según la definición del equilibrio puro en precios, el consumidor indiferente debe pertenecer al intervalo $[0,1]$ para que ambas empresas puedan obtener un beneficio positivo, ya que, como se detalla en el apartado 4.1, el consumidor indiferente se expresa como un intervalo sobre la diferencia de precios, y al posicionar esta diferencia de precios fuera del intervalo se llega, alternativamente para la empresa 1 o 2, a obtener un beneficio nulo, y por tanto así, a la no existencia de equilibrio. Por tanto, para que el par de precios (p_1^*, p_2^*) sea un equilibrio de Nash, se debe verificar que $0 \leq \hat{x}_C^* \leq 1$:

- $0 \leq \hat{x}_C{}^* \iff 0 \leq \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t}\right) \iff 0 \leq 1 + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t} \iff \frac{\gamma c}{t} \leq \frac{2t+(t+\gamma)s}{2t} \iff 2\gamma c \leq 2\mathrm{t} + (t+\gamma)s$

- $\hat{x}_C{}^* \leq 1 \iff \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t}\right) \leq 1 \iff 1 + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t} \leq 3 \iff \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t} \leq 2 \iff \frac{(t+\gamma)s}{2t} - 2 \leq \frac{\gamma c}{t} \iff (t+\gamma)s - 4t \leq 2\gamma c$

Aunando ambos resultados, se obtiene el intervalo

$$(t+\gamma)s - 4t \leq 2\gamma c \leq (t+\gamma)s + 2t$$

$$\iff ts + \gamma s - 4t \leq 2\gamma c \leq ts + \gamma s + 2t$$

$$\iff \gamma s - t(4-s) \leq 2\gamma c \leq \gamma s + t(2+s)$$

$$\iff \frac{s}{2} - \frac{t(4-s)}{2\gamma} \leq c \leq \frac{s}{2} + \frac{t(2+s)}{2\gamma}$$

Como conclusión, p_1^* y p_2^* es un equilibrio de Nash cuando la característica c verifica la siguiente relación:

$$\frac{s}{2} - \frac{t}{2\gamma}(4-s) \ \le \ c \ \le \ \frac{s}{2} + \frac{t}{2\gamma}(2+s)$$

Por último, se verifica siempre que las condiciones de segundo orden en el punto crítico son negativas, como se ve a continuación:

$$\cdot \frac{\partial^2 B_1}{\partial^2 p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{p_2-p_1}{2tr} + \frac{(t+\gamma)s}{2t} - \frac{\gamma c}{t} + p_1\left(\frac{-1}{2tr}\right)\right) = -\frac{1}{tr}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 B_2}{\partial^2 p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(1 - \frac{p_2-p_1}{2tr} - \frac{(t+\gamma)s}{2t} + \frac{\gamma c}{t} + p_2\left(\frac{-1}{2tr}\right)\right) = -\frac{1}{tr}$$

Dado que $t > 0$ y $r > 0$ por hipótesis ($x_2 > x_1$), se cumple $\forall\, x_1, x_2$ que $\frac{\partial^2 B_1}{\partial^2 p_1} < 0$ y $\frac{\partial^2 B_2}{\partial^2 p_2} < 0$.

Anexo 3.5.- Demostración de la proposición 3.4.

Para encontrar el equilibrio en localización, se utiliza la condición de primer orden sobre las funciones de beneficio en equilibrio en precios bajo simetría:

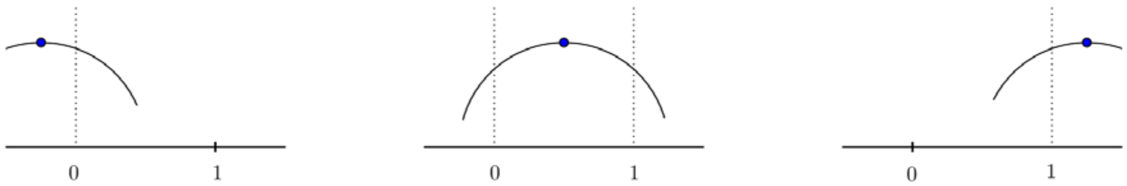
$$\frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = -\frac{2}{18t}\big(3t + \gamma(1-2c)\big)^2 - 2m(x_1 - c) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$x_1^* = c - \frac{\big(3t+\gamma(1-2c)\big)^2}{18mt}$$

$$\frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = \frac{2}{18t}\big(3t - \gamma(1-2c)\big)^2 - 2m(x_2 - c) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$x_2^* = c + \frac{\big(3t-\gamma(1-2c)\big)^2}{18mt}$$

Cada una de estas funciones puede alcanzar su valor máximo a la izquierda del intervalo $[0,1]$, dentro del mismo o a la derecha de él, tal y como se muestra en la figura:



Posición relativa de B_i *respecto al intervalo* $[0,1]$, *en función de la localización de su punto de máximo.* $i = 1, 2$

A continuación se determina el valor de máximo de cada una de estas funciones, $\underbrace{ArgMax}_{x_1}\ B_1^*$, $\underbrace{ArgMax}_{x_2}\ B_2^*$, para lo cual se procede a verificar las siguientes condiciones:

$$0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} \leq x_2^* \leq 1$$

Para la empresa 1:

$\cdot\, x_1^* \leq 0 \iff c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq 0 \iff$

$18cmt - (9t^2 + \gamma^2(1-2c)^2 + 6t\gamma(1-2c)) \leq 0 \iff$

$-4\gamma^2c^2 + c(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma) - (3t-\gamma)^2 \leq 0 \Rightarrow$

$c \in (-\infty, c_1] \cup [c_2, \infty)$, en donde

$c_1 = \frac{18mt+4\gamma^2-12t\gamma-\sqrt{(18mt+4\gamma^2-12t\gamma)^2-16\gamma^2(3t-\gamma)^2}}{8\gamma^2}$

$c_2 = \frac{18mt+4\gamma^2-12t\gamma+\sqrt{(18mt+4\gamma^2-12t\gamma)^2-16\gamma^2(3t-\gamma)^2}}{8\gamma^2}$

En este caso, $\underbrace{ArgMax}_{x_1}\ B_1^*(x_1, x_2) = 0 = x_{11}^E$

$\cdot\ 0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow\ 0 \leq c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq \frac{1}{2}\ \ \Leftrightarrow$

$0 \leq 18cmt - (9t^2 + \gamma^2(1-2c)^2 + 6t\gamma(1-2c))\ \ \Leftrightarrow$

$0 \leq -4\gamma^2c^2 + c(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma) - (3t-\gamma)^2\ \ \Leftrightarrow$

$c \in [c_1, c_2]$

$18cmt - \left(3t + \gamma(1-2c)\right)^2 \leq 9mt\ \ \Leftrightarrow$

$-4\gamma^2c^2 + c(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma) - (3t-\gamma)^2 - 9mt \leq 0\ \ \Leftrightarrow$

$c \in (-\infty, c_3] \cup [c_4, \infty)$, en donde

$c_3 = \frac{18mt+4\gamma^2-12t\gamma-\sqrt{(18mt+4\gamma^2-12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2+9tm)}}{8\gamma^2}$

$c_4 = \frac{18mt+4\gamma^2-12t\gamma+\sqrt{(18mt+4\gamma^2-12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2+9tm)}}{8\gamma^2}$

Con ambas restricciones, $c \in [c_1, c_2]\ \cap\ (-\infty, c_3] \cup [c_4, \infty)$, en este caso

$\underbrace{ArgMax}_{x_1}\ B_1^*(x_1, x_2) = x_1^* = x_{12}^E$

$\cdot \frac{1}{2} \leq x_1^*\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2} \leq c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt}\ \ \Leftrightarrow$

$9mt \leq 18cmt - \left(3t + \gamma(1-2c)\right)^2\ \ \Leftrightarrow$

$0 \leq -4\gamma^2c^2 + c(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma) - (3t-\gamma)^2 - 9mt\ \ \Leftrightarrow$

$c \in [c_3, c_4]$

En este caso, $\underbrace{ArgMax}_{x_1}\ B_1^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2} = x_{13}^E$

Para la empresa 2:

$\cdot\, x_2^* \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$

$18cmt + \left(3t - \gamma(1-2c)\right)^2 \leq 9mt \;\Leftrightarrow$

$4\gamma^2c^2 + c(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) + (3t-\gamma)^2 - 9mt \leq 0 \;\Leftrightarrow$

$c \in [c_5, c_6]$, en donde

$$c_5 = \frac{-(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)-\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-9tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_6 = \frac{-\left(18mt-4\gamma^2+12t\gamma\right)+\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-9tm)}}{8\gamma^2}$$

En este caso, $\underbrace{ArgMax}_{x_2}\; B_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2} = x_{21}^E$

$\cdot\, \frac{1}{2} \leq x_2^* \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq 1 \Leftrightarrow$

$9mt \leq 18cmt + \left(3t - \gamma(1-2c)\right)^2 \;\Leftrightarrow$

$0 \leq 4\gamma^2c^2 + c(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) + (3t-\gamma)^2 - 9mt \leq 0 \;\Leftrightarrow$

$c \in (-\infty, c_5] \cup [c_6, \infty)$

$18cmt + \left(3t - \gamma(1-2c)\right)^2 \leq 18mt \Leftrightarrow$

$4\gamma^2c^2 + c(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) + (3t-\gamma)^2 - 18mt \leq 0 \Leftrightarrow$

$c \in [c_7, c_8]$, en donde

$$c_7 = \frac{-(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)-\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-18tm)}}{8\gamma^2}$$

$$c_8 = \frac{-\left(18mt-4\gamma^2+12t\gamma\right)+\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-18tm)}}{8\gamma^2}$$

Con ambas restricciones, $c \in (-\infty, c_5] \cup [c_6, \infty) \cap [c_7, c_8]$, en este caso

$$\underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = x_2^* = x_{22}^E$$

$$\cdot\, 1 \leq x_2^* \Leftrightarrow 1 \leq c + \frac{\big(3t - \gamma(1-2c)\big)^2}{18mt} \Leftrightarrow$$

$$18mt \leq 18cmt + \big(3t - \gamma(1-2c)\big)^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 4\gamma^2 c^2 + c(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) + (3t - \gamma)^2 - 18mt \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty)$$

En este caso, $\underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = 1 = x_{23}^E$

Un primer análisis de las raíces obtenidas permite ordenar las mismas de menor a mayor, agrupadas en dos bloques principales, y establecer alguna relación más entre ellas, lo que va a permitir simplificar la casuística resultante a partir de este momento:

$$c_1 < c_3 < c_4 < c_2$$

$$c_7 < c_5 < c_6 < c_8$$

$$c_5 < c_3$$

$$c_7 < c_1$$

En lo sucesivo se utiliza la notación $\Delta c_{i,j} = c_i - c_j, \quad i, j = 1,2, \cdots, 8$ para hacer referencia a la diferencia entre dos raíces cualesquiera, con el objetivo de simplificar la exposición de los cálculos.

En total hay tres casos para cada empresa, en los que se toman los valores $\{0, x_1^*, \frac{1}{2}\}$ y $\{\frac{1}{2}, x_2^*, 1\}$ respectivamente para las empresas 1 y 2, de manera que al combinarlos para encontrar una localización de equilibrio, que se define por $\{x_1^E, x_2^E\}$, aparecen nueve casos de estudio que se presentan a continuación:

i. $x_1^* \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{11}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = 0$

$x_2^* \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{21}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

$x_{11}^E + x_{21}^E \neq 1 \quad \Rightarrow$

En este escenario no hay solución de equilibrio posible, ya que no se cumple la condición de simetría.

ii. $x_1^* \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \in [0, c_1] \cup [c_2, 1]$,
y en este caso, $x_{11}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = 0$

$x_2^* = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c + \frac{(3t - \gamma(1-2c))^2}{18mt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \{c_7, c_8\}$,

y en este caso, $x_{22}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = 1$

· $c = c_7$: dada la condición que se ha impuesto sobre x_1^*, $c \in (-\infty, c_1] \cup [c_2, \infty)$, se debe verificar que $c_7 \leq c_1$ o $c_7 \geq c_2$. Realizando los cálculos correspondientes se llega a que se verifica $c_7 < c_1 \ \forall\, m > 0, \gamma > 0, t > 0$. Entonces:

para $\gamma \leq 3t$, si $c_7 \in [0,1]$

para $3t \leq \gamma$, si $c_7 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

se tiene que $c = c_7$ es un valor para la característica del regulador bajo el cual existe equilibrio en localización, que viene dado por $x_{11}^E = 0$, $x_{22}^E = 1$.

· $c = c_8$: se ha de verificar de nuevo la condición sobre x_1^*, $c \in (-\infty, c_1] \cup [c_2, \infty)$, comprobando si $c_8 \leq c_1$ o $c_2 \leq c_8$:

$$c_8 \leq c_1 \;\Leftrightarrow\; \Delta c_{18} = c_1 - c_8 \geq 0, \text{ donde:}$$

$$\Delta c_{18} = 36mt - \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2} - \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t - \gamma)^2 - 18tm)}$$

En el caso de que se verifique dicha condición, se tiene que:

para $\gamma \leq 3t$, si $c_8 \in [0,1]$

para $3t \leq \gamma$, si $c_8 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

existe para $c = c_8$ equilibrio en localización, que viene dado por $x_{11}^E = 0$, $x_{22}^E = 1$.

$$c_2 \leq c_8 \;\Leftrightarrow\; \Delta c_{28} = c_2 - c_8 \leq 0, \text{ donde:}$$

$$\Delta c_{28} = 36mt - \frac{864m\gamma t^2}{\sqrt{(18mt+4\gamma^2-12t\gamma)^2-16\gamma^2(3t-\gamma)^2}+\sqrt{(18mt-4\gamma^2+12t\gamma)^2-16\gamma^2((3t-\gamma)^2-18tm)}}$$

En el caso de que se verifique dicha condición, se tiene que:

para $\gamma \leq 3t$, si $c_8 \in [0,1]$

para $3t \leq \gamma$, si $c_8 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

y si alguna de las dos alternativas se cumple, para $c = c_8$ existe equilibrio en localización, que viene dado por $x_{11}^E = 0$, $x_{22}^E = 1$.

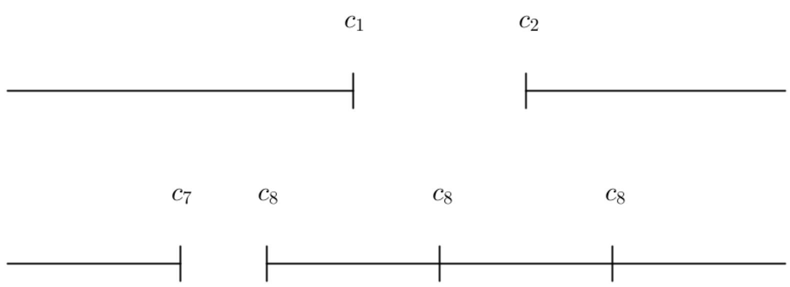
iii. $x_1^* \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \in (-\infty, c_1] \cup [c_2, \infty)$,

y en este caso, $x_{11}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = 0$

$$1 \leq x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq c + \frac{\left(3t - \gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty) \ ,$$

y en este caso, $x_{23}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_2} \ B_2^*(x_1, x_2) = 1$

Visto en el que caso ii. que $c_7 < c_1$, se dan tres configuraciones en base a la posición relativa de c_8 con respecto al intervalo $[c_1, c_2]$, tal y como queda representado en la figura:



Y a partir de estas tres posibles posiciones:

$c_8 \leq c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta c_{18} = c_1 - c_8 \geq 0$, en cuyo caso se tiene que,

para $\gamma \leq 3t, \ \forall c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, c_1] \cup [c_2, \infty) \ \cap \ [0,1]$

para $3t \leq \gamma, \ \forall c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, c_1] \cup [c_2, \infty) \ \cap \ \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

se verifica la existencia de equilibrio en localización, que viene dado por $x_{11}^E = 0$, $x_{23}^E = 1$.

$c_1 \leq c_8 \leq c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta c_{18} = c_1 - c_8 \leq 0 \ , \ \Delta c_{28} = c_2 - c_8 \geq 0$, en cuyo caso,

para $\gamma \leq 3t, \forall c \in (-\infty, c_7] \cup [c_2, \infty) \ \cap \ [0,1]$

para $3t \leq \gamma, \forall c \in (-\infty, c_7] \cup [c_2, \infty) \cap \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

se verifica la existencia de equilibrio en localización, que viene dado por $x_{11}^E = 0$, $x_{23}^E = 1$

$c_2 \leq c_8 \;\Leftrightarrow\; \Delta c_{28} = c_2 - c_8 \leq 0$, en cuyo caso se tiene que,

para $\gamma \leq 3t, \forall c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty) \cap [0,1]$

para $3t \leq \gamma, \forall c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty) \cap \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

se verifica la existencia de equilibrio en localización, que viene dado por $x_{11}^E = 0$, $x_{23}^E = 1$.

iv. $x_1^* = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \{c_3, c_4\}$,

y en este caso, $x_{12}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

$x_2^* \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c \in [c_5, c_6]$,

y en este caso, $x_{21}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

Pero este caso no es viable puesto que supone una caracterización del equilibrio de Bertrand, en el que ambas empresas se localizan en el centro del mercado, con diferenciación nula, lo que deriva en unos precios iguales a cero, y por tanto en beneficios nulos para las empresas.

v. $0 \leq x_1^* \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$c \in [c_1, c_2] \cap (-\infty, c_3] \cup [c_4, \infty)$

y en este caso, $x_{12}^{E} = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = x_1^*$

$\frac{1}{2} \leq x_2^* \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$

$c \in (-\infty, c_5] \cup [c_6, \infty) \cap [c_7, c_8]$,

y en este caso, $x_{22}^{E} = \underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = x_2^*$

En virtud de las relaciones entre las raíces, las condiciones sobre x_1^* , x_2^* se reducen respectivamente a $c \in [c_1, c_3] \cup [c_4, c_2]$, $c \in [c_7, c_5] \cup [c_6, c_8]$. Luego la condición total sobre la característica del regulador queda en este caso expresada como:

$$c \in ([c_1, c_3] \ \cup \ [c_4, c_2]) \ \cap \ ([c_7, c_5] \ \cup \ [c_6, c_8])$$

Corolario 1.- La condición de simetría se verifica exclusivamente en el punto $c = \frac{1}{2}$.

$$x_1^* + x_2^* = c - \frac{\left(3t + \gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} + c + \frac{\left(3t - \gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} =$$

$$2c + \frac{\left(3t - \gamma(1-2c)\right)^2 - \left(3t + \gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} =$$

$$2c + \frac{9t^2 + \gamma^2(1-2c)^2 - 6t\gamma(1-2c) - \left(9t^2 + \gamma^2(1-2c)^2 + 6t\gamma(1-2c)\right)}{18mt} =$$

$$2c - \frac{12t\gamma(1-2c)}{18mt} = 2c - \frac{2\gamma(1-2c)}{3m} = 2c - \frac{2\gamma - 4\gamma c}{3m}$$

Imponiendo la condición $x_1^* + x_2^* = 1$:

$$2c - \frac{2\gamma - 4\gamma c}{3m} = 1 \ ;$$

$$6cm - 2\gamma + 4\gamma c = 3m \ ;$$

$$c(6m + 4\gamma) = 3m + 2\gamma \;;$$

$$c = \frac{3m + 2\gamma}{6m + 4\gamma} = \frac{1}{2}$$

q.e.d.

Anexo 3.6.- $c = \frac{1}{2} \in \left([c_1, c_3] \cup [c_4, c_2]\right) \cap \left([c_7, c_5] \cup [c_6, c_8]\right)$

1) $c_1 \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma - \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2}}{8\gamma^2} \leq \frac{1}{2} \;;$$

$$18mt - 12t\gamma \leq \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2} \;;$$

$$(18mt)^2 + (12t\gamma)^2 - 36mt \cdot 12t\gamma \leq (18mt)^2 + (4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 + 36mt(4\gamma^2 - 12t\gamma) - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2 \;;$$

$$0 \leq \gamma^2 - 6t\gamma + 9mt - (9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma) \;;$$

$$9t^2 \leq 9mt \;;$$

$$t \leq m$$

2) $\frac{1}{2} \leq c_2$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma + \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2}}{8\gamma^2} \;;$$

$$12t\gamma - 18mt \leq \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2} \;;$$

$$(12t\gamma)^2 + (18mt)^2 - 36mt \cdot 12t\gamma \leq (18mt)^2 + (4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 + 36mt(4\gamma^2 - 12t\gamma) - 16\gamma^2(3t - \gamma)^2 \;;$$

$$0 \leq \gamma^2 - 6t\gamma + 9mt - (9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma) \;;$$

$$0 \leq mt - t^2 \;;$$

$$t \leq m$$

Ambas comprobaciones arrojan la misma condición sobre los parámetros de coste de transporte y multa del regulador:

$$c = \frac{1}{2} \in [c_1, c_2] \iff t \leq m$$

Esta condición sobre los parámetros coincide con la encontrada en el caso de consumidores miopes.

3) $\frac{1}{2} \leq c_3$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma - \sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 + 9tm)}}{8\gamma^2} \; ;$$

$$\sqrt{(18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 + 9tm)} \leq 18mt - 12t\gamma \; ;$$

$$(18mt)^2 + (4\gamma^2 - 12t\gamma)^2 + 36mt(4\gamma^2 - 12t\gamma) - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 + 9tm) \\ \leq (18mt)^2 + (12t\gamma)^2 - 36mt \cdot 12t\gamma \; ;$$

$$16\gamma^4 - 96t\gamma^3 + 36mt(4\gamma^2) - 16\gamma^2(9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma + 9tm) \leq 0 \; ;$$

$$\gamma^2 - 6t\gamma + 9mt - (9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma + 9tm) \leq 0 \; ;$$

$$0 \leq t$$

Siempre cierto, ya que la condición es redundante, lo que implica que se cumple en toda configuración de los parámetros del modelo.

4) $c_4 \leq \frac{1}{2}$

Nunca es cierto, dado que $c_3 < c_4$, la condición no se verifica para ninguna configuración de los parámetros del modelo.

En resumen:

$$c = \frac{1}{2} \in [c_1, c_3] \Leftrightarrow t \leq m$$

5) $\frac{1}{2} \leq c_5$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{-(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) - \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm)}}{8\gamma^2} ;$$

$$4\gamma^2 \leq -(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) - \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm)} ;$$

$$0 \leq -18mt - 12t\gamma - \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm)} ;$$

Nunca se cumple ya que el lado derecho de la desigualdad es siempre un número negativo, dados $m > 0$, $t > 0$, $\gamma > 0$.

6) $c_6 \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{-(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) + \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm)}}{8\gamma^2} \leq \frac{1}{2} ;$$

$$-18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma + \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm)} \leq 4\gamma^2 ;$$

$$\sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm)} \leq 18mt + 12t\gamma ;$$

$$(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t-\gamma)^2 - 9tm) \leq (18mt + 12t\gamma)^2 ;$$

$$(18mt - 4\gamma^2)^2 + (12t\gamma)^2 + 2(18mt - 4\gamma^2)12t\gamma - 16\gamma^2(9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma - 9tm) \leq (18mt)^2 + (12t\gamma)^2 + 36mt12t\gamma ;$$

$$16\gamma^4 - 36mt4\gamma^2 + 2(-4\gamma^2)12t\gamma - 16\gamma^2(9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma - 9tm) \leq 0 ;$$

$$\gamma^2 - 9mt - 6t\gamma - (9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma - 9tm) \leq 0 ;$$

$$-(9t^2) \leq 0$$

Cierto siempre. Se tiene

$$c = \frac{1}{2} \in [c_6, c_8]$$

7) $\frac{1}{2} \leq c_8$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{-(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma) + \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t - \gamma)^2 - 18tm)}}{8\gamma^2} ;$$

$$4\gamma^2 \leq -18mt + 4\gamma^2 - 12t\gamma + \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t - \gamma)^2 - 18tm)} ;$$

$$18mt + 12t\gamma \leq \sqrt{(18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t - \gamma)^2 - 18tm)} ;$$

$$(18mt + 12t\gamma)^2 \leq (18mt - 4\gamma^2 + 12t\gamma)^2 - 16\gamma^2((3t - \gamma)^2 - 18tm) ;$$

$$(18mt)^2 + (12t\gamma)^2 + 36mt12t\gamma \leq (18mt - 4\gamma^2)^2 + (12t\gamma)^2 + 2(18mt - 4\gamma^2)12t\gamma - 16\gamma^2((3t - \gamma)^2 - 18tm) ;$$

$$0 \leq 16\gamma^4 - 36mt4\gamma^2 + 2(-4\gamma^2)12t\gamma - 16\gamma^2(9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma - 18tm) ;$$

$$0 \leq \gamma^2 - 9mt - 6t\gamma - (9t^2 + \gamma^2 - 6t\gamma - 18tm) ;$$

$$0 \leq 9mt - (9t^2) ;$$

$$t \leq m$$

De nuevo aparece la condición sobre los parámetros de coste de transporte y multa del regulador:

$$c = \frac{1}{2} \in [c_6, c_8] \iff t \leq m$$

En definitiva, $c = \frac{1}{2}$ pertenece al intervalo de restricciones basado en las soluciones si y sólo si se cumple la misma condición que se pedía sobre los parámetros del modelo en el caso de los consumidores miopes.

vi. $0 = x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad 0 = c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c = \{c_1, c_2\}$

y en este caso, $x_{12}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = 0$

$1 \leq x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty)$,

y en este caso, $x_{23}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_2} \ B_2^*(x_1, x_2) = 1$

· $c = c_1$: dada la condición que se ha impuesto sobre x_2^*, $c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty)$, se debe verificar que $c_1 \leq c_7$ o $c_8 \leq c_1$. Pero como se vio en el apartado ii., se verifica $c_7 < c_1 \ \forall \, m > 0, \gamma > 0, t > 0$ Entonces sólo queda comprobar la segunda alternativa, también estudiada en ese mismo apartado:

$c_8 \leq c_1$ si y sólo si $\Delta \mathrm{c}_{18} = c_1 - c_8 \geq 0$,

Ahora, si se verifica alguna de las dos alternativas:

para $\gamma \leq 3t$, si $c_1 \in [0,1]$

para $3t \leq \gamma$, si $c_1 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

se tiene que para $c = c_1$ existe equilibrio en localización, dado por $x_{12}^E = 0$, $x_{23}^E = 1$.

· $c = c_2$: dada la condición que se ha impuesto sobre x_2^*, $c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty)$, se debe verificar que $c_2 \leq c_7$ o $c_8 \leq c_2$. Pero como consecuencia de la relación expuesta para c_1, se verifica $c_7 < c_2 \ \forall \, m > 0, \gamma > 0, t > 0$. Entonces sólo queda comprobar la segunda alternativa, también estudiada previamente:

$c_8 \leq c_2 \ \Leftrightarrow \ \Delta \mathrm{c}_{28} = c_2 - c_8 \geq 0$

Y si se cumple alguna de las dos alternativas:

para $\gamma \leq 3t$, si $c_2 \in [0,1]$

para $3t \leq \gamma$, si $c_2 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{t}{\gamma}\right]$

se verifica la existencia de equilibrio en localización, que viene dado por $x_{12}^{E} = 0$, $x_{23}^{E} = 1$.

vii. $\frac{1}{2} \leq x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c \in [c_3, c_4]$

y en este caso, $x_{13}^{E} = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

$x_2^* \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c \in [c_5, c_6]$,

y en este caso, $x_{21}^{E} = \underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$.

Este caso, al igual que sucede en el caso iv., no es viable puesto que supone una caracterización del equilibrio de Bertrand, en el que ambas empresas se localizan en el centro del mercado, con diferenciación nula, lo que deriva en unos precios iguales a cero, y por tanto en beneficios nulos para las empresas.

viii. $\frac{1}{2} \leq x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c \in [c_3, c_4]$

y en este caso, $x_{13}^{E} = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \{c_5, c_6\}$,

y en este caso, $x_{22}^{E} = \underbrace{ArgMax}_{x_2} B_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

Caso no factible debido a que caracteriza una solución de Bertrand.

ix. $\frac{1}{2} \leq x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq c - \frac{\left(3t+\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c \in [c_3, c_4]$

y en este caso, $x_{13}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_1} B_1^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

$1 \leq x_2^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq c + \frac{\left(3t-\gamma(1-2c)\right)^2}{18mt} \quad \Leftrightarrow \quad c \in (-\infty, c_7] \cup [c_8, \infty)$,

y en este caso, $x_{23}^E = \underbrace{ArgMax}_{x_2} \; B_2^*(x_1, x_2) = 1$

En este escenario no hay solución de equilibrio posible, ya que no se cumple la condición de simetría, $x_{13}^E + x_{23}^E \neq 1$.

4. Capítulo IV - Regulación medioambiental social en un modelo lineal de localización

En este capítulo se analiza un modelo de duopolio *à la Hotelling* con zonificación asimétrica, considerando coste de transporte cuadrático. El regulador ha de determinar el tamaño óptimo de una zona verde situada en uno de los extremos de la ciudad lineal, mediante la optimización de una función medioambiental-social, combinación lineal de los intereses de empresas y consumidores. Los resultados muestran que, cuando el regulador no otorga ningún peso en la función objetivo a los consumidores, la zona verde no llega a existir; mientras dicho peso se mantiene por debajo de una cantidad determinada, $\tilde{\lambda}$, la optimización se alcanza en los extremos del espacio de mercado (o bien todo es zona verde, o bien esta no existe); por último, según aumenta la importancia que tiene el bienestar de los consumidores desde la cantidad $\tilde{\lambda}$, y siempre que la externalidad negativa surgida de la congestión poblacional sea menor que el efecto positivo que supone al conjunto de la sociedad la existencia de una zona verde, el tamaño de esta va aumentando, en función de los parámetros de transporte, congestión y mejora medioambiental.

4.1 Introducción

La investigación en modelos de competencia espacial surgida a partir de la aparición del trabajo de Hotelling en 1929 desarrolla una amplia casuística, que ha perseguido plasmar toda posible realidad económica derivada de situaciones de duopolio en un mercado.

En la misma perspectiva de los trabajos mencionados anteriormente, se estudia aquí un modelo de diferenciación espacial con un componente de regulación representado por una autoridad local que se guía por objetivos de bienestar medioambiental para el conjunto de los habitantes, haciendo radicar este interés medioambiental social en la plausible implantación de un área verde que permita mejorar las condiciones de salud y ocio de los habitantes de la ciudad. En este orden de prioridades, la autoridad reguladora persigue encontrar el equilibrio que optimice el beneficio derivado de los intereses de los habitantes por una mejora medioambiental y social, y los intereses de las empresas por maximizar el resultado de su actividad comercial.

Este planteamiento queda plasmado por medio del siguiente modelo: se considera un regulador encargado de diseñar una ciudad con dos regiones diferentes, la primera de ellas, tipificada como zona verde, en donde no queda permitida ni la residencia ni la actividad comercial; la segunda, zona residencial comercial, en donde conviven empresas e individuos. Las empresas producen un mismo bien homogéneo con coste de producción cero (sin pérdida de generalidad). Se supone que los consumidores se distribuyen uniformemente a lo largo del espacio de mercado e incurren en costes de transporte de tipo cuadrático cuando se dirigen a adquirir el producto. Considerando que el regulador toma las decisiones en beneficio de los consumidores y de las empresas, se define como función de bienestar social una combinación lineal ponderada del beneficio de las empresas y la utilidad de los consumidores. El propósito del regulador es maximizar dicha función con diferentes pesos asociados a cada uno de sus componentes.

Para identificar con más claridad la contribución de este trabajo en relación con la literatura de regulación sobre competencia espacial, el estudio desarrollado aquí se centra en dos objetivos principales:

- establecer cuál es el tamaño óptimo de la zona verde, lo que equivale a determinar el tamaño óptimo del área ‘comercial’ en donde conviven consumidores y empresas, y que se concreta mediante la maximización de la función de bienestar medioambiental social;

- comparar los diferentes valores del tamaño óptimo de zona verde obtenidos en función de los parámetros que intervienen en el modelo, con el fin de determinar cómo debe ser la respuesta del regulador a las distintas realidades de costes y beneficios que se presentan desde la modelización de la mejora medioambiental y la congestión poblacional.

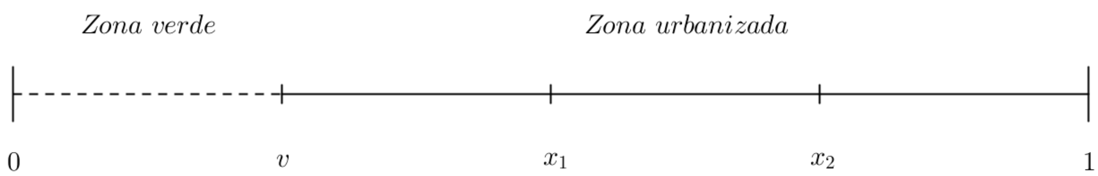
Para ello se analiza el comportamiento del regulador y de las empresas considerando un juego en tres etapas en el que, en la primera etapa, el regulador elige la dimensión ideal del área medioambiental social; en la segunda etapa, las empresas escogen una localización dentro del área de actividad residencial y comercial; y por último, en la tercera etapa, las empresas compiten en precios. El juego se resuelve mediante el clásico método de inducción hacia atrás, resolviendo el equilibrio en precios en primer lugar, para a continuación resolver el equilibrio en localización y por último realizar el cálculo de la maximización de la función de bienestar para encontrar el tamaño óptimo de la zona verde.

Con todo ello, la estructura del estudio se compone de una exposición detallada del modelo y del método de resolución, el planteamiento de la situación de demanda a partir de la modelización de la utilidad de los consumidores, la resolución de los equilibrios en precio y en localización, y la optimización de la función de bienestar, para concluir exponiendo las implicaciones de cada una de las políticas que puede seguir la autoridad reguladora, en cuanto a que su sesgo puede estar más orientado a priorizar los intereses de los habitantes de la ciudad, en su papel de consumidores, o los intereses de las empresas, en su papel de agentes comerciales y económicos. A modo de anexo se adjunta el proceso de cálculo de resolución de los distintos modelos que aparecen en el trabajo.

4.2 Modelo lineal con área medioambiental

En el presente capítulo se presenta un modelo de duopolio *à la Hotelling* con la incorporación de una zona verde. Se toma como espacio geográfico una ciudad lineal de longitud la unidad, representada por el intervalo $[0,1]$, que un regulador persigue reorganizar mediante la delimitación de una zona verde de longitud $v \in [0,1)$, estrictamente menor que todo el espacio, en la que todas las actividades comerciales pasan a estar prohibidas. La responsabilidad de este regulador local es determinar el tamaño óptimo de la región verde, v^*.

Formalmente la configuración del espacio se presenta de la siguiente manera: la ciudad lineal se divide en dos zonas, una, considerada de ocio y mejora medioambiental o zona verde, representada por el intervalo $[0, v)$, y la otra, tipificada como zona residencial y comercial, representada por $[v, 1]$. De esta manera, en esta última región $[v, 1]$ conviven empresas y consumidores. Se establece un mercado con dos empresas en el que N consumidores están distribuidos uniformemente a lo largo del espacio. Se denota por x_1, x_2 la localización de cada una de las dos empresas y se asume que una de ellas está situada a la izquierda de la otra, sin pérdida de generalidad, $x_1 \leq x_2$.



Así mismo, se denota por x la localización de un consumidor arbitrario, y por $d_i(x)$ la distancia del consumidor x a la empresa $i = 1, 2$, que viene dada por

$$d_i(x) = d(x, x_i) = |\ x - x_i\ |, \qquad i = 1, 2$$

La única diferencia entre empresas es su localización, dado que estas venden un mismo bien homogéneo con coste de producción igual a cero. Se postula que, al adquirir el bien, los consumidores pagan el coste de transporte asociado, que se representa mediante una función cuadrática con parámetro de coste de transporte $t > 0$:

$$T_i(x) = td_i^2(x) = td^2(x, x_i) = t(x - x_i)^2, \qquad i = 1{,}2$$

Se denota por p_1, p_2 el precio de cada una de las dos empresas, y por $\bar{u}$ el excedente bruto de cualquier consumidor (en este caso, el excedente bruto $\bar{u}$ representa la máxima disponibilidad a pagar de un consumidor). Se asume que $\bar{u}$ es lo suficientemente grande para que el mercado esté cubierto, es decir, para que todos los consumidores del intervalo puedan realizar adquisiciones de los productos de ambas empresas.

A continuación se define la utilidad de un consumidor arbitrario como una función que tiene en cuenta los efectos de la aparición de una zona verde en el mercado. Conforme la región medioambiental o área verde impuesta por el regulador se hace más grande, los beneficios directos que esta puede aportar aumentan (aire limpio, espacios abiertos de ocio), pero a su vez se reduce el espacio habitable para los consumidores, lo que conlleva un aumento de la congestión poblacional, con los perjuicios que ello implica. Todo ello obliga al regulador a tomar un perfil *político*, premiando más unos criterios sobre otros, o buscando el equilibrio entre los mismos. Para modelizar esta situación se formula la expresión de la función de utilidad como sigue:

$$u(v, x, x_i) = \alpha v + \beta \frac{(1 - v)}{N} + \big(\bar{u} - p_i - T_i(x)\big), \qquad i = 1{,}2$$

en donde:

· $\alpha v,\ \alpha \geq 0$, representa el efecto de la externalidad positiva de la zona verde para los consumidores, derivada de la mejora medioambiental. Es creciente en v.

· $\beta \frac{(1-v)}{N},\ \beta \geq 0$, representa la externalidad negativa que surge debido a la concentración de la población en el espacio urbanizado $[v, 1]$. Es decreciente en v y en N, esto es, un mayor espacio verde supone menos espacio residencial, lo que conlleva una mayor congestión poblacional, el mismo efecto que se obtiene cuando se incrementa el número de habitantes.

· $\bar{u} - p_i - T_i(x)$ representa la utilidad *indirecta* que obtiene el consumidor al adquirir un bien de la empresa i, siendo $\bar{u}$ el precio de reserva de los consumidores y p_i el precio que ha pagado por dicho bien.

El modelo recién descrito da lugar a un juego en tres etapas, en el que, en la primera etapa, la autoridad local o regulador elige el tamaño de la zona verde, v; en una segunda etapa las empresas eligen simultáneamente sus localizaciones; y, por último, en la tercera etapa las empresas escogen simultáneamente sus precios. Se utiliza para la resolución del modelo el método de inducción hacia atrás.

En la tercera etapa del modelo, las empresas eligen simultáneamente sus precios, tomando como fijos los valores del tamaño de la zona verde, v, elegido previamente por el regulador en la primera etapa, y de sus localizaciones, x_1, x_2, escogidas por las empresas en la segunda etapa. Para determinar los valores de los precios, se resuelve el equilibrio de Nash en precios solucionando el problema $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{P}_1: \quad \underbrace{max}_{p_1}\ B_1(p_1, p_2, x_1, x_2, v) \quad , \quad \underbrace{max}_{p_2}\ B_2(p_1, p_2, x_1, x_2, v)$$

en donde $B_i(p_1, p_2) = p_i D_i,\ i = 1{,}2$ son las funciones de beneficio de cada una de las empresas.

En el caso en el que el problema $\mathcal{P}_1$ tiene solución única, sea $p_1^*(x_1, x_2, v)$, $p_2^*(x_1, x_2, v)$ el equilibrio en precios hallado en la tercera etapa, y tomando fijo el valor del tamaño de la zona verde, elegido por el regulador en la primera etapa, se resuelve el problema $\mathcal{P}_2$ para calcular el equilibrio de Nash en localización correspondiente a la segunda etapa del modelo:

$$\mathcal{P}_2: \quad \underbrace{max}_{x_1} \; B_1(p_1^*, p_2^*, x_1, x_2, v) \quad , \quad \underbrace{max}_{x_2} \; B_2(p_1^*, p_2^*, x_1, x_2, v)$$

Por último, y en el caso en el que el problema $\mathcal{P}_2$ tiene solución única, existiendo por tanto equilibrio de Nash en localización, que se denota por (x_1^*, x_2^*), se procede a resolver el problema $\mathcal{P}_3$ correspondiente a la primera etapa del modelo, en la que el regulador optimiza el tamaño de la zona verde medioambiental maximizando la función de bienestar que se establece para el mismo:

$$\mathcal{P}_3: \quad \underbrace{max}_{v} \, \Psi(v)$$

La autoridad reguladora toma la decisión de implantación de un área medioambiental buscando el beneficio de ciudadanos y empresas. Para ello evalúa una función de bienestar medioambiental social estándar, similar a las utilizadas en la literatura de zonificación en un marco de competencia espacial como el de este modelo, a saber, una combinación lineal de la utilidad de los consumidores y el beneficio de las empresas. Esta función de bienestar tiene por tanto en cuenta intereses de empresas y consumidores, y revela el perfil político del regulador, según el peso que este otorgue a cada uno de los componentes de la misma. Se define así la función de bienestar del regulador como:

$$\Psi(v) = \lambda U^*(v) + (1 - \lambda) B^*(v)$$

en donde

· $U^*(v)$ es la utilidad de todos los consumidores,

$$U^*(v) = \frac{N}{1-v}\left(\int_v^{\hat{x}} u(v,x,x_1^*)dx + \int_{\hat{x}}^1 u(v,x,x_2^*)dx\right)$$

· $B^*(v)$ es el beneficio total de las empresas,

$$B^*(v) = B_1^*(v) + B_2^*(v)$$

· λ es el peso atribuido a la utilidad de los consumidores, $0 \leq \lambda \leq 1$,

· $1-\lambda$ es el peso atribuido al beneficio total de las empresas.

A partir de esta caracterización de la utilidad de los consumidores es cuando se impone la limitación sobre el tamaño de la zona verde, que no podrá alcanzar en ningún caso el tamaño total del mercado y estará por tanto definida como $v \in [0,1)$, asumiendo que v no puede tomar el valor 1 puesto que ello derivaría en una indeterminación al dividir por 0.

4.3 Análisis de demanda y cálculo de equilibrios

Con el fin de determinar los clientes de cada una de las empresas, se calcula la demanda con la que estas pueden contar en función de sus decisiones estratégicas en precio y localización, y para ello se procede a calcular el punto del mercado que representa un *consumidor indiferente* en base a su función de utilidad, aquél para el que consumir de la empresa 1 o de la empresa 2 resulta de un mismo valor de utilidad o coste de oportunidad. En el caso en el que las empresas pongan en el mercado sus productos a un mismo precio, p, cada consumidor se decidirá por la empresa que esté más próxima a su localización, ya que el único coste en el que incurre a la hora de realizar la adquisición es el de transporte. Pero cuando los precios de las empresas sean diferentes, p_1, p_2, su elección se verá decantada hacia la empresa que le suponga una mayor utilidad. De esta manera, el consumidor indiferente estará situado en el punto en el que la función de utilidad bajo las empresas 1 y 2 coincida:

$$u(v,x,x_1) = u(v,x,x_2)$$

esto es,

$$\alpha v + \beta \frac{(1-v)}{N} + \left(\bar{u} - p_1 - T_1(x)\right) = \alpha v + \beta \frac{(1-v)}{N} + \left(\bar{u} - p_2 - T_2(x)\right)$$

lo que lleva a la solución

$$t(x - x_1)^2 - t(x - x_2)^2 = p_2 - p_1$$

$$2tx(x_2 - x_1) = p_2 - p_1 + t(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\hat{x} = \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 + x_1}{2}$$

A partir de aquí, un consumidor cualquiera x va a elegir la empresa 1 cuando

$$u(v, x, x_1) > u(v, x, x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 + x_1}{2}$$

y alternativamente elegirá a la empresa 2 cuando

$$u(v, x, x_1) < u(v, x, x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 + x_1}{2} < x$$

En función del valor que tome la diferencia de precios en cada caso, el consumidor indiferente se localizará respectivamente a la izquierda del mercado, dentro del mercado o a la derecha del mismo, y así se puede establecer un intervalo para $p_2 - p_1$ que caracteriza cada una de estas regiones:

$\cdot\ \hat{x} < v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 + x_1}{2} < v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} < v - \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$$p_2 - p_1 < 2vt(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\hat{x} < v \quad \Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 \in I_0 = \left(-\infty, 2vt(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2)\right)$$

$\cdot\ v \leq \hat{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 + x_1}{2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$

$$v - \frac{x_2+x_1}{2} \leq \frac{p_2-p_1}{2t(x_2-x_1)} \leq 1 - \frac{x_2+x_1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2vt(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2) \leq p_2 - p_1 \leq 2t(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2)$$

$$v \leq \hat{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 \in I_1$$
$$= [2vt(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2), 2t(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2)]$$

$$\cdot\, 1 < \hat{x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{p_2-p_1}{2t(x_2-x_1)} + \frac{x_2+x_1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{p_2-p_1}{2t(x_2-x_1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$2t(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2) < p_2 - p_1$$

$$1 < \hat{x} \quad \Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 \in I_2 = (2t(x_2 - x_1) - t(x_2^2 - x_1^2), \infty)$$

Cuando $p_2 - p_1 \in I_1$, es decir, el consumidor indiferente está situado en la zona urbanizada, la demanda de consumidores se reparte entre las dos empresas. En los otros dos casos, la demanda se acumulará totalmente en una de las dos empresas: cuando $p_2 - p_1 \in I_0$, todos los clientes elegirán la empresa 2; por el contrario, si $p_2 - p_1 \in I_2$, la empresa 1 obtendrá toda la demanda del mercado.

Por simplicidad en los resultados, se utiliza en lo sucesivo un cambio de variable para denotar la localización de las empresas:

$$s = x_2 + x_1 \quad , \quad r = x_2 - x_1$$

verificando $r \geq 0$, ya que por hipótesis de inicio, $x_1 \leq x_2$ $\left(x_1 = \frac{s-r}{2}, x_2 = \frac{s+r}{2} \right)$. Los intervalos para la diferencia de precios se expresan ahora:

$$I_0 = (-\infty, 2vtr - tsr)$$

$$I_1 = [2vtr - tsr, 2tr - tsr]$$

$$I_2 = (2tr - tsr, \infty)$$

Una vez aplicado este cambio de variables, la expresión del consumidor indiferente, las funciones de demanda, $D_i,\ i = 1{,}2$, y las funciones de beneficio de cada empresa, $B_i = p_i D_i,\ i = 1{,}2$, se formulan como sigue:

$$\hat{x} = \frac{p_2 - p_1}{2tr} + \frac{s}{2}$$

$$D_1(p_1, p_2, s, r, v) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 - p_1 \in I_0 \\ \left(\dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{s}{2} - v\right)\dfrac{N}{1-v} & si \quad p_2 - p_1 \in I_1 \\ N & si \quad p_2 - p_1 \in I_2 \end{cases}$$

$$D_2(p_1, p_2, s, r, v) = \begin{cases} N & si \quad p_2 - p_1 \in I_0 \\ \left(1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{s}{2}\right)\dfrac{N}{1-v} & si \quad p_2 - p_1 \in I_1 \\ 0 & si \quad p_2 - p_1 \in I_2 \end{cases}$$

$$B_1(p_1, p_2, s, r, v) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 - p_1 \in I_0 \\ p_1\left(\dfrac{p_2 - p_1}{2tr} + \dfrac{s}{2} - v\right)\dfrac{N}{1-v} & si \quad p_2 - p_1 \in I_1 \\ p_1 N & si \quad p_2 - p_1 \in I_2 \end{cases}$$

$$B_2(p_1, p_2, s, r, v) = \begin{cases} p_2 N & si \quad p_2 - p_1 \in I_0 \\ p_2\left(1 - \dfrac{p_2 - p_1}{2tr} - \dfrac{s}{2}\right)\dfrac{N}{1-v} & si \quad p_2 - p_1 \in I_1 \\ 0 & si \quad p_2 - p_1 \in I_2 \end{cases}$$

A la vista de las funciones de demanda y beneficio recién obtenidas, se aprecia que el valor de la diferencia de precios entre ambas empresas determina el reparto del mercado entre las mismas:

· si el precio de la empresa 2 es mucho menor que el precio de la empresa 1, $p_2 - p_1$ toma un valor muy pequeño, en concreto, suficientemente menor como para que $p_2 < p_1 + 2vtr - trs$, y entonces el valor de $p_2 - p_1$ es tan pequeño como para situarse en el intervalo I_0, en el que toda la demanda queda en manos de la empresa 2;

· si el precio de la empresa 2 y el precio de la empresa 1 están equilibrados, de manera que su diferencia se mantiene dentro del intervalo I_1, es decir, p_2 está contenido en un intervalo alrededor de p_1, que es $p_1 + 2vtr - trs \leq p_2 \leq p_1 + 2tr - trs$, se tiene que la demanda del mercado se reparte entre ambas empresas, según la siguiente expresión algebraica: $D_1 = \hat{x} - v$, $D_2 = 1 - \hat{x}$;

· por último, si el precio de la empresa 2 es mucho mayor que el precio de la empresa 1, $p_2 - p_1$ toma un valor muy grande, en particular suficientemente grande como para que $p_1 + 2tr - trs < p_2$, y entonces el valor de $p_2 - p_1$ se sitúa en el intervalo I_2, en el que toda la demanda queda en manos de la empresa 1.

4.3.1 Equilibrio de Nash en precios

Una vez formuladas las expresiones de las funciones de beneficio de las empresas, se procede a la resolución de la tercera etapa del juego, el problema $\mathcal{P}_1$: dado el tamaño de la zona verde, v, y las localizaciones de las empresas, x_1, x_2, se calculan los precios de equilibrio de Nash, p_1^* y p_2^*.

Proposición 4.1.- Dada una zona verde longitud v, tal que $0 \leq v < 1$, y un par de localizaciones de las empresas, x_1, x_2, tales que $v \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, el equilibrio de Nash en precios viene dado por:

$$p_1^* = \frac{1}{3}tr(2 + s - 4v) \qquad , \qquad p_2^* = \frac{1}{3}tr(4 - s - 2v)$$

Demostración: anexo 4.1.

Observaciones

1.- Bajo equilibrio de Nash en precios, la expresión del consumidor indiferente, las funciones de demanda, $D_i,\ i=1{,}2$, y las funciones de beneficio, $B_i=p_iD_i,\ i=1{,}2$, se formulan como sigue, conocido ya en el anexo el resultado de que la diferencia de precios en equilibrio pertenece al intervalo I_1:

$$\hat{x}^*=\frac{1}{6}(2+s+2v)$$

$$D_1(p_1^*,p_2^*,s,r,v)=D_1^*(s,r,v)=\frac{1}{6}(2+s-4v)\frac{N}{1-v}$$

$$D_2(p_1^*,p_2^*,s,r,v)=D_2^*(s,r,v)=\frac{1}{6}(4-s-2v)\frac{N}{1-v}$$

$$B_1(p_1^*,p_2^*,s,r,v)=B_1^*(s,r,v)=\frac{tr}{18}(2+s-4v)^2\frac{N}{1-v}$$

$$B_2(p_1^*,p_2^*,s,r,v)=B_2^*(s,r,v)=\frac{tr}{18}(4-s-2v)^2\frac{N}{1-v}$$

2.- Los precios de equilibrio dependen del tamaño de la zona verde, v, de la localización de las empresas, x_1, x_2, y del coeficiente de coste de transporte, t.

2.1.- Cuanto mayor es el coeficiente de coste de transporte, el coste de los desplazamientos resulta más elevado para los consumidores, los precios de adquisición son mayores, y todo ello deriva en una disminución de la competencia entre precios. Por tanto, se puede concluir que t mide el grado de intensidad de la competencia, y así, cuando $t\to 0$ se intensifica la rivalidad entre empresas, de manera que en el límite, $t=0$, la solución se corresponde con la solución *à la Bertrand*, en la que los precios son nulos.

2.2.- En el supuesto en el que las localizaciones de las empresas están en situación de mínima diferenciación, de nuevo aumenta fuertemente la competencia entre empresas, de modo que, en el límite, $r = 0$, cuando la localización de las empresas coincide, los precios se igualan a cero, manteniendo demandas positivas y obteniendo beneficios nulos, de nuevo la solución límite de Bertrand.

4.3.2 Equilibrio de Nash en localización

Una vez encontrado el equilibrio en precios p_1^*, p_2^* que resuelve el problema $\mathcal{P}_1$, se procede a determinar el equilibrio de Nash en localización, x_1^*, x_2^*, resolviendo el problema $\mathcal{P}_2$ en el que las empresas escogen sus localizaciones óptimas simultáneamente, incorporando las funciones de beneficio obtenidas en el equilibrio en precios, B_1^*, B_2^*.

Proposición 4.2.- Dada una zona verde de tamaño v, existe un único equilibrio de Nash en localización, que viene dado por:

$$x_1^* = v \qquad , \qquad x_2^* = 1$$

Demostración: anexo 4.2.

Observaciones

1.- Una vez obtenido el equilibrio en localización, el cambio de variable utilizado lleva a la formulación en equilibrio $r^* = 1 - v$, $s^* = 1 + v$, y la expresión de los distintos elementos que intervienen en el problema, consumidor indiferente, precios de equilibrio, funciones de demanda y de beneficio, queda como sigue:

$$\hat{x}^{*L} = \frac{1}{2}(1 + v)$$

$$p_1^{*L} = p_2^{*L} = t(1 - v)^2$$

$$D_1^{*L}(s^*, r^*, v) = D_2^{*L}(s^*, r^*, v) = \frac{N}{2}$$

$$B_1^{*L}(s^*, r^*, v) = B_2^{*L}(s^*, r^*, v) = t\frac{N}{2}(1-v)^2$$

2.- Con todo ello, este equilibrio en localización para las empresas muestra que el principio de máxima diferenciación se mantiene incluso al introducir en un extremo del mercado una zona verde en la que no existe actividad económica. La localización de las empresas en los extremos de la zona comercial y residencial, $\{v, 1\}$, implica una relajación en la competencia en precios. El resultado es paralelo al obtenido por d'Aspremont *et al* (1979) en un mercado lineal sin existencia de zona verde.

3.- Los precios dependen de v, el tamaño de la zona verde impuesta por el regulador, de modo que cuanto mayor sea la zona verde escogida, mayor será la disminución de los precios, aumentando la competencia. Esto se debe a que la tasa de variación de los precios es negativa $\forall\ v \in [0,1)$:

$$\frac{\partial p_1^{*L}}{\partial v} = \frac{\partial p_2^{*L}}{\partial v} = -2t(1-v)$$

4.- Por el contrario, las demandas de ambas empresas quedan fijas una vez localizadas sus posiciones en el mercado, y no dependen del tamaño del área verde.

5.- Al igual que sucede con los precios, los beneficios también dependen del tamaño que el regulador estima que debe tener la zona medioambiental, de modo que cuanto mayor sea la zona verde escogida, menores serán los beneficios de ambas empresas, ya que la tasa de variación de los mismos respecto a v es negativa $\forall\ v \in [0,1)$:

$$\frac{\partial B_1^{*L}}{\partial v} = \frac{\partial B_2^{*L}}{\partial v} = -tN(1-v)$$

Esto lleva a las empresas a optimizar sus beneficios en ausencia de área verde, esto es, su preferencia estará situada en la no existencia de área medioambiental, $v = 0$.

4.3.3 Tamaño óptimo del área verde

Encontrada solución única, o equilibrio de Nash en localización, del problema $\mathcal{P}_2$, que se denota por x_1^*, x_2^*, se procede ahora a resolver la primera etapa del modelo, el problema $\mathcal{P}_3$ de optimización por parte del regulador del tamaño de la zona verde de la ciudad lineal, v^*, a partir de la función de bienestar social definida en el preámbulo:

$$\Psi(v) = \lambda U^*(v) + (1-\lambda)B^*(v)$$

Conocidos los resultados de consumidor indiferente, precios, demandas y beneficios obtenidos en el equilibrio en localización, se tiene que los componentes de la función de bienestar quedan como sigue:

$$U^*(v) = N\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t\frac{13}{12}(1-v)^2\right)$$

$$B^*(v) = tN(1-v)^2$$

Con ello, la expresión de la función de bienestar resulta:

$$\Psi(v) = \lambda N\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t\frac{13}{12}(1-v)^2\right) + (1-\lambda)tN(1-v)^2 =$$

$$= \lambda N\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u}\right) + \left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)tN(1-v)^2$$

Demostración: anexo 4.3.

Para determinar el tamaño óptimo de la zona verde, el regulador busca maximizar esta función de bienestar social, de manera que el problema $\mathcal{P}_3$ se reduce a calcular el valor de la variable v que optimiza esta función, esto es, que resuelve el problema

$$\mathcal{P}_3: \begin{cases} \underbrace{ArgMax}_{v} \ \Psi(v) \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Para ello se calcula la condición de primer orden

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0$$

cuya solución es:

$$v^* = 1 - \frac{\lambda(N\alpha - \beta)}{2tN\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)}$$

Demostración: anexo 4.4.

Observaciones

1.- Esta función de bienestar medioambiental social resulta ser cuadrática en v, con coeficiente cuadrático $\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right) tN$, que podrá tomar valor negativo, nulo o positivo dependiendo del valor del parámetro de ponderación del sesgo del regulador, λ:

- $0 \leq \lambda < \frac{12}{25}$ $\rightarrow$ La función de bienestar es una parábola positiva, que tiene en el punto de inflexión un punto de mínimo relativo, y por tanto para encontrar el punto de máximo de la función hay que estudiar los valores que toma v en los extremos de la región factible, el intervalo $[0,1)$.

- $\lambda = \frac{12}{25}$ $\rightarrow$ En este caso puntual se tiene que la función de bienestar pasa a ser una recta, por lo que el estudio de su pendiente determinará el punto $v \in [0,1)$ en el que alcanza su máximo valor.

- $\frac{12}{25} < \lambda \leq 1 \;\; \rightarrow$ La función de bienestar es una parábola invertida que alcanza, en el punto de inflexión, un punto de máximo local.

Demostración: anexo 4.5.

2.- La parábola será simétrica dentro del intervalo $[0,1)$ si el vértice coincide con el punto medio del intervalo, $v^* = \frac{1}{2}$, y esto sucede si y sólo si:

$$t = \frac{\lambda(N\alpha - \beta)}{\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)N}$$

Demostración: anexo 4.6.

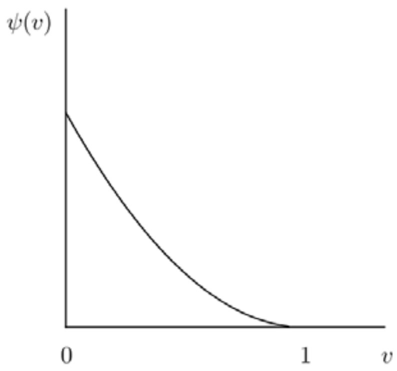
A la hora de evaluar el impacto producido en la sociedad por la aparición de la zona verde, buscando el máximo bienestar para ciudadanos y empresas, se concreta el estudio en seis situaciones puntuales según el perfil *político* del regulador, esto es, según su preferencia por buscar la mejora de las condiciones medioambientales de los habitantes de la ciudad lineal, incorporadas a su función de utilidad, o de perseguir el incremento de los beneficios de las empresas. Se divide el intervalo $[0,1]$ para tomar cinco puntos equidistantes $\lambda = \frac{k}{4}$; $k = 0,1, \dots ,4$, que representan desde el regulador totalmente favorable a maximizar el beneficio de las empresas a cuenta de su actividad comercial ($\lambda = 0$), hasta el regulador inclinado en su totalidad a priorizar la mejora de la calidad medioambiental de los consumidores ($\lambda = 1$), pasando por un regulador intermedio que otorga el mismo peso a ambas variables $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$, y otros dos que se inclinan por cada una de ellas sin dejar de considerar totalmente la contraria $\left(\lambda = \frac{1}{4}\ ,\ \lambda = \frac{3}{4}\right)$. Además se estudia el caso $\tilde{\lambda} = \frac{12}{25}$, en el que la función de bienestar pasa a ser una recta y supone por tanto una singularidad en la casuística del problema de maximización.

$\cdot\ \lambda = 0$

Situación extrema en la que el regulador tiene en cuenta únicamente el interés de las empresas, con lo que el problema $\mathcal{P}_3$ queda restringido a maximizar el beneficio total de estas, lo que equivale a resolver

$$\begin{cases} \underbrace{ArgMax}_{v}\ \Psi_0(v) \\ 0 \leq v < 1 \end{cases}$$

en el que $\Psi_0(v) = B^*(v) = tN(1-v)^2$. Esta función de beneficio pasa a ser una parábola positiva con vértice en el punto $v = 1$, que por tanto es una función decreciente en el intervalo $0 \leq v < 1$, tal y como se muestra en la gráfica



y así se tiene que el máximo bienestar medioambiental social se alcanza en el extremo inferior del intervalo, $v^* = 0$, lo que responde a la preferencia de las empresas, ya que estas optimizan sus beneficios en ausencia de zona verde, cuando todo el espacio de mercado se dedica a la actividad residencial y comercial de consumidores y empresas, lo que permite una máxima relajación de la competencia, alcanzando así la solución de máxima diferenciación en todo el espacio de mercado obtenida en el trabajo de d'Aspremont *et al* (1979). El valor del bienestar medioambiental-social resulta ser

$$\Psi_0(0) = tN$$

$\cdot\ \lambda = \frac{1}{4}$

El regulador prioriza el interés de las empresas, dando un peso mayor a su beneficio en la función de bienestar que aquél que otorga a la utilidad de los consumidores. El problema $\mathcal{P}_3$ queda ahora caracterizado como la maximización de la función de bienestar siguiente:

$$\Psi_{\frac{1}{4}}(v) = \frac{N}{4}\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u}\right) + \frac{23}{48}tN(1-v)^2$$

que es también en este caso una parábola positiva, dado que el parámetro λ es menor que la cantidad obtenida al discriminar entre el carácter positivo o negativo del término cuadrático de la misma. Por tanto, se hace necesario evaluar la función en los extremos del intervalo $[0,1)$ y comparar los valores que se obtienen, en base a resolver el punto de máximo bienestar en este caso. Dado que:

$\cdot\ \Psi_{\frac{1}{4}}(0) = \frac{N}{4}\left(\frac{\beta}{N} + \bar{u}\right) + \frac{23}{48}tN$

$\cdot\ \Psi_{\frac{1}{4}}(1^-) = \lim_{v\to 1^-} \Psi_{\frac{1}{4}} = \frac{N}{4}(\alpha + \bar{u})$

se busca primero el caso en el que el máximo bienestar se alcance en el límite del extremo superior del intervalo, $v^* = 1^-$, lo que equivale a la solución degenerada en la que todo el espacio excepto un punto es ocupado por la zona verde medioambiental. Esto sucede si y sólo si

$$\Psi_{\frac{1}{4}}(0) < \Psi_{\frac{1}{4}}(1^-) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N}{4}\left(\frac{\beta}{N} + \bar{u}\right) + \frac{23}{48}tN < \frac{N}{4}(\alpha + \bar{u}) \quad \Leftrightarrow$$

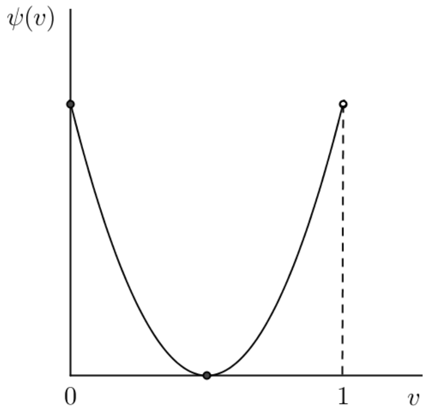
$$\frac{\beta}{N} + \bar{u} + \frac{23}{12}t < \alpha + \bar{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{N} + \frac{23}{12}t < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{12}{23}\frac{N\alpha - \beta}{N}$$

En el caso contrario, cuando el máximo de la función de bienestar se alcanza en el extremo inferior del intervalo, $v^* = 0$, se tiene que la zona verde medioambiental es nula y todo el espacio de mercado queda dedicado a la actividad residencial y comercial, para mayor beneficio de las empresas, que alcanzan su óptimo beneficio. Se da este supuesto bajo la condición opuesta:

$$\Psi_{\frac{1}{4}}(1^-) < \Psi_{\frac{1}{4}}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12}{23}\frac{N\alpha - \beta}{N} < t$$

Por último, cuando la función de bienestar tiene su vértice exactamente en el punto medio del segmento, alcanzará su valor máximo en ambos extremos del intervalo $[0,1)$, supuesto que se da bajo la condición exacta:

$$\Psi_{\frac{1}{4}}(0) = \Psi_{\frac{1}{4}}(1) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{12}{23}\frac{N\alpha - \beta}{N}$$



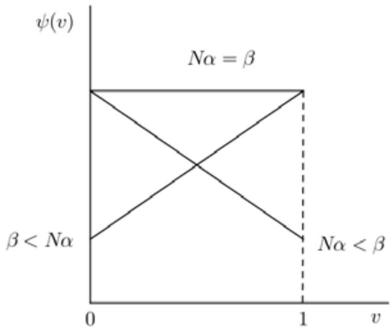
Pero bajo este escenario la condición de límite sobre el extremo superior del segmento hace que el valor que toma en el punto $v = 0$ sea el máximo que alcanza la función en el intervalo, con lo que el bienestar medioambiental social se maximiza bajo la no existencia de zona verde.

$\cdot\ \tilde{\lambda} = \frac{12}{25}$

En este caso, la función de bienestar es una recta,

$$\Psi_{\frac{12}{25}}(v) = \frac{12}{25}N\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u}\right)$$

que va a tener pendiente negativa, nula o positiva en función de la relación entre los parámetros α y β, tal y como se muestra en la gráfica siguiente:



y por tanto, va a alcanzar su máximo en todo el intervalo $0 \leq v < 1$ o en uno de sus extremos, lo que se estudia a continuación a partir de la condición de primer orden:

$$\frac{\partial \Psi_{\frac{12}{25}}}{\partial v} = \frac{12}{25}(N\alpha - \beta)$$

$\cdot \frac{\partial \Psi_{\frac{12}{25}}}{\partial \mathrm{v}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N\alpha = \beta$

Pendiente nula, la función es constante en todo el intervalo y toma el valor

$$\Psi_{\frac{12}{25}}(v) = \frac{12}{25}N(\alpha + \bar{u}) = \frac{12}{25}(\beta + N\bar{u})$$

En este caso el valor de la función de bienestar es indiferente respecto a la elección del regulador del tamaño de zona verde, v^*, puesto que el resultado del bienestar agregado de consumidores y empresas será el mismo sea cuál sea dicho valor.

$\cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{v}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad N\alpha < \beta$

Pendiente negativa, la función toma su máximo en el extremo inferior del intervalo, $v^* = 0$, con el valor

$$\Psi(0) = \frac{12}{25}(\beta + N\bar{u})$$

En esta situación, la optimización de la función de bienestar pasa de nuevo por eliminar la zona verde, permitiendo así a las empresas maximizar su beneficio sin contemplar una restricción de carácter medioambiental.

$\cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{v}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < N\alpha$

Pendiente positiva, la función toma su máximo en el extremo superior del intervalo, $v^* = 1^-$, con el valor

$$\Psi(1^-) = \frac{12}{25} N(\alpha + \bar{u})$$

Se tiene de nuevo la configuración límite en la que la zona verde ocupa todo el espacio de mercado, con mínima diferenciación a las empresas, maximización de la competencia, pero con precios nulos y beneficios inexistentes (paradoja de Bertrand).

$\cdot \lambda = \frac{1}{2}$

El regulador otorga en este caso el mismo peso a los dos componentes de la función de bienestar, mitad a la utilidad de los consumidores, mitad al beneficio de las empresas. El problema $\mathcal{P}_3$ busca ahora maximizar la siguiente función de bienestar:

$$\Psi_{\frac{1}{2}}(v) = \frac{N}{2}\left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u}\right) - \frac{tN}{24}(1-v)^2$$

Se tiene en este caso una parábola negativa. Sustituyendo el valor $\lambda = \frac{1}{2}$ en el valor general de v^* obtenido en el anexo, se tiene que

$$v^* = 1 + 6\frac{N\alpha - \beta}{tN}$$

A continuación se procede a verificar la pertenencia de este valor al intervalo $[0,1)$, pasando a discriminar sobre los valores de los coeficientes de mejora medioambiental, α, congestión poblacional, β, y transporte, t:

$$1 \leq v^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 1 + 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq N\alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq N\alpha$$

el parámetro de congestión de la población es menor que el parámetro global de mejora ambiental para el total de los habitantes. Se tiene así que el tamaño óptimo de la zona verde es todo el espacio de mercado, y sólo se contempla la solución degenerada en el extremo superior de la región factible, $v^* = 1^-$. El bienestar resulta:

$$\Psi_{\frac{1}{2}}(1^-) = \frac{1}{2}N(\alpha + \bar{u})$$

$$0 \leq v^* < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 + 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cdot\, 0 \leq 1 + 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad -t \leq 6\frac{N\alpha-\beta}{N} \quad \Leftrightarrow \quad 6\frac{N\alpha-\beta}{N} \in [-t, 0]$$

$$\cdot\, 1 + 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad N\alpha - \beta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad N\alpha < \beta$$

la relación entre la externalidad positiva derivada de tener una zona verde y la externalidad negativa derivada de la congestión es en conjunto negativa, el peso de la congestión poblacional es superior al beneficio medioambiental-social, y así se debe planificar una zona verde cuyo tamaño está comprendido dentro de la región factible, y que satisface una condición con respecto al parámetro de coste de transporte.

La expresión del valor de la función de bienestar en este caso queda como sigue:

$$\Psi_{\frac{1}{2}}(v^*) = \frac{1}{2t}\left(\alpha t N + \frac{3}{N}(N\alpha - \beta)^2\right) + \frac{N}{2}\bar{u}$$

$\cdot \lambda = \frac{3}{4}$

El regulador asigna mayor peso a la utilidad de los consumidores que a los beneficios de las empresas. El problema $\mathcal{P}_3$ está caracterizado por la maximización de la función de bienestar descrita a continuación:

$$\Psi_{\frac{3}{4}}(v) = \frac{3}{4}N\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u}\right) - \frac{9}{16}tN(1-v)^2$$

De nuevo esta función es una parábola negativa, y al sustituir el valor $\lambda = \frac{3}{4}$ en el valor general de v^* obtenido previamente, se tiene que

$$v^* = 1 + \frac{2}{3}\frac{N\alpha - \beta}{tN}$$

A continuación se verifica la pertenencia de este valor al intervalo $[0,1)$, discriminando así sobre los valores de los coeficientes de mejora medioambiental, α, congestión poblacional, β, y transporte, t:

$$1 \leq v^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 1 + \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq N\alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq N\alpha$$

Bajo este escenario, el parámetro de concentración de la población es pequeño en comparación con el parámetro global de mejora ambiental para el total de los habitantes. Se tiene que el tamaño óptimo de la zona verde es todo el espacio de mercado, y por tanto sólo se contempla la solución extrema $v^* = 1^-$. El bienestar es:

$$\Psi_{\frac{3}{4}}(1^-) = \frac{3}{4}N(\alpha + \bar{u})$$

$$0 \leq v^* < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 + \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cdot\ 0 \leq 1 + \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad \Leftrightarrow \quad -t \leq \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{N} \in [-t, 0]$$

$$\cdot\ 1+\frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN}<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{3}\frac{N\alpha-\beta}{tN}<0 \quad\Leftrightarrow\quad N\alpha-\beta<0 \quad\Leftrightarrow\quad N\alpha<\beta$$

En este caso 'pesa' más la externalidad negativa derivada de la congestión que la positiva derivada de tener una zona verde, y por tanto es necesario crear una zona verde para equilibrar dichos pesos y generar un beneficio en la sociedad.

La expresión del valor de la función de bienestar en este caso queda como sigue:

$$\Psi_{\frac{3}{4}}(v^*)=\frac{1}{4t}\left(3\alpha tN+\frac{7}{4N}(N\alpha-\beta)^2\right)+\frac{3}{4}N\bar{u}$$

$\cdot\ \lambda=1$

Situación extrema en la que el regulador tiene en cuenta únicamente el interés de los consumidores, con lo que el problema $\mathcal{P}_3$ queda restringido a maximizar la utilidad total de los estos, $U^*(v)$, lo que equivale a resolver el problema

$$\begin{cases}\underbrace{ArgMax}_{v}\ U^*(v)\\ 0\leq v<1\end{cases}$$

Sustituyendo el valor $\lambda=1$ en la expresión general de v^*:

$$v^*=1+\frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN}$$

Este valor ha de verificar su pertenencia al intervalo factible $[0,1)$, discriminando así sobre los valores de los coeficientes de mejora medioambiental, α, congestión poblacional, β, y transporte, t:

$$1\leq v^* \quad\Leftrightarrow\quad 1\leq 1+\frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq\frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq N\alpha-\beta \quad\Leftrightarrow \beta\leq N\alpha$$

El parámetro de congestión poblacional es pequeño en comparación con el parámetro global de mejora ambiental para el total de los habitantes. En este caso, se tiene que el tamaño óptimo de la zona verde es todo el espacio de mercado, y por tanto sólo se contempla la solución degenerada $v^* = 1^-$. El bienestar asociado queda:

$$\Psi_1(1^-) = N(\alpha + \bar{u})$$

$$0 \leq v^* < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 + \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cdot\, 0 \leq 1 + \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \;\Leftrightarrow\; -1 \leq \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} \;\Leftrightarrow\; -t \leq \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{N} \;\Leftrightarrow\; \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{N} \in [-t, 0]$$

$$\cdot\, 1 + \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{13}\frac{N\alpha-\beta}{tN} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad N\alpha - \beta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad N\alpha < \beta$$

En definitiva, incluso en el caso en el que el regulador se interesa exclusivamente por la utilidad de los consumidores, debe tener en cuenta cómo resulta la función de utilidad, estudiando los parámetros α, β y t, para configurar una región verde que optimice el bienestar medioambiental-social sin llegar al caso de reducir el modelo a un único punto, solución matemática pero que no tiene aplicación en la vida real.

La expresión del valor de la función de bienestar en este caso queda como sigue:

$$\Psi_1(v^*) = \frac{1}{13t}\left(13\alpha t N + \frac{3}{N}(N\alpha - \beta)^2\right) + N\bar{u}$$

4.4 Conclusiones

A modo de resumen de todo el espectro de soluciones encontradas en función de los parámetros que intervienen en el modelo, se exponen las mismas en formato de tabla, permitiendo así comparar las implicaciones sobre la decisión de implantación de una zona medioambiental en base al sesgo del regulador respecto a los intereses enfrentados de consumidores y empresas.

Siempre que los parámetros α, β, N configuran un coeficiente positivo, $0 \leq N\alpha - \beta$, o lo que es lo mismo, $\beta \leq N\alpha$, esto es, el parámetro que representa la externalidad negativa surgida de la congestión poblacional es menor que el efecto positivo que en el conjunto de la población genera la externalidad asociada a la zona verde o medioambiental, se tiene que el tamaño de dicha zona, que el regulador debe elegir para maximizar el bienestar medioambiental social, se corresponde con todo el espacio de mercado, $v^* = 1^-$, llevando la configuración del modelo a una solución *à la Bertrand*, en la que la competencia es máxima, los precios y los beneficios son nulos y la actividad comercial y residencial desaparece en beneficio de una zona abierta verde de recreación y ocio que acapara todo el espacio.

<table>
<tr><th>Sesgo del regulador</th><th>Tamaño óptimo de la zona verde</th><th>Evaluación de la función de bienestar</th></tr>
<tr><td>$\lambda = 0$</td><td>$v^* = 0$</td><td>$\Psi_0(v) = tN$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda = \frac{1}{4}$</td><td>$\frac{12}{23}\frac{N\alpha - \beta}{N} \leq t \quad \Rightarrow \quad v^* = 0$</td><td>$\Psi_{\frac{1}{4}}(0) = \frac{N}{4}\left(\frac{\beta}{N} + \bar{u}\right) + \frac{23}{48}tN$</td></tr>
<tr><td>$t < \frac{12}{23}\frac{N\alpha - \beta}{N} \quad \Rightarrow \quad v^* = 1^-$</td><td>$\Psi_{\frac{1}{4}}(1^-) = \frac{N}{4}(\alpha + \bar{u})$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\tilde{\lambda} = \frac{12}{25}$</td><td>$N\alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad v^* = 0$</td><td>$\Psi_{\frac{12}{25}}(0) = \frac{12}{25}(\beta + N\bar{u})$</td></tr>
<tr><td>$N\alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad v^* \in [0,1)$</td><td>$\Psi_{\frac{12}{25}}(v) =$
$= \frac{12}{25}N(\alpha + \bar{u}) = \frac{12}{25}(\beta + N\bar{u})$</td></tr>
<tr><td>$\beta < N\alpha \quad \Rightarrow \quad v^* = 1^-$</td><td>$\Psi_{\frac{12}{25}}(1^-) = \frac{12}{25}N(\alpha + \bar{u})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda = \frac{1}{2}$</td><td>$\left\{\begin{matrix} N\alpha < \beta \\ 6\frac{N\alpha - \beta}{N} \in [-t, 0] \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow$
$v^* = 1 + 6\frac{N\alpha - \beta}{tN}$</td><td>$\Psi_{\frac{1}{2}}(v^*) =$
$\frac{1}{2t}\left(\alpha tN + \frac{3}{N}(N\alpha - \beta)^2\right) + \frac{N}{2}\bar{u}$</td></tr>
<tr><td>$\beta \leq N\alpha \quad \Rightarrow \quad v^* = 1^-$</td><td>$\Psi_{\frac{1}{2}}(1^-) = \frac{N}{2}(\alpha + \bar{u})$</td></tr>
</table>

$\lambda = \frac{3}{4}$	$\left\{\begin{matrix} N\alpha < \beta \\ \frac{2}{3}\frac{N\alpha - \beta}{N} \in [-t, 0] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $v^* = 1 + \frac{2}{3}\frac{N\alpha - \beta}{tN}$	$\Psi_{\frac{3}{4}}(v^*) =$ $\frac{1}{4t}\left(3\alpha tN + \frac{7}{4N}(N\alpha - \beta)^2\right) + \frac{3}{4}N\bar{u}$
	$\beta \leq N\alpha \quad \Rightarrow \quad v^* = 1^-$	$\Psi_{\frac{3}{4}}(1^-) = \frac{3}{4}N(\alpha + \bar{u})$
$\lambda = 1$	$\left\{\begin{matrix} N\alpha < \beta \\ \frac{6}{13}\frac{N\alpha - \beta}{N} \in [-t, 0] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $v^* = 1 + \frac{6}{13}\frac{N\alpha - \beta}{tN}$	$\Psi_1(v^*) =$ $\frac{1}{13t}\left(13\alpha tN + \frac{3}{N}(N\alpha - \beta)^2\right) + N\bar{u}$
	$\beta \leq N\alpha \quad \Rightarrow \quad v^* = 1^-$	$\Psi_1(1^-) = N(\alpha + \bar{u})$

Cuando el regulador asigna un peso mayor a los beneficios de las empresas, en los casos $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\tilde{\lambda} = \frac{12}{25}$, se tiene una dualidad entre la zona medioambiental máxima o mínima, $v^* = 1$ o bien $v^* = 0$, dependiendo de los valores que toman los parámetros de congestión poblacional y mejora medioambiental en relación al parámetro de coste de transporte t, pero sin admitir otra configuración intermedia de la región verde, salvo la excepción del caso en el que la función de bienestar es una recta horizontal o de pendiente nula, $\tilde{\lambda} = \frac{12}{25}, N\alpha = \beta$, en el que el tamaño del área medioambiental no influye en el valor del bienestar estimado por el regulador, y por tanto $v \in [0,1)$.

Por último, en los casos en los que el regulador asigna un peso mayor a la función de utilidad de los consumidores, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{4}$, $\lambda = 1$, y para el caso en el que los parámetros α, β, N configuran un coeficiente negativo, $N\alpha - \beta < 0$, se aprecia que, conforme aumenta el peso que el regulador otorga a la utilidad de los consumidores, aumenta el tamaño de la zona verde o medioambiental, puesto que la misma viene determinada por el coeficiente $N\alpha - \beta$ dividido por una cantidad que es progresivamente mayor.

4.5 Anexo

Definición.- Equilibrio de Nash en precios

Dadas funciones de beneficio que dependen de precios, localizaciones y zona verde, $B_i(p_1, p_2, x_1, x_2, v)$, $i = 1, 2$, un equilibrio puro o de Nash en precios se define como un par de precios de las empresas 1 y 2 respectivamente, $\{p_1^*(x_1, x_2, v), p_2^*(x_1, x_2, v)\}$, que, dado el tamaño de la zona verde v y las localizaciones de las empresas, x_1, x_2, verifica:

a) $p_2^*(x_1, x_2, v) - p_1^*(x_1, x_2, v) \in I_j, \quad j = 0,1,2$

b) $p_1^*(x_1, x_2, v) = \underbrace{ArgMax}_{p_1} \, B_1(p_1, p_2^*) \quad , \quad p_2^*(x_1, x_2, v) = \underbrace{ArgMax}_{p_2} \, B_2(p_1^*, p_2)$

El equilibrio en estrategias puras en precios puede ser interpretado como un par de estrategias óptimas: ninguna de las dos empresas quiere cambiar su estrategia en precio, incluso cuando la otra revela su decisión de precio. En consecuencia, el par (p_1^*, p_2^*) es un equilibrio de Nash en precios para una localización fija (x_1, x_2) y un tamaño fijo de zona verde v, cuando p_1^* maximiza $B_1(p_1, p_2^*)$ sobre $\mathbb{R}^+$ y p_2^* maximiza $B_2(p_1^*, p_2)$ sobre $\mathbb{R}^+$.

Anexo 4.1.- Proposición 4.1.

Aplicando la definición de equilibrio de Nash en precios se deriva que el consumidor indiferente soporta la restricción de pertenencia al intervalo [0,1] para asegurar un beneficio positivo para cada empresa, ya que, como queda indicado en el apartado 3, dicho consumidor indiferente se expresa como un intervalo sobre la diferencia de precios, y situar esta diferencia de precios fuera del intervalo [0,1] significaría, alternativamente para la empresa 1 o 2, obtener un beneficio nulo. Formalmente, sólo podrá haber beneficio positivo para ambas empresas cuando la diferencia entre los precios de las dos empresas, $p_2 - p_1$, se encuentre comprendida en el intervalo I_1, dado que en cualquiera de los otros intervalos I_0 e I_2, una de las empresas pasaría a obtener beneficio nulo, y se daría por tanto la no existencia de equilibrio bajo cualquiera de estas condiciones.

Asumiendo entonces que $p_2 - p_1 \in I_1$, se procede a resolver el problema $\mathcal{P}_1$ utilizando las condiciones de primer orden respecto a los precios sobre las funciones de beneficio, lo que es equivalente a resolver el sistema S:

$$(S)\ \begin{cases} \dfrac{\partial B_1}{\partial p_1} = 0 \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial p_2} = 0 \end{cases}$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene que:

$$\frac{\partial B_1}{\partial p_1} = \left(\frac{p_2 - p_1}{2tr} + \frac{s}{2} - v\right)\frac{N}{1-v} + p_1\left(\frac{-1}{2tr}\right)\frac{N}{1-v} = 0$$
$$\frac{\partial B_2}{\partial p_2} = \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{2tr} - \frac{s}{2}\right)\frac{N}{1-v} + p_2\left(\frac{-1}{2tr}\right)\frac{N}{1-v} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{p_2}{2} + tr\left(\dfrac{s}{2} - v\right) \\ p_2 = \dfrac{p_1}{2} + tr\left(1 - \dfrac{s}{2}\right) \end{cases}$$

Lo que deriva en las soluciones:

$$p_1^* = \frac{1}{3}tr(2 + s - 4v) \quad , \quad p_2^* = \frac{1}{3}tr(4 - s - 2v)$$

A continuación se realizan las pertinentes comprobaciones:

1.- La diferencia de precios queda expresada bajo equilibrio en precios como sigue:

$$p_2^* - p_1^* = \frac{2}{3}tr(1 - s + v)$$

que verifica la pertenencia al intervalo

$$I_1 = [2vtr - tsr, 2tr - tsr]$$

si y sólo si:

$$\begin{cases} 2vtr - tsr \leq p_2^* - p_1^* & (c_1) \\ p_2^* - p_1^* \leq 2tr - tsr & (c_2) \end{cases}$$

(c_1): Esta condición se cumple cuando

$$2vtr - tsr \leq \frac{2}{3}tr(1 - s + v) \quad \Leftrightarrow$$

$$2v - s \leq \frac{2}{3}(1 - s + v) \quad \Leftrightarrow$$

$$6v - 3s \leq 2 - 2s + 2v \quad \Leftrightarrow$$

$$4v - 2 \leq s$$

Esta expresión se cumple siempre, ya que $2v \leq s \leq 2$, y por tanto,

$$4v - 2 \leq s \quad \Leftrightarrow \quad 2v + 2v - 2 \leq s \quad \Leftrightarrow \quad 2v - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq 1$$

cierto por hipótesis ya que $v < 1$.

(c_2): para que se verifique esta desigualdad es necesario que

$$\frac{2}{3}tr(1 - s + v) \leq 2tr - tsr \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}(1 - s + v) \leq 2 - s \quad \Leftrightarrow$$

$$2 - 2s + 2v \leq 6 - 3s \quad \Leftrightarrow$$

$$s \leq 4 - 2v$$

De nuevo se cumple esta expresión para toda localización de las empresas, ya que $2v \leq s \leq 2$, y por tanto,

$$s \leq 4 - 2v \quad \Leftrightarrow \quad s \leq 2 + 2 - 2v \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 2 - 2v \quad \Leftrightarrow \quad v \leq 1$$

cierto por hipótesis dado que $v < 1$.

2.- Además, se verifica siempre que las condiciones de segundo orden en el punto crítico son negativas, lo que equivale a que en dicho punto las funciones de beneficio alcanzan un máximo relativo:

$$\cdot \frac{\partial^2 B_1}{\partial^2 p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\left(\frac{p_2 - p_1}{2tr} + \frac{s}{2} - v\right)\frac{N}{1-v} + p_1\left(\frac{-1}{2tr}\right)\frac{N}{1-v}\right) = -\frac{1}{tr}\frac{N}{1-v}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 B_2}{\partial^2 p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\left(1 - \frac{p_2 - p_1}{2tr} - \frac{s}{2}\right)\frac{N}{1-v} + p_2\left(\frac{-1}{2tr}\right)\frac{N}{1-v}\right) = -\frac{1}{tr}\frac{N}{1-v}$$

Dado que $t > 0$ y $r > 0$ por hipótesis ($x_2 > x_1$), se cumple $\forall\, x_1, x_2$ que $\frac{\partial^2 B_1}{\partial^2 p_1} < 0$ y $\frac{\partial^2 B_2}{\partial^2 p_2} < 0$.

q.e.d.

Definición.- Equilibrio de Nash en localización

Obtenido el equilibrio de Nash en precios (p_1^*, p_2^*), y dadas las funciones de beneficio bajo equilibrio en precios, que dependen ahora de localizaciones y zona verde, $B_i^*(x_1, x_2, v)$, $i = 1, 2$, un equilibrio puro o de Nash en localizaciones se define como un par de localizaciones de las empresas 1 y 2 respectivamente, $\{x_1^*(v), x_2^*(v)\}$, que, dado el tamaño de la zona verde v, verifica:

$$B_1^*(x_1^*(v), x_2^*(v), v) > B_1^*(x_1(v), x_2^*(v), v) \quad \forall\, x_1 \neq x_1^*$$

$$B_2^*(x_1^*(v), x_2^*(v), v) > B_2^*(x_1^*(v), x_2(v), v) \quad \forall\, x_2 \neq x_2^*$$

De nuevo el equilibrio en estrategias puras en localizaciones se interpreta como un par de estrategias óptimas, ya que ambas empresas optimizan su beneficio bajo el valor de equilibrio en localización incluso cuando la empresa rival revela su estrategia de localización. En consecuencia, el par (x_1^*, x_2^*) es un equilibrio de Nash en localización cuando, para un tamaño fijo de zona verde v, x_1^* maximiza $B_1^*(x_1, x_2^*)$ sobre $[0,1]$ y x_2^* maximiza $B_2(x_1^*, x_2)$ sobre $[0,1]$.

Anexo 4.2.- Proposición 4.2.

Dadas la expresiones de las funciones de beneficio de ambas empresas al equilibrio en precios,

$$B_1^*(s,r,v) = \frac{tr}{18}(2+s-4v)^2\frac{N}{1-v}$$

$$B_2^*(s,r,v) = \frac{tr}{18}(4-s-2v)^2\frac{N}{1-v}$$

se procede a calcular las localizaciones de equilibrio de Nash, es decir, a resolver el problema $\mathcal{P}_2$, utilizando las condiciones de primer orden respecto a las localizaciones. Para ello se resuelve el sistema S:

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = 0\\ \dfrac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = 0\end{cases}$$

sujeto a las restricciones $0 \leq v \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, $v < 1$, que se derivan de las hipótesis de partida del modelo.

Realizado el cambio de variable para simplificar los cálculos a lo largo del artículo, utilizando la regla de la cadena se llega a la expresión de las condiciones de primer orden respecto a las localizaciones:

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = \dfrac{\partial B_1^*}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_1^*}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = \dfrac{\partial B_2^*}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_2^*}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_2}\end{cases}$$

Desarrollando las condiciones se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = \dfrac{N}{1-v}\dfrac{t}{18}(2+s-4v)(2r-2-s+4v) = 0 \\ \dfrac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = \dfrac{N}{1-v}\dfrac{t}{18}(4-s-2v)(4-s-2r-2v) = 0 \end{cases}$$

lo que equivale a

$$\begin{cases} (2+s-4v)(2r-2-s+4v) = 0 \\ \\ (4-s-2v)(4-s-2r-2v) = 0 \end{cases}$$

Para encontrar solución a este sistema, se contemplan 4 casos:

i) $$\begin{cases} 2+s-4v = 0 \\ \\ 4-s-2v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 4v-2 \\ \\ 4-2v = s \end{cases} ;\quad 4v-2 = 4-2v\,;\quad 6v = 6\,;\quad v = 1$$

Pero el modelo establece que $v < 1$, luego nunca se alcanza la solución del sistema. Además, esto implicaría $s = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = 1$, solución degenerada en el extremo superior del intervalo, que no aporta una configuración realista del problema ya que todo el espacio de mercado se toma como zona verde, las empresas se localizan en el extremo del mercado, y en este no están definidas, en el sentido matemático del término, demandas ni beneficios.

ii) $$\begin{cases} 2+s-4v = 0 \\ \\ 4-s-2r-2v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 4v-2 \\ \\ 4-2r-2v = s \end{cases} ;\quad 4v-2 = 4-2r-2v\,;\quad 2r = 6-6v\,;\quad r = 3-3v$$

Deshaciendo ahora el cambio de variables, $\begin{cases} x_2 + x_1 = 4v - 2 \\ x_2 - x_1 = 3 - 3v \end{cases}$, se obtiene que las localizaciones de equilibrio son $x_1 = \frac{7v-5}{2}$, $x_2 = \frac{v+1}{2}$. Siguiendo el planteamiento del problema en tanto que localización de las empresas en la zona residencial y de servicios, se debe verificar que $0 \leq v \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$:

$\cdot\ v \leq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq \frac{7v-5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2v \leq 7v - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leq 5v \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq v$

$\cdot\ x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7v-5}{2} \leq \frac{v+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 6v \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq 1$

Lo que deriva de nuevo en la no existencia de solución, dado que $v < 1$.

iii) $\begin{cases} 2r - 2 - s + 4v = 0 \\ 4 - s - 2v = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2r - 2 + 4v = s \\ 4 - 2v = s \end{cases}$; $2r - 2 + 4v = 4 - 2v$; $2r = 6 - 6v$; $r = 3 - 3v$

Deshaciendo el cambio de variables, $\begin{cases} x_2 + x_1 = 4 - 2v \\ x_2 - x_1 = 3 - 3v \end{cases}$, se obtiene que las localizaciones de equilibrio son $x_1 = \frac{v+1}{2}$, $x_2 = \frac{7-5v}{2}$. Comprobando las restricciones de localización del modelo, $0 \leq v \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$:

$\cdot\ x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v+1}{2} \leq \frac{7-5v}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 6v \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq 1$

$\cdot\ x_2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7-5v}{2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 7 - 5v \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leq 5v \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq v$

Una vez más la restricción $v < 1$ lleva a que no se alcance la solución.

iv) $\begin{cases} 2r - 2 - s + 4v = 0 \\ 4 - s - 2r - 2v = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2r - 2 + 4v = s \\ 4 - 2r - 2v = s \end{cases} ;\ 2r - 2 + 4v = 4 - 2r - 2v\ ;\ \ 4r = 6 - 6v\ ;\ \ r = \frac{3-3v}{2}$$

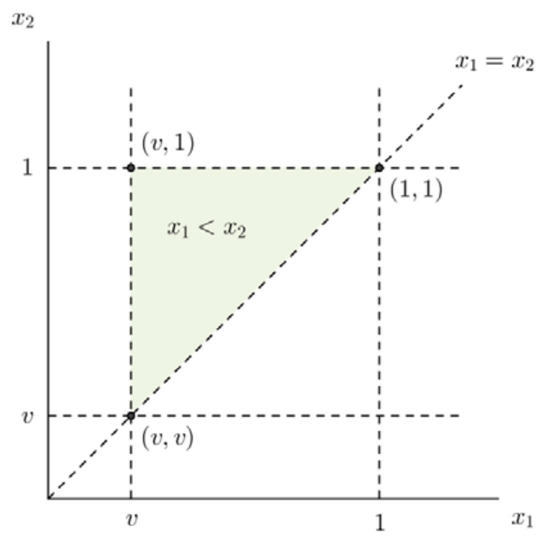
Deshaciendo de nuevo el cambio de variables, $\begin{cases} x_2 + x_1 = 2\left(\frac{3-3v}{2}\right) - 2 + 4v \\ x_2 - x_1 = \frac{3-3v}{2} \end{cases}$, se obtiene que las localizaciones de equilibrio son $x_1 = \frac{5v-1}{4}$, $x_2 = \frac{5-v}{4}$. Para que las soluciones sean factibles, se estudian las condiciones de localización del modelo, $0 \leq v \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$:

$\cdot\ v \leq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq \frac{5v-1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4v \leq 5v - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq v$

$\cdot\ x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5v-1}{4} \leq \frac{5-v}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 6v \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad v \leq 1$

Luego tampoco en este caso se tiene una solución factible que suponga un máximo relativo de la función de beneficio dentro del espacio de mercado.

Por todo ello, las funciones de beneficio no alcanzan un punto de máximo local en la región factible definida por las restricciones de partida del modelo. Así, para calcular el valor máximo que toman dichas funciones en esta región es necesario realizar la evaluación de las mismas en la frontera del espacio de mercado, dado que dicho valor máximo se alcanzará en los extremos y no en el interior, tal y como se ha comprobado anteriormente. La región factible de las variables x_1 y x_2 queda representada en la siguiente figura:



Estudiando los valores que toman los beneficios de ambas empresas, B_1 y B_2, se observa que en toda la recta $x_1 = x_2$ estas funciones valen 0, ya que el valor de la variable $r = x_2 - x_1$ se anula. Se ha demostrado que no existe un punto de máximo dentro de la región factible, con lo que basta con estudiar los valores que toman los beneficios en la frontera de esta región para obtener el par de localizaciones que dan un mayor valor a estas funciones, y que por tanto son de equilibrio para las empresas. En el vértice de la región factible, en el punto $(v, 1)$, será en dónde se maximiza cada una de las funciones B_1^* , B_2^* en sus respectivas variables:

· Para x_2 fijo, la función B_1^* es una función decreciente en x_1, que alcanza su máximo en $x_1 = v$,

$$B_1^*(x_1, x_2, v) = \frac{t(x_2 - x_1)}{18}(2 + x_2 + x_1 - 4v)^2 \frac{N}{1 - v}$$

Estudiando la condición de primer orden:

$$\frac{\partial B_1^*}{\partial x_1} = \frac{tN}{18(1 - v)}(2 + x_2 + x_1 - 4v)(x_2 - 3x_1 + 4v - 2)$$

se aprecia que se trata de una función negativa para valores $x_2 \in [v, 1]$, y por tanto B_1 es decreciente en $[0,1]$ y $x_1^* = v$.

· Para x_1 fijo, la función B_2^* es una función creciente que, en el intervalo $[0,1]$, alcanza su máximo en $x_2 = 1$:

$$B_2^*(x_1, x_2, v) = \frac{t(x_2 - x_1)}{18}(4 - x_2 - x_1 - 2v)^2 \frac{N}{1 - v}$$

Estudiando la condición de primer orden:

$$\frac{\partial B_2^*}{\partial x_2} = \frac{tN}{18(1 - v)}(4 - x_2 - x_1 - 2v)(4 - 3x_2 + x_1 - 2v)$$

se aprecia que se trata de una función positiva para valores $x_1 \in [v, 1]$, y por tanto B_2 es creciente en $[0,1]$ y $x_2^* = 1$.

q.e.d.

Anexo 4.3.- Expresión de equilibrio de la función de bienestar global.

Cálculo de la utilidad total de los consumidores y del beneficio agregado de las empresas, bajo equilibrio en precios y localización, tomando los consiguientes valores para las variables que intervienen en el modelo:

$$\hat{x}^{**} = \frac{1 + v}{2}$$

$$p_1^{**} = p_2^{**} = t(1 - v)^2$$

$$x_1^* = v \quad x_2^* = 1$$

$$B_1^{**}(s^*, r^*, v) = B_2^{**}(s^*, r^*, v) = t\frac{N}{2}(1 - v)^2$$

Utilidad de los consumidores:

$$U^*(v) = \frac{N}{1-v}\left(\int_v^{\hat{x}^{**}} u(v,x,x_1^*)dx + \int_{\hat{x}^{**}}^1 u(v,x,x_2^*)dx\right) =$$

$$= \frac{N}{1-v}\left(\int_v^{\frac{1+v}{2}} \alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2 - t(x-v)^2\, dx\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1+v}{2}}^1 \alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2 - t(x-1)^2\, dx\right) =$$

$$= \frac{N}{1-v}\left(\int_v^1 \alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2\, dx - t\int_v^{\frac{1+v}{2}}(x^2+v^2-2vx)dx\right.$$

$$\left. - t\int_{\frac{1+v}{2}}^1 (x^2+1-2x)dx\right) =$$

$$= \frac{N}{1-v}\left(\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2\right)x|_v^1 - t\left(v^2x|_v^{\frac{1+v}{2}} - vx^2|_v^{\frac{1+v}{2}} + \frac{x^3}{3}|_v^{\frac{1+v}{2}}\right)\right.$$

$$\left. - t\left(x|_{\frac{1+v}{2}}^1 - x^2|_{\frac{1+v}{2}}^1 + \frac{x^3}{3}|_{\frac{1+v}{2}}^1\right)\right) =$$

$$= \frac{N}{1-v}\left(\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2\right)(1-v)\right.$$

$$- t\left(v^2\left(\frac{1-v}{2}\right) - v\left(\frac{1+2v-3v^2}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1+3v+3v^2-7v^3}{8}\right)\right)$$

$$\left. - t\left(\frac{1-v}{2} - \frac{3-2v-v^2}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{7-3v-3v^2-v^3}{8}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{N}{1-v}\left(\left(\alpha v + \beta\frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2\right)(1-v)\right.$$

$$\left. - t\left((v^2+1)\left(\frac{1-v}{2}\right) - \frac{1}{4}(3-v+v^2-3v^3) + \frac{1}{3}(1-v^3)\right)\right) =$$

$$= \left(N \left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2 \right) - t \frac{N}{1-v} \left(\frac{1 - 3v + 3v^2 - v^3}{12} \right) \right) =$$

$$= \left(N \left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u} - t(1-v)^2 \right) - tN \left(\frac{(1-v)^2}{12} \right) \right) =$$

$$= N \left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u} - t \frac{13}{12} (1-v)^2 \right)$$

Beneficio de las empresas:

$$B^*(v) = B_1^{**}(v) + B_2^{**}(v) = tN(1-v)^2$$

De aquí sigue que la función de bienestar total tiene la siguiente expresión:

$$\Psi(v) = \lambda N \left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u} - t \frac{13}{12} (1-v)^2 \right) + (1-\lambda) tN(1-v)^2 =$$

$$= \lambda N \left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u} \right) + \left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) tN(1-v)^2$$

q.e.d.

Anexo 4.4.- Cálculo de la condición de primer orden de la función de bienestar:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\lambda N \left(\alpha v + \beta \frac{1-v}{N} + \bar{u} \right) + \left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) tN(1-v)^2 \right) = 0$$

$$N \left(\lambda \left(\alpha - \frac{\beta}{N} \right) - \left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) 2t(1-v) \right) = 0$$

$$\lambda \left(\frac{N\alpha - \beta}{N} \right) - \left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) 2t + \left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) 2tv = 0$$

$$\left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) 2tv = \left(1 - \frac{25}{12} \lambda \right) 2t - \lambda \left(\frac{N\alpha - \beta}{N} \right)$$

$$v^* = 1 - \frac{\lambda(N\alpha - \beta)}{2tN\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)}$$

Anexo 4.5.- Cálculo de la condición de segundo orden de la función de bienestar:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 v} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(N\left(\lambda\left(\alpha - \frac{\beta}{N}\right) - \left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)2t(1-v)\right)\right) =$$

$$= 2tN\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 v} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \lambda\left(\frac{25}{12}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \lambda\left(\frac{25}{12}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12}{25} < \lambda$$

Anexo 4.6.- Cálculo de la condición de simetría de la función de bienestar en el intervalo [0,1).

$$v^* = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{\lambda(N\alpha - \beta)}{\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)2tN} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\lambda(N\alpha - \beta)}{\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)2tN}$$

$$t = \frac{\lambda(N\alpha - \beta)}{\left(1 - \frac{25}{12}\lambda\right)N}$$

5. Capítulo V - Asignación espacial de precios y zonificación medioambiental en un mercado circular

En este capítulo se trata de nuevo la zonificación como un instrumento de política urbana para la creación de áreas verdes, pero a modo de comparación con el mercado lineal, analizado en el capítulo anterior, se propone ahora el estudio de un duopolio con zonificación sobre la ciudad circular, incorporando un área verde o ambiental en la que no se permite la actividad económica ni residencial, pero sí el tránsito de bienes a través de la misma. La dimensión óptima de la zona verde dependerá de sus efectos sobre la población o del sesgo del regulador, dependiendo del perfil de este último. Se plantea la asignación espacial de precios como política de formación de los mismos.

5.1 Introducción

Se formulan y se analizan a continuación los equilibrios en un modelo de discriminación espacial para un duopolio con zonificación, en una ciudad circular sobre la que se diseña un área verde o medioambiental en la que no se permite actividad económica ni residencial, aunque sí el transporte de bienes a lo largo de la misma.

Partiendo de esta configuración general, se considera que la existencia de la zona medioambiental influye en el bienestar los consumidores, por lo que se asocia a los mismos una función de calidad de vida que se modeliza mediante distintos parámetros: por una parte, se asume que cada individuo valora positivamente las mejoras ambientales, y que lo hace conforme a una tasa de crecimiento que va decreciendo paulatinamente; desde otro ángulo, se tiene en cuenta que el tamaño del área verde repercute en la densidad de población del área habitada de la ciudad circular, y se modeliza este impacto de manera lineal y decreciente.

El modelo sigue la línea del planteado en el capítulo anterior, introduciendo una autoridad reguladora que persigue la implantación, en un arco de circunferencia cualquiera en la ciudad circular, de una zona medioambiental destinada a mejorar la calidad de vida de sus habitantes.

El propósito de esta investigación es estudiar cómo afecta al tamaño óptimo del área medioambiental el coste de transporte, el grado de satisfacción de la población por la zona verde y el sesgo del regulador. Para ello, en el contexto de discriminación espacial, se formaliza el ya conocido juego en tres etapas, en el que, en la primera etapa, el regulador elige la dimensión óptima de la zona verde; en la segunda etapa, las empresas eligen simultáneamente la localización; y en la tercera etapa, las empresas eligen a un tiempo sus precios. El resultado que se obtiene depende de la relación entre la satisfacción de la población por la zona verde y el sesgo del regulador.

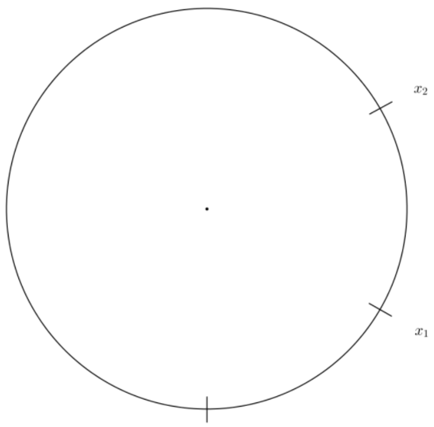
El artículo se estructura de la siguiente manera: en la sección segunda, se explicita el mecanismo de asignación espacial de precios sobre el modelo circular; en la sección tercera, se analiza el modelo una vez introducida la región verde o medioambiental, calculando los equilibrios en precio y localización y el resultado de decisión óptima del regulador. Se presentan dos situaciones contrapuestas: en primer lugar, se examina qué ocurre cuando el planificador es puramente ecologista y sólo se preocupa por el bienestar de la población debido a la mejora medioambiental y el deterioro debido a la mayor congestión residencial; en segundo lugar, se analiza la situación en la que el planificador tiene en cuenta el mercado pero no se preocupa por las externalidades de la zona verde. Por último, en la sección cuarta se extraen las conclusiones pertinentes.

5.2 Asignación espacial de precios sobre el modelo circular

Para configurar un modelo circular de competencia en localización se considera como mercado una circunferencia de radio $\frac{1}{2\pi}$, o lo que es lo mismo, de longitud 1:

$$S = \left\{ x^2 + y^2 = \frac{1}{4\pi^2} \ , \qquad x, y \in \ \mathbb{R} \right\}$$

Sobre esta circunferencia se localiza un *continuum* de consumidores distribuidos de manera uniforme a lo largo de la ciudad circular, y en dos puntos cualesquiera de la misma se sitúan y operan dos empresas, x_i , $i = 1, 2$.



Mercado circular

Se establece que las empresas se ocupan del transporte, repercutiendo este coste al consumidor en el precio final de adquisición (coste que se modeliza como función de la distancia que separa empresa de consumidor), y escogen un precio de entrega c, igual en cada punto del mercado. Para cada consumidor se conforma así un precio total de adquisición del producto, P_F, que consta del coste de transporte más el precio de entrega establecido por la empresa.

Se toma como función de coste de transporte la distancia del consumidor a la empresa, en valor absoluto y ponderada por un coeficiente $t > 0$, mediante la siguiente expresión:

$$T\big(d_i(x)\big) = td_i(x) = t|x - x_i| \,, \qquad t > 0 \,, \qquad i = 1{,}2$$

Por consiguiente, la expresión del precio final de adquisición viene dada por

$$P_{F_i}(x) = c + td_i(x) \,, \qquad i = 1, 2$$

Asumiendo que los costes marginales de producción son iguales y no significativos (coste de producción cero), los beneficios de las empresas son proporcionales al número de consumidores servidos, y así cada empresa trata de maximizar su cuota de mercado, M.

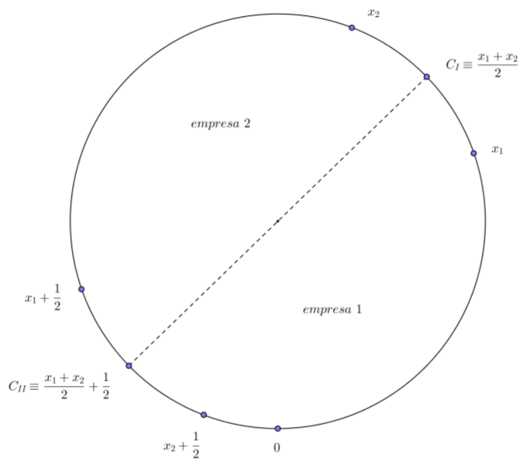
Para formalizar esta idea y encontrar los segmentos del mercado que corresponderán a cada empresa, se realiza un cálculo por igualación de sus funciones de coste:

$$c + td_1(x) = c + td_2(x)$$

lo que se reduce a resolver la ecuación

$$|\ x - x_1\ | = |\ x - x_2\ |$$

y, como consecuencia, el mercado queda dividido en dos partes iguales utilizando el punto medio entre la localización de las empresas, lo que se resuelve formalmente en el anexo 1:



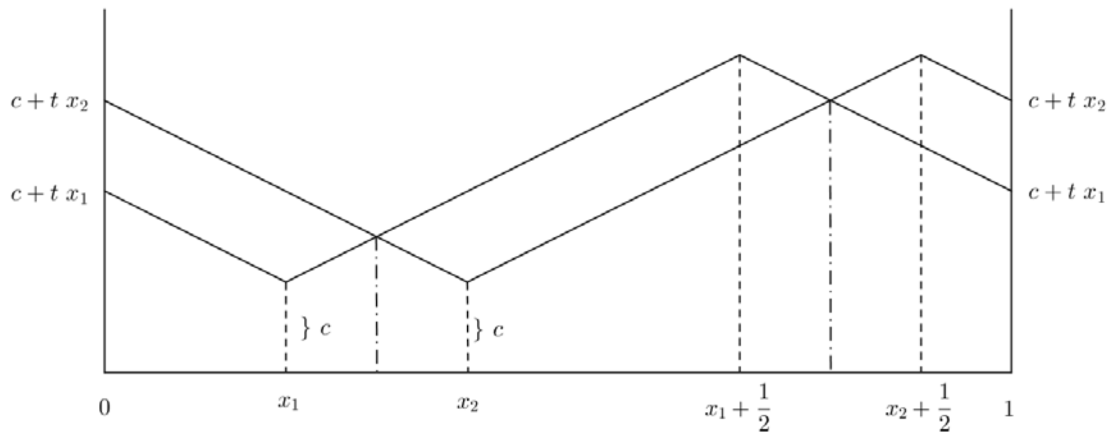
Cuotas de mercado

De esta manera, el mercado pasa a estar segmentado en dos mitades iguales:

· la empresa 1 provee a los segmentos $\left[0\,,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$, $\left[\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{1}{2}\,,1\right]$ al precio total de adquisición, P_{F_2} , de la empresa 2;

· la empresa 2 provee al segmento $\left[\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{1}{2}\right]$ al precio total de adquisición, P_{F_1}, de la empresa 1.

Se representa ahora el espacio de mercado, la circunferencia, mediante una recta cuyos extremos coinciden en la formulación circular, pero que aquí suponen los extremos del mercado, los puntos 0 y 1 respectivamente. Esta representación lineal del mercado circular se divide en los intervalos previamente expuestos, y sobre ellos se plasma la gráfica de la función de precio final de adquisición para cada una de las empresas:



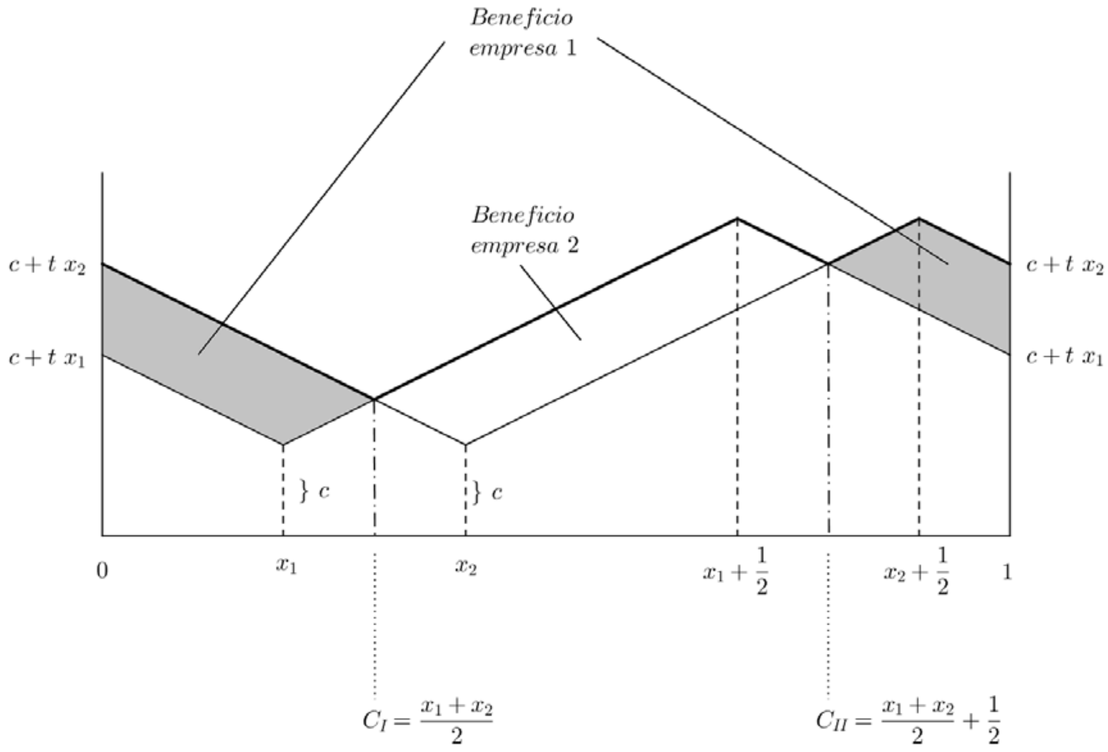
Circunferencia extendida sobre la recta

Sobre esta representación también se observa la existencia de dos puntos en los que la función de precio total de adquisición coincide para ambas empresas, y que por tanto segmentan el mercado en dos regiones, una en la que la empresa 1 va a servir a todos los consumidores dado que $P_{F_1} < P_{F_2}$, y otra en la que será la empresa 2 la que sirva a los consumidores situados en ella.

En definitiva, y dado que los costes de entrega son constantes, para encontrar el equilibrio en precio en cada punto $x \in S$, se utiliza un argumento estándar *à la Bertrand* que proporciona solución cuando ambas empresas forman su precio en el precio de entrega de la empresa con un mayor coste de transporte en dicho punto (un precio más alto por parte de una empresa sería mejorado a la baja por la otra, obteniendo así cuota de mercado). De esta manera se configura la regla de reparto que determina que cada punto en S es provisto por la empresa que tiene en él el precio total de adquisición más bajo.

Ya establecida la cuota de mercado de cada empresa, estas deciden a qué precio final servir el producto, y siguiendo la lógica de la regla de reparto recién analizada, cada una tomará como precio el coste total de entrega de la empresa con mayor coste total de entrega en cada punto, maximizando así sus beneficios y conservando su cuota de mercado.

Se interpreta además que, para cada empresa, su beneficio vendrá dado, en las regiones en las que tiene cuota de mercado, por el área comprendida entre su precio y el precio total de adquisición de la empresa competidora, lo que se representa en la siguiente figura:



En trazo grueso se representa el conjunto de precios en equilibrio

Como consecuencia, se traslada la identificación del equilibrio en el mercado circular desde la caracterización del equilibrio en el mercado lineal realizada por primera vez por Hoover (1937), que fue investigado formalmente por Hurter & Lederer (1985) y Lederer & Hurter (1986), y que se formaliza a continuación.

Proposición.- Existe un único conjunto de precios en equilibrio, que viene dado por

$$p_1^*(x) = p_2^*(x) = max\{c + t|x - x_1|, c + t|x - x_2|\}\ ,\quad \forall\, x \in S$$

Demostración: para el subjuego en precios inducido por cualquier par de localizaciones de las empresas, una estrategia de empresa es una organización de precios especificando el precio total de adquisición al cual la empresa provee a cada localización de consumidor. A su vez, cada consumidor realizará la adquisición de una unidad del bien producido. Cada empresa toma como estrategia en precio p_1^* y p_2^* respectivamente, y respectivamente escoge como estrategia en localización los puntos x_1 y x_2. Los consumidores son servidos por una de las empresas, en función del reparto de la cuota de mercado que se ha acordado, y al precio total de adquisición al que las empresas han llegado como equilibrio en precios.

Sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ el precio de entrega en equilibrio disminuye cuando la distancia a la firma proveedora aumenta, ya que esta tiene que igualar la competencia. Cuando $x_1 = x_2$, el precio de entrega en equilibrio iguala el coste de entrega común y las empresas hacen beneficios cero.

Todo ello es lo que subyace a la proposición anterior: el equilibrio en precio es tal que la empresa de menor coste total de entrega provee a cada punto del mercado con un precio de entrega igual al coste de proveer de la segunda empresa más barata. Así, el equilibrio en planificación de precios induce la localización socialmente óptima de las empresas, que es aquella en la que las empresas están situadas lo más alejadas una de la otra, o lo que es lo mismo, en la localización de máxima diferenciación, que en el mercado circular pasa exclusivamente por un par de localizaciones que verifique la condición $x_2 = x_1 + \frac{1}{2}$, es decir, la localización de las empresas es irrelevante a la hora de analizar el problema, puesto que el carácter circular del mercado conlleva que, utilizando el punto medio del segmento de circunferencia que separa la localización de ambas empresas, $\frac{x_1+x_2}{2}$, el mercado queda dividido en dos zonas iguales al añadir el punto opuesto en el mercado, $\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{1}{2}$. Sin embargo, el componente de coste de transporte indica que las empresas deben situarse enfrentadas en la circunferencia, dividiendo el mercado en dos mitades pero situándose cada una de ellas en el punto medio de su segmento correspondiente, $x_2 = x_1 + \frac{1}{2}$, por ejemplo, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_1 = \frac{1}{4}$.

5.3 Zonificación medioambiental en el modelo circular

Se considera ahora un modelo de discriminación espacial en precios sobre el que se añade la planificación de una zona verde o medioambiental, libre de consumidores y actividad comercial, pero a través de la cual sí está permitido el tránsito de bienes, cuyo diseño corre a cargo de una autoridad reguladora.

El estudio parte de un modelo lineal de discriminación de precios en el que las empresas tienen en cuenta el coste de transporte, es decir, fijan un precio de fábrica pero el precio de venta depende de la localización de cada consumidor. En Anderson, de Palma & Thisse (1992: 325-329) se presenta dicho modelo de discriminación espacial *à la Bertrand*, que formaliza los modelos analizados por Hurter & Lederer (1985) y Hurter & Lederer (1986), en los que las empresas tienen la capacidad de localizarse en el mercado y discriminar vía precios.

5.3.1 El espacio de localización: la ciudad circular

Se considera de nuevo como mercado la circunferencia de longitud 1 (esto es, radio $\frac{1}{2\pi}$)

$$S = \left\{ x^2 + y^2 = \frac{1}{4\pi^2}, \qquad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

en el que residen N consumidores uniformemente distribuidos a lo largo de la misma. A su vez, dos empresas, $i = 1, 2$, se localizan en dos puntos cualesquiera de la circunferencia, x_1, x_2, asumiendo sin pérdida de generalidad que $x_1 \leq x_2$, y cuya actividad comercial consiste en la producción y venta de un bien homogéneo con coste de producción c.

Para llevar a cabo el estudio del modelo, se consideran en el mercado dos áreas diferentes:

i) un área verde $[v_1, v_2]$, $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, de longitud $v = v_2 - v_1$, donde ni consumidores ni empresas se pueden instalar;

ii) un área poblada $[0, v_1] \cup [v_2, 1]$, de longitud $1 - v$, en donde se localizan empresas y consumidores.

5.3.2 Los efectos de la zona verde

La zona verde $[v_1, v_2]$ diseñada por el regulador afecta directamente a los habitantes mediante dos tipos de externalidades, que surgen por un efecto ambiental y por un efecto de congestión, respectivamente.

5.3.2.1 Efecto ambiental

Este efecto aparece al valorar los individuos positivamente la mejora ambiental que supone la presencia de una zona verde en su ciudad, ya que reduce la contaminación y ofrece espacio para el ocio. Se modeliza mediante la siguiente función cóncava:

$$h(v) = -v^2 + \alpha v \ , \quad \alpha > 1, v \in [0,1)$$

El parámetro α describe el grado de satisfacción de cada individuo por los espacios verdes. Además, partiendo de la idea de que todo el mundo prefiere las mejoras ambientales, se asume $\alpha > 1$, lo que asegura que la función ambiental sea positiva.

5.3.2.2 Efecto de congestión o de densidad de la población

Se modeliza la satisfacción del consumidor como consecuencia de la concentración de población en el espacio urbanizado $[0, v_1] \cup [v_2, 1]$, y su expresión viene dada por:

$$g(v) = \beta \frac{1 - v}{N} \ , \quad \beta > 0 \ , \quad v \in [0,1)$$

El parámetro β refleja el nivel de satisfacción del conjunto de los consumidores para un espacio exclusivamente residencial, $\beta = Ng(0)$. La función $g(v)$ es decreciente en v, más espacio verde supone menos espacio residencial y con ello una mayor congestión poblacional, lo que deriva en una cada vez menor satisfacción respecto a esta variable.

Estos dos efectos se agregan y se define la función de hábitat como combinación lineal del impacto ambiental y el impacto de congestión:

$$i(v) = h(v) + g(v) = -v^2 + \alpha v + \beta \frac{1-v}{N} = -v^2 + \left(\frac{N\alpha - \beta}{N}\right) v + \frac{\beta}{N}$$
$$\alpha > 1, \beta > 0, v \in [0,1)$$

La utilidad total agregada sobre toda la población viene dada por:

$$I(v) = Ni(v) = -Nv^2 + (N\alpha - \beta)v + \beta$$

$$\alpha > 1, \beta > 0, v \in [0,1)$$

5.3.3 El comportamiento de los agentes

A partir del modelo de discriminación en precios propuesto en Anderson, De Palma & Thisse (1992), se especifica el comportamiento de empresas, consumidores y regulador teniendo en cuenta la aparición en escena de una zona verde.

5.3.3.1 Empresas

Producen un mismo bien a un coste marginal constante denotado por c (que en el capítulo anterior, caso lineal, es 0), y cuando ofrecen el producto, distinguen entre los consumidores ubicados en diferentes puntos, es decir, discriminan en precios a los consumidores en base a la localización de cada uno de ellos. Por tanto, el precio de entrega que fija la empresa i al vender su producto depende de la localización del consumidor x y se denota por $p_i(x)$, $i = 1,2$.

Al ser las empresas las que entregan el bien a los consumidores, son aquellas las que asumen los costes asociados al transporte. Esto se modeliza mediante una función lineal de coste de transporte, en base a $d_i(x)$, la distancia del consumidor x a la empresa $i = 1,2$, ponderada por un coeficiente $t > 0$, que se expresa como:

$$T\big(d_i(x)\big) = td_i(x) = t|x - x_i| \,, \qquad t > 0 \,, \qquad i = 1,2$$

Con todo ello, el beneficio de cada empresa en cada uno de los puntos del mercado viene dado por la expresión:

$$B_i(x) = p_i(x) - c - t|x - x_i| \,, \quad i = 1,2$$

5.3.3.2 *Consumidores*

Se asume que todos los consumidores desean adquirir una única unidad del bien producido por las empresas, y tienen una reserva $\bar{u}$ suficientemente grande como para ello. Ya incluido el coste de transporte en el precio final de adquisición, esta será efectivamente realizada por cada consumidor x dependiendo únicamente de los precios, $p_1(x)$, $p_2(x)$ y de la reserva $\bar{u}$, y obtendrá un excedente que se denota por:

$$e_i(x) = \bar{u} - p_j(x) \,, \quad i,j = 1,2 \,, \quad i \neq j$$

El excedente total agregado sobre la población viene entonces dado por:

$$E(v) = \frac{N}{1 - v}\left[\int_{C_1} e_1(x)dx + \int_{C_2} e_2(x)dx\right]$$

en donde C_1 y C_2 son las demandas de las empresas 1 y 2, respectivamente.

Dado que ya se definieron los efectos ambientales y de congestión generados por la zona verde y que conforman la función de hábitat, se define ahora la utilidad del consumidor x al adquirir el bien respectivamente en cada una de las empresas $i = 1,2$ como la suma del impacto sobre el hábitat, $i(v)$, y el excedente del consumidor, $e_i(x)$. Por tanto, la utilidad total que obtiene el consumidor queda expresada como:

$$u_i(x, v) = i(v) + e_i(x)$$

5.3.3.3 Regulador

La autoridad reguladora en materia de urbanización de espacios de mercado tiene como misión la toma de decisiones que beneficien al conjunto de la sociedad, en concreto velando por respetar los intereses de consumidores y permitiendo el desarrollo de la actividad comercial de las empresas, en un entorno de libre mercado que persigue la libre competencia y la defensa de los derechos de los consumidores.

Para ello, en los capítulos de este trabajo se ha utilizado una función objetivo del regulador que es la suma ponderada de los beneficios de las empresas y el excedente de los consumidores, función que ha sido definida previamente en Hamoudi & Risueño (2012). Siguiendo dicha formulación, la función de bienestar considerada es:

$$\Psi(v) = \lambda U^*(v) + (1 - \lambda) B^*(v)$$

en donde:

· λ es el peso otorgado a la utilidad de los consumidores, $0 \leq \lambda \leq 1$;

· $1 - \lambda$ es el peso atribuido al beneficio de las empresas;

· $B^*(v) = B_1(v) + B_2(v)$ representa la suma de beneficios de las empresas;

· $U^*(v) = I(v) + E(v)$ conforma la utilidad agregada de los consumidores.

5.3.4 Equilibrio en precios

Tal y como se ha especificado en el apartado anterior, el equilibrio en precios con asignación espacial de precios se resuelve mediante el argumento *à la Bertrand*, dado que la estrategia de optimización de las empresas no varía ante la aparición de una zona verde, y la solución del equilibrio en precios sigue la misma argumentación que se utilizó previamente, y que llevó a una solución de máxima diferenciación.

5.3.4.1 Demanda

Definida la utilidad de los consumidores, cada uno realiza la adquisición del bien a la empresa que le ofrece el precio total de adquisición más bajo. Si existe igualdad en el precio, la demanda se asigna a la empresa más cercana, y, si además, las distancias al consumidor son iguales para ambas empresas, la demanda se divide por igual entre ellas.

Con todo esto, dadas en S las localizaciones de las empresas, $x_1 \leq x_2$, el beneficio de la empresa 1 viene dado por:

$$B_1(p_1(x), p_2(x), x_1, x_2) = \frac{N}{1-v}\left[\int_{M_1} p_1(x) - c - t|x - x_1|\, dx + \frac{1}{2}\int_{M_{12}} p_1(x) - c - t|x - x_1|\, dx\right]$$

y análogamente para la empresa 2:

$$B_2(p_1(x), p_2(x), x_1, x_2) = \frac{N}{1-v}\left[\int_{M_2} p_2(x) - c - t|x - x_2|\, dx + \frac{1}{2}\int_{M_{12}} p_2(x) - c - t|x - x_2|\, dx\right]$$

en donde

$$x \in [0, v_1] \cup [v_2, 1]$$

$$M_1 \equiv \{x \in S : \ p_1(x) < p_2(x) \ \vee \ p_1(x) = p_2(x) \ \wedge \ |x - x_1| < |x - x_2|\}$$

$$M_2 \equiv \{x \in S : \ p_2(x) < p_1(x) \ \vee \ p_2(x) = p_1(x) \ \wedge \ |x - x_2| < |x - x_1|\}$$

$$M_{12} \equiv \{x \in S : \ p_1(x) = p_2(x) \ \wedge \ |x - x_1| = |x - x_2|\}$$

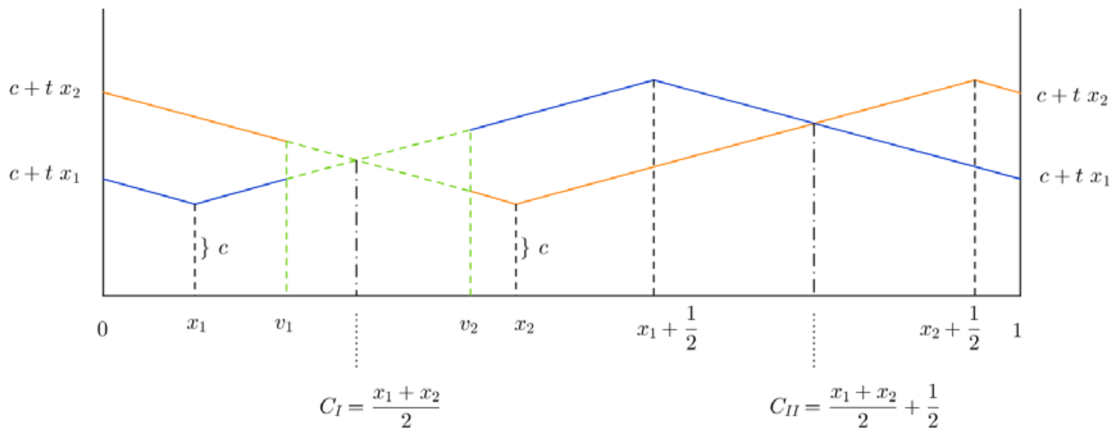
A partir de aquí, se define un *equilibrio de precios en planificación* como un par de precios $\{p_1^*(\cdot), p_2^*(\cdot)\}$ tal que

$$B_i\big(p_i^*(\cdot), p_j^*(\cdot), x_i, x_j\big) \geq B_i\big(p_i(\cdot), p_j^*(\cdot), x_i, x_j\big), \forall p_i(\cdot) \in \mathcal{P}_i, i,j = 1,2, j \neq i$$

De nuevo, el equilibrio en precio es tal que la empresa de menor coste total de entrega puede proveer a cada consumidor a un precio total de adquisición que es igual al coste de proveer de la segunda empresa más barata. Y esto implica que el equilibrio de precios en planificación lleva a la localización socialmente óptima de las empresas, aquella en la que están situadas en una solución de máxima diferenciación.

Formalmente, el precio de equilibrio para cada empresa es:

$$p_1^* = p_2^* = max\{c + t|x - x_1|, c + t|x - x_2|\}, \qquad \forall\, x \in [0, v_1] \cup [v_2, 1]$$



Discriminación espacial de precios con zona verde

A partir de los precios de equilibrio obtenidos y dada la reducción del espacio de mercado que impone la zona medioambiental, las funciones de beneficio de cada empresa se expresan como:

$$B_1(x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{4}x_2^2 - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2 x_1}{2} + x_2 v_1 + x_1 v_1 - v_1^2\right)$$

$$B_2(x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{4}x_2^2 - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2 x_1}{2} + x_2 v_2 + x_1 v_2 - v_2^2\right)$$

Demostración: anexo 5.1.

5.3.5 Equilibrio en localización

En la segunda etapa de resolución del modelo se calcula la localización óptima de cada empresa teniendo en cuenta el resultado de los precios de equilibrio obtenidos previamente. Para hallar las localizaciones de equilibrio se utilizan las condiciones de primer orden sobre las funciones de beneficio de las empresas:

$$\frac{\partial B_1(x_1, x_2, v_1, v_2)}{\partial x_1} = \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_2}{2} + v_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial B_2(x_1, x_2, v_1, v_2)}{\partial x_2} = \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2} + \frac{x_1}{2} + v_2\right) = 0$$

Al resolver el sistema se concluye que las localizaciones de equilibrio son:

$$x_1^* = \frac{1}{4}(v_2 + 3v_1 - 1)$$

$$x_2^* = \frac{1}{4}(3v_2 + v_1 + 1)$$

Demostración: anexo 5.2.

Es una demostración muy sencilla y elegante comprobar que el punto medio de la localización óptima de ambas empresas coincide con el punto medio de la zona verde:

$$\frac{x_2^* + x_1^*}{2} = \frac{\frac{1}{4}(3v_2 + v_1 + 1 + v_2 + 3v_1 - 1)}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2}$$

q.e.d.

Las empresas se localizan por tanto a la misma distancia de cada uno de los extremos del intervalo verde, esto es, la empresa 2 se localiza por encima de v_2 a la misma distancia que la empresa 1 se localiza por debajo de v_1, demostrable trivialmente:

$$v_1 - x_1^* = x_2^* - v_2 \;;$$

$$v_1 - \frac{1}{4}(v_2 + 3v_1 - 1) = \frac{1}{4}(3v_2 + v_1 + 1) - v_2 \;;$$

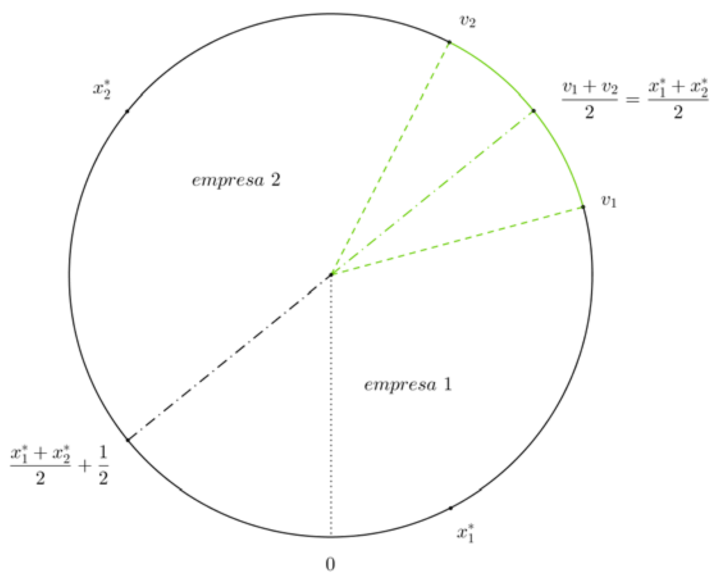
$$-\frac{v_2}{4} + \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{v_2}{4} + \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4}$$

q.e.d.

De este modo, las empresas quedan localizadas en el punto medio de la región a la que suministran, y se infiere de este análisis que el mercado queda perfectamente dividido por la zona medioambiental a partir de la localización óptima de las empresas:

- la empresa 1 suministra a las regiones $[0, v_1]$, $\left[\frac{v_2+v_1}{2} + \frac{1}{2}, 1\right]$
- la empresa 2 pasa a suministrar a la región $\left[v_2, \frac{v_2+v_1}{2} + \frac{1}{2}\right]$.

Todo ello queda reflejado en la siguiente figura:



Se observa también que la localización óptima obtenida se corresponde con la localización socialmente óptima dentro del nuevo espacio factible, que es la región de longitud $1 - v$ que queda urbanizada después de la implantación de la zona verde, y las empresas se localizan así *enfrentadas* en la región de uso comercial y residencial, dividiendo exactamente su espacio de cuota de mercado en dos partes iguales, en una solución adaptada de máxima diferenciación.

A su vez se verifica que cuando no existe zona verde, $v = 0$, lo que sucede siempre que $v_2 = v_1$, las empresas encuentran el equilibrio en localizaciones enfrentadas del espacio de mercado,

$$x_1^* = v_1 - \frac{1}{4} \qquad , \qquad x_2^* = v_1 + \frac{1}{4}$$

lo que se corresponde con la solución de máxima diferenciación.

Sustituyendo las localizaciones de equilibrio en las expresiones de las funciones de beneficio se obtienen los beneficios de las empresas en equilibrio:

$$B_1^*(x_1^*, x_2^*, v_1, v_2) = \frac{t}{8}\frac{N}{1-v}(1 - 3(v_2 - v_1)^2) = \frac{tN}{8}\frac{1-3v^2}{1-v}$$

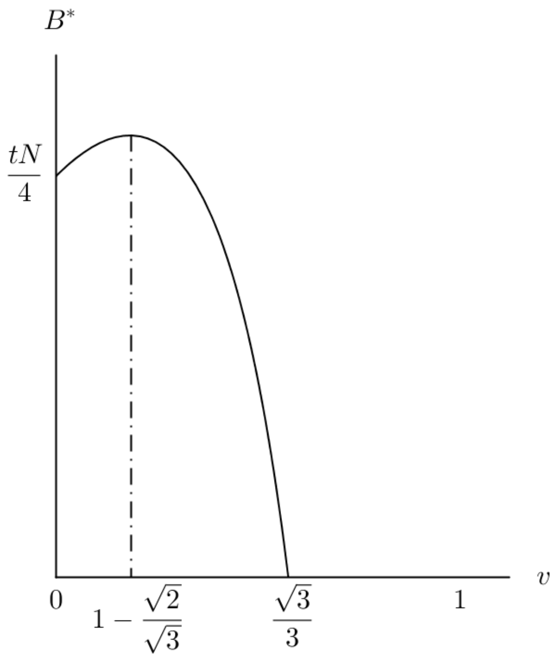
$$B_2^*(x_1^*, x_2^*, v_1, v_2) = \frac{t}{8}\frac{N}{1-v}(1 - 3(v_2 - v_1)^2) = \frac{tN}{8}\frac{1-3v^2}{1-v}$$

Demostración: anexo 5.3.

El beneficio total de las empresas queda como sigue:

$$B^*(x_1, x_2, v_1, v_2) = B_1^* + B_2^* = \frac{tN}{4}\frac{1-3v^2}{1-v}$$

Los beneficios que se obtienen son proporcionales a t, el coste de transporte por unidad de distancia, y a N, el número total de consumidores en el mercado. Estudiando la función B^* se observa que el beneficio agregado de ambas empresas es positivo siempre que el tamaño de la zona verde no sobrepase una determinada dimensión, en concreto $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0'58$, valor para el cual el beneficio agregado es nulo, y a partir de aquí pasa a ser negativo, y por tanto no es factible proponer una zona verde de tamaño igual o mayor que esta cantidad. Por otro lado, curiosamente las empresas no están interesadas en la no existencia de zona verde, $v = 0$, para la cual obtendrían un beneficio $B = \frac{tN}{4}$, ya que este es creciente conforme va apareciendo una zona verde, y llega a alcanzar su máximo bajo la configuración de una zona verde de tamaño $v^* = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \simeq 0'1835$, siendo el beneficio total igual a $B^* = \frac{tN}{4}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\sqrt{3} - 4\right) \simeq \frac{tN}{4} \cdot 1'101$. Todo ello se muestra gráficamente en la siguiente figura:



En el equilibrio en localización, para un consumidor arbitrario situado en la región suministrada por la empresa 1, que es $[0, v_1] \cup \left[\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}, 1\right]$, se tiene que su excedente viene dado por la cantidad

$$e_1(x) = \bar{u} - p_2^*(x) = \bar{u} - c - t|x - x_2|$$

mientras que un consumidor arbitrario que recibe el suministro de la empresa 2, es decir, que está situado en la región $\left[v_2, \frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}\right]$, tiene un excedente determinado por

$$e_2(x) = \bar{u} - p_1^*(x) = \bar{u} - c - t|x - x_1|$$

El excedente agregado al realizar la adquisición del bien de todos los consumidores servidos por la empresa 1 vendrá dado por:

$$\int_0^{v_1} e_1(x)dx + \int_{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}}^{1} e_1(x)dx = (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v) + \frac{t}{16}(5v^2 + 2v - 3)$$

Por otra parte, el excedente agregado al realizar la adquisición del bien de todos los consumidores servidos por la empresa 2 coincide con el de la empresa 1:

$$\int_{v_2}^{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}} e_2(x)dx = (\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v) + \frac{t}{16}(5v^2+2v-3)$$

Demostración: anexo 5.4.

Y así, el excedente agregado de todos los consumidores viene dado por:

$$E(v) = \frac{N}{1-v}\left[\int_{C_1} e_1(x)dx + \int_{C_2} e_2(x)dx\right] =$$

$$= \frac{N}{1-v}\left[(\bar{u}-c)(1-v) + \frac{t}{8}(5v^2+2v-3)\right]$$

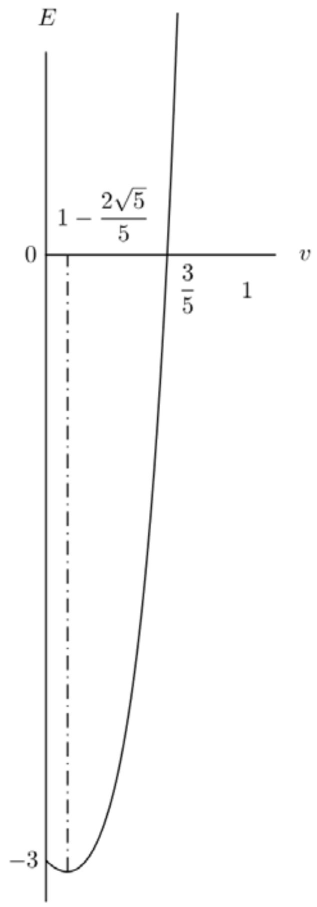
$$= N(\bar{u}-c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2+2v-3}{1-v}$$

Analizando esta función, continua en v en el intervalo $[0,1)$ y creciente hasta su asíntota vertical en $v=1$, se observa que, dentro de dicho intervalo, tiene un mínimo y corta al eje de abscisas en un punto que depende del valor del término *independiente*, que expresa la cantidad que puede conservar el conjunto de los consumidores si se tiene en cuenta exclusivamente el coste de producción del bien, $N(\bar{u}-c)$.

En base a los intereses de los consumidores, si estos son otorgados de la capacidad de decidir el tamaño v de la zona no urbanizada, pasarán a escoger $v^*=1$, lo que se corresponde con la solución $v_2=1,\ v_1=0$, dado que de esta manera maximizan su excedente. En este caso, las localizaciones en equilibrio corresponden a

$$x_1^*=0 \quad ; \quad x_2^*=1$$

lo que es coherente con el mercado, que quedaría reducido al caso extremo de una zona comercial y residencial de un único punto. Esto se ve reflejado en la siguiente figura:



Pero esto es incompatible con el resultado obtenido para las empresas, que dictaba que el tamaño máximo que podría alcanzar la zona verde es igual al valor $\frac{\sqrt{3}}{3}$, lo que implica restricciones sobre el valor del término *independiente* reseñado previamente.

Por último, la utilidad total agregada resulta ser:

$$U^*(v) = I(v) + E(v) =$$

$$= -Nv^2 + (N\alpha - \beta)v + \beta + N(\bar{u} - c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2 + 2v - 3}{1 - v}$$

5.3.6 Dimensión óptima del área medioambiental

En la última fase del trabajo, y siguiendo el método de inducción hacia atrás, se llega a la resolución de la primera etapa del problema, en la que el regulador persigue la optimización de la dimensión de la zona medioambiental v, para lo que se utiliza una función de bienestar que pondera la importancia que se otorga tanto a la utilidad total que se obtiene de la implantación de la zona verde como a los beneficios de las empresas. Su formulación es la siguiente:

$$\Psi(v) = \lambda U^*(v) + (1-\lambda)B^*(v) =$$

$$= \lambda\left[-Nv^2 + (N\alpha - \beta)v + \beta + N(\bar{u} - c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2 + 2v - 3}{1 - v}\right] + (1-\lambda)\frac{tN}{4}\frac{1 - 3v^2}{1 - v}$$

en donde

· $U^*(v)$ es la utilidad de todos los consumidores,

$$U^*(v) = I(v) + E(v)$$

· $B^*(v)$ es el beneficio total de las empresas,

$$B^*(v) = B_1^*(v) + B_2^*(v)$$

· λ es el peso atribuido a la utilidad de los consumidores, $0 \leq \lambda \leq 1$,

· $1 - \lambda$ es el peso atribuido al beneficio total de las empresas.

Previamente al estudio general propiamente dicho, es posible considerar dos tipos de perfil del regulador totalmente decantados por los efectos medioambiental y mercantil respectivamente, de modo que cada uno de ellos ignore los efectos no propios del modelo, y que se presentan a continuación.

5.3.6.1 Optimización de la zona verde con regulador medioambiental

Este perfil de regulador sólo tiene en cuenta los efectos medioambientales que la implantación de una zona verde pueda tener sobre la población, esto es, el grado de satisfacción de cada uno de los habitantes con dicha implantación, que se mide a través del parámetro α, y el nivel de satisfacción del conjunto de los consumidores con el espacio residencial y comercial, que supone la medida de la congestión poblacional, y se expresa mediante el parámetro β. De este modo, al no contemplar ganancia de empresas ni excedente de consumidores en su función de bienestar, esta queda reducida a:

$$\Psi_{\mathrm{e}}(v) = I(v) = -Nv^2 + (N\alpha - \beta)v + \beta$$

Proposición 5.1.- Dado un regulador de perfil medioambiental, que valora exclusivamente los efectos ambiental y de congestión en su función de bienestar, el tamaño óptimo de la zona verde a implantar, $v^* \in [0,1)$, viene dado por la siguiente expresión:

$$v^* = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \dfrac{\beta}{N} \\ \dfrac{1}{2}\left(\alpha - \dfrac{\beta}{N}\right) & \Leftrightarrow \quad \dfrac{\beta}{N} < \alpha < \dfrac{\beta}{N} + 2 \\ 1^- & \Leftrightarrow \quad \dfrac{\beta}{N} + 2 \leq \alpha \end{cases}$$

Demostración: anexo 5.5.

A partir de aquí, la función de utilidad del hábitat para todos los consumidores resulta:

$$\Psi_{\mathrm{e}}(v) = \begin{cases} \beta & \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \dfrac{\beta}{N} \\ \dfrac{1}{4N}(N\alpha - \beta)^2 + \beta & \Leftrightarrow \quad \dfrac{\beta}{N} < \alpha < \dfrac{\beta}{N} + 2 \\ N(\alpha - 1) & \Leftrightarrow \quad \dfrac{\beta}{N} + 2 \leq \alpha \end{cases}$$

Observaciones

1.- El tamaño óptimo de la zona verde depende de los parámetros α y β de satisfacción ambiental y congestión, y de la relación entre ambos:

· cuando $\alpha \leq \frac{\beta}{N}$, esto es, para el consumidor pesa más el coeficiente de congestión poblacional, o al menos este es equivalente a la valoración de la mejora ambiental, $\alpha = \frac{\beta}{N}$, se tiene que su satisfacción con un espacio exclusivamente residencial y comercial es mayor que la utilidad ambiental que obtendría bajo la implantación de una zona verde, y así valora más tener un espacio urbanizado descongestionado. Esto deriva en el rechazo total a la zona verde en virtud de la descongestión poblacional que ofrece la máxima zona residencial y comercial, y en un impacto sobre la utilidad del hábitat igual a la valoración de la congestión por parte del conjunto de consumidores, β.

· si $\frac{\beta}{N} < \alpha < \frac{\beta}{N} + 2$, para el consumidor hay un equilibrio entre la satisfacción por una zona ambiental y por una zona residencial, y la utilidad del hábitat es creciente conforme va creciendo α, desde la valoración que hacen los consumidores del impacto de la congestión poblacional, β, hasta la cantidad $N + \beta$.

· para $\frac{\beta}{N} + 2 \leq \alpha$, el beneficio ambiental es valorado por el consumidor de manera preponderante respecto al beneficio derivado de la descongestión poblacional, y así su preferencia deriva en la implantación de una zona verde sobre la práctica totalidad del espacio de mercado, de manera que la zona urbanizada queda reducida al caso extremo de un único punto. La utilidad del hábitat pasa a ser función de la valoración del impacto ambiental de todos los consumidores, $N(\alpha - 1)$.

2.- Cuando la zona verde es máxima, $v^* = 1^-$, se obtienen los valores más altos de utilidad total del hábitat, $N(\alpha - 1)$.

5.3.6.2 Optimización de la zona verde con regulador mercantil

Se analiza aquí el comportamiento de un planificador orientado a evaluar exclusivamente los efectos mercantiles, esto es, el excedente de los consumidores y el beneficio de las empresas, a la hora de determinar el valor óptimo del área medioambiental. Es por tanto una autoridad reguladora sin ninguna traza de perfil ecologista, dado que no incluye en su función objetivo las externalidades positivas que genera la zona verde. Su función de bienestar se expresa como:

$$\Psi_{\mathrm{m}}(v) = \lambda E(v) + (1-\lambda)B^{*}(v) =$$

$$= \lambda\left[N(\bar{u}-c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2+2v-3}{1-v}\right] + (1-\lambda)\frac{tN}{4}\frac{1-3v^2}{1-v}$$

Al estudiar este caso se especifica cómo la mera existencia de una zona no urbanizada en la ciudad circular cambia el funcionamiento del mercado, ya que supone una modificación de los costes de transporte de las empresas, lo que afecta al precio final que pagan los consumidores.

Dentro de esta configuración, se debe estudiar si el perfil del planificador es más proclive a tener en cuenta los intereses de los consumidores ($\lambda = 1$) o de las empresas ($\lambda = 0$), así como los perfiles intermedios, $\lambda = \frac{3}{4}, \lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{4}$.

· $\lambda = 1$

El sesgo del regulador es totalmente favorable a los intereses de los consumidores. El tamaño óptimo de la zona verde en este caso es $v = 1^{-}$.

· $\lambda = \frac{3}{4}$

$$\Psi_{\mathrm{m}}(v) = \frac{3}{4}\left[N(\bar{u}-c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2+2v-3}{1-v}\right] + \frac{1}{4}\frac{tN}{4}\frac{1-3v^2}{1-v} =$$

$$= \frac{N}{4}\left[3(\bar{u}-c) + \frac{t}{8}\frac{9v^2+6v-7}{1-v}\right]$$

Esta función alcanza su máximo en v en el extremo derecho del intervalo, $v = 1^{-}$, lo que implica que el hecho de que el regulador incluya los intereses de las empresas en la función de bienestar con un peso pequeño no altera el resultado de optimalidad de la región verde, ya que el peso de los intereses de los consumidores prevalece frente a aquellos de las empresas.

$\cdot\ \lambda = \frac{1}{2}$

$$\Psi_{\mathrm{m}}(v) = \frac{1}{2}\left[N(\bar{u}-c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2+2v-3}{1-v}\right] + \frac{1}{2}\frac{tN}{4}\frac{1-3v^2}{1-v} =$$
$$= \frac{N}{2}\left[(\bar{u}-c) + \frac{t}{8}\frac{-v^2+2v-1}{1-v}\right] = \frac{N}{2}\left[(\bar{u}-c) + \frac{t}{8}\frac{-(v-1)^2}{1-v}\right]$$
$$= \frac{N}{2}\left[(\bar{u}-c) + \frac{t}{8}(v-1)\right]$$

En este caso, de nuevo el máximo bienestar se alcanza en el extremo derecho del intervalo, y viene dado por el remanente del excedente del total de los consumidores, $\frac{N}{2}(\bar{u}-c)$.

$\cdot\ \lambda = \frac{1}{4}$

$$\Psi_{\mathrm{m}}(v) = \frac{1}{4}\left[N(\bar{u}-c) + \frac{tN}{8}\frac{5v^2+2v-3}{1-v}\right] + \frac{3}{4}\frac{tN}{4}\frac{1-3v^2}{1-v}$$
$$= \frac{N}{4}\left[(\bar{u}-c) + \frac{t}{8}\frac{-13v^2+2v+3}{1-v}\right]$$

Ahora la función de bienestar en el intervalo $[0,1)$ alcanza su valor máximo en:

$$v^{*} = 1 - \frac{2\sqrt{26}}{13} \simeq 0'2155$$

dado que

$$\frac{\partial \Psi_{\mathrm{m}}}{\partial v}(v) = \frac{tN}{32}\frac{13v^2-26v+5}{(1-v)^2}$$

y así el mayor peso que se otorga a las ganancias de las empresas hace que el tamaño óptimo de la zona verde se vea reducido hasta dicho valor $v^* \simeq 0'2155$.

$\cdot\ \lambda = 0$

Caso en el que el sesgo del regulador está totalmente decantado por los intereses de las empresas. El tamaño óptimo de la zona verde es $v^* = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \simeq 0'1835$.

Tal y como se indicó en el análisis de la función agregada de beneficio de las empresas, es interesante observar que cuando es este beneficio de las empresas el único criterio que se aplica para optimizar la función de bienestar, la zona verde no desaparece por completo sino que tiene un valor pequeño pero apreciable.

5.4 Conclusiones

Con el objetivo de mejorar el bienestar social, ya sea meramente mediante el aumento del bienestar producido por la mejora del medioambiente, o por los beneficios mercantiles que dicha mejora pueda acarrear, se analiza la hipotética implantación de una zona verde en la ciudad circular, sobre la que no se permiten actividades económicas ni residenciales. En el trabajo se considera la asignación espacial de precios como estrategia de optimización de precios de las empresas, costes lineales de transporte y modelización de las externalidades de la zona ambiental. Mediante la especificación de una función de bienestar medioambiental-social ponderada que determina la política óptima del regulador, se estudia la relación entre la dimensión óptima de la zona regulada medioambiental y los efectos de impacto ambiental y de congestión sobre la sociedad, así como el sesgo del regulador en su perfil de moderador entre los beneficios de las empresas y los intereses de los consumidores.

En un primer análisis se examina qué ocurre cuando el planificador es *ecologista* puro, de manera que no tiene en cuenta aspectos mercantiles a la hora de dictaminar la implantación de una zona verde, y evalúa el peso de los coeficientes de mejora ambiental y congestión poblacional: si los consumidores valoran más la no saturación de la zona, no habrá zona verde; si el peso de los beneficios medioambientales va creciendo, la zona verde va tomando una dimensión mayor, hasta el punto en el que este criterio lleva a la solución degenerada en un punto en el que toda la zona residencial y de comercio queda relegada, y la zona verde acapara el espacio de mercado.

En un segundo apartado se estudia la situación en la que el planificador se preocupa exclusivamente por los efectos mercantiles de su decisión, dando más o menos peso a los beneficios de las empresas y al excedente de los consumidores. Bajo esta configuración, es de resaltar que, desde el punto de vista de las empresas, la existencia de una zona verde de un tamaño pequeño pero significativo es lo que optimiza sus intereses, mientras que para la configuración de intereses de los consumidores, la implantación de un área medioambiental total es lo que optimiza sus resultados, llevando la solución a una situación extrema que no es realista desde el punto de vista práctico.

5.5 Anexo

Para poder calcular la cuota de mercado en función del precio total de adquisición de cada consumidor en cada una de las empresas, se procede a igualar dicho precio para cada consumidor en cada una de las empresas,

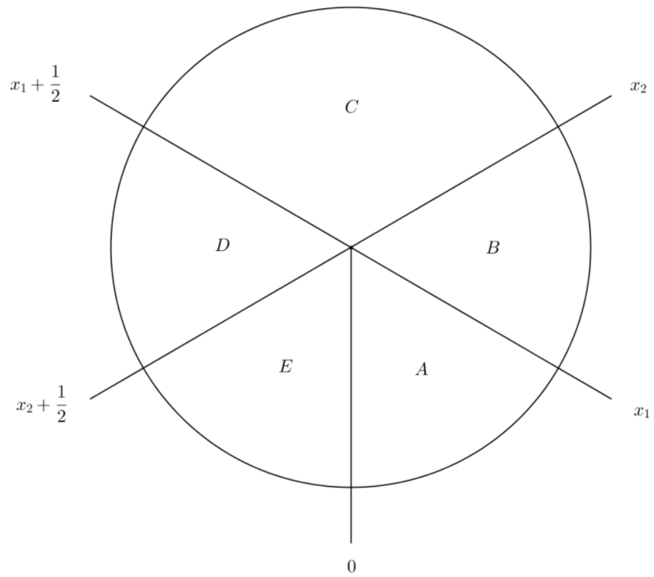
$$P_{F1}(x) = P_{F2}(x)$$

lo que equivale en la práctica a igualar las distancias que separan a cada consumidor de ambas empresas, ya que

$$c + td_1(x) = c + td_2(x)$$

se simplifica en la función distancia, que no es otra cosa que una función valor absoluto. Por tanto, en cada una de las cinco regiones se iguala la distancia respecto a cada empresa para encontrar qué puntos del mercado, o consumidores, se van a decantar por realizar la adquisición en la empresa 1 y 2 respectivamente.

Para poder medir la distancia entre el consumidor y cada uno de los dos puntos de venta, es decir, resolver el valor absoluto que aparece en la función de coste de transporte, es necesario realizar una discriminación de las regiones en las que se ubican los consumidores, que se muestran en la figura: en el siguiente gráfico se muestra la división del espacio de mercado necesaria para analizar el problema desde el punto de vista de la posición de los consumidores respecto a las empresas:



Regiones respecto a la distancia entre consumidor y empresas

La distancia a cada una de las empresas se evalúa como $d_i(x) = |\ x - x_i\ |,\ i = 1{,}2.$ Se distinguen cinco regiones en cuanto a la expresión de la función de distancia del consumidor:

- A: $0 \leq x \leq x_1$
- B: $x_1 \leq x \leq x_2$
- C: $x_2 \leq x \leq x_1 + \frac{1}{2}$
- D: $x_1 + \frac{1}{2} \leq x \leq x_2 + \frac{1}{2}$
- E: $x_2 + \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

En cada una de las regiones en las que hay que diferenciar la circunferencia, se expresa esta distancia de la siguiente manera:

En la primera región, la función de distancia toma la expresión:

$$A \begin{cases} d_1 = x_1 - x \\ d_2 = x_2 - x \end{cases}$$

Igualando, se deriva que no existe consumidor equidistante en esta región.

En la segunda de las regiones, se expresa la distancia como:

$$B \begin{cases} d_1 = x - x_1 \\ d_2 = x_2 - x \end{cases}$$

Igualando,

$$x - x_1 = x_2 - x \ ;$$

$$2x = x_1 + x_2 \ ;$$

$$x - x_1 = x_2 - x \ ;$$

se obtiene el punto equidistante que coincide con el punto medio del segmento:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = C_I$$

La región determina que:

$$x_1 \leq \frac{x_1+x_2}{2} \leq x_2$$

y operando, resulta:

$$x_1 \leq x_2$$

En la tercera región la distancia queda caracterizada por:

$$C \begin{cases} d_1 = x - x_1 \\ d_2 = x - x_2 \end{cases}$$

Igualando, se deriva de nuevo que no existe consumidor equidistante en esta región.

En la cuarta región, se expresa la distancia como:

$$D \begin{cases} d_1 = 1 - x + x_1 \\ d_2 = x - x_2 \end{cases}$$

Igualando de nuevo,

$$1 - x + x_1 = x - x_2 \text{ ;}$$

$$2x = x_1 + x_2 + 1 \text{ ;}$$

luego el segundo punto de consumidor equidistante es:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2} = C_{II}$$

La región determina que:

$$x_1 + \frac{1}{2} \leq \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{1}{2} \leq x_2 + \frac{1}{2} \text{ ;}$$

al operar, resulta:

$$x_1 \leq x_2$$

En la quinta región la distancia queda caracterizada por:

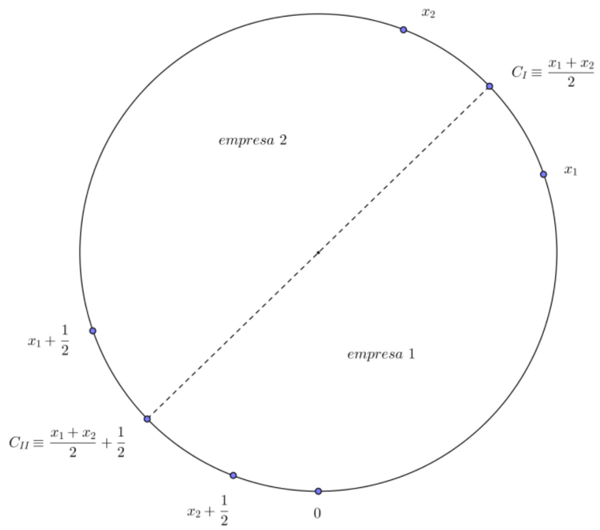
$$E \begin{cases} d_1 = 1 - x + x_1 \\ d_2 = 1 - x + x_2 \end{cases}$$

Igualando, se deriva una vez más que no existe consumidor equidistante en la región.

Con todo ello se concluye que solamente en las regiones B y D existen puntos de equidistancia, determinados por

$$C_I \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$C_{II} \equiv \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2}$$

y que cualesquiera dos localizaciones x_1 , x_2 generan un reparto equitativo del mercado:



Anexo 5.1.- Funciones de beneficio en equilibrio de precios

$$B_1 = \frac{N}{1-v}\left[\int_0^{x_1} p_2^* - c - t|x - x_1|\ dx + \int_{x_1}^{v_1} p_2^* - c - t|x - x_1|\ dx \right.$$
$$\left. + \int_{C_{II}}^{x_2+\frac{1}{2}} p_2^* - c - t|x - x_1|\ dx + \int_{x_2+\frac{1}{2}}^{1} p_2^* - c - t|x - x_1|\ dx \right] =$$

Dado que $p_2^* = c + t|x - x_2|$, el integrando queda $t(|x - x_2| - |x - x_1|)$, que en cada región toma un valor específico:

$$= \frac{tN}{1-v}\left(\int_0^{x_1} x_2 - x - x_1 + x\,dx + \int_{x_1}^{v_1} x_2 - x - x + x_1\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{C_{II}}^{x_2+\frac{1}{2}} x - x_2 - 1 + x - x_1\,dx + \int_{x_2+\frac{1}{2}}^{1} 1 - x + x_2 - 1 + x - x_1\,dx\right)$$

se utiliza a partir de aquí el dato $C_{II} = \frac{x_2+x_1}{2} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{tN}{1-v}\left((x_2 - x_1)x_1 + (x_2 + x_1)(v_1 - x_1) - (v_1^2 - x_1^2) + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2\right.$$

$$- \left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - (1 + x_2 + x_1)\left(x_2 + \frac{1}{2} - \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left. + (x_2 - x_1)\left(1 - x_2 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(x_2x_1 - x_1^2 + x_2v_1 - x_2x_1 + x_1v_1 - x_1^2 - v_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4} + x_2\right.$$

$$- \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) - \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2x_1}{2} - \frac{x_2x_1}{2} + \frac{x_1^2}{2}$$

$$\left. + x_2 - x_1 - x_2^2 + x_2x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2}\right)$$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(-x_1^2 + x_2v_1 + x_1v_1 - v_1^2 + \frac{1}{4} + x_2 - \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2x_1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{x_1}{2} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} + x_2 - x_1 + x_2x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2}\right)$$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{4}x_2^2 - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2x_1}{2} + x_2v_1 + x_1v_1 - v_1^2\right)$$

$$B_2 = \frac{N}{1-v}\left[\int_{v_2}^{x_2} p_1^* - c - t|x - x_2|\ dx + \int_{x_2}^{x_1+\frac{1}{2}} p_1^* - c - t|x - x_2|\ dx\right.$$

$$\left. + \int_{x_1+\frac{1}{2}}^{C_{II}} p_1^* - c - t|x - x_2|\ dx\right] =$$

Dado que $p_1^* = c + t|x - x_1|$, el integrando queda $t(|x - x_1| - |x - x_2|)$, que en cada región toma un valor específico:

$$= \frac{tN}{1-v}\left(\int_{v_2}^{x_2} x - x_1 - x_2 + x\,dx + \int_{x_2}^{x_1+\frac{1}{2}} x - x_1 - x + x_2\,dx \right.$$
$$\left. + \int_{x_1+\frac{1}{2}}^{C_{II}} 1 - x + x_1 - x + x_2\,dx = \right)$$

se utiliza a partir de aquí el dato $C_{II} = \frac{x_2+x_1}{2} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(x_2^2 - v_2^2 - (x_2 + x_1)(x_2 - v_2) + (x_2 - x_1)\left(x_1 + \frac{1}{2} - x_2\right)\right.$$
$$+ (1 + x_2 + x_1)\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{1}{2} - x_1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$\left. - \left(\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(-v_2^2 + x_2v_2 - x_2x_1 + x_1v_2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + 2x_2x_1 - x_2^2 - x_1^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \left(\frac{x_2^2}{4} + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2x_1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) - x_1^2 - \frac{1}{4} - x_1\right)\right)$$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(x_2^2 - v_2^2 - x_2^2 + x_2v_2 - x_2x_1 + x_1v_2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + 2x_2x_1 - x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_2}{2}\right.$$
$$\left. - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + x_1^2 + x_1\right)$$

$$= \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{4}x_2^2 - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2x_1}{2} + x_2v_2 + x_1v_2 - v_2^2\right)$$

Anexo 5.2.- Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_1(x_1, x_2, v_1, v_2)}{\partial x_1} = \dfrac{tN}{1-v}\left(-\dfrac{3}{2}x_1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_2}{2} + v_1\right) = 0 \\ \dfrac{\partial B_2(x_1, x_2, v_1, v_2)}{\partial x_2} = \dfrac{tN}{1-v}\left(-\dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_1}{2} + v_2\right) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se llega a:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x_1 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} - v_1 \\ -\frac{3}{2}x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{x_1}{2} - v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}v_1 \\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}v_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}v_2\right) + \frac{2}{3}v_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{x_1}{9} + \frac{2}{9}v_2 + \frac{2}{3}v_1$$

$$x_1^* = \frac{1}{4}(v_2 + 3v_1 - 1)$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}(v_2 + 3v_1 - 1) + v_2\right)$$

$$x_2^* = \frac{1}{4}(3v_2 + v_1 + 1)$$

Anexo 5.3.- Beneficios de cada empresa bajo equilibrio en localización.

$$\begin{aligned} B_1^* = \frac{tN}{1-v}\Bigg(& -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}(v_1 + 3v_2 + 1)\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}(3v_1 + v_2 - 1)\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}(v_1 + 3v_2 + 1) \\ & - \frac{1}{2}\frac{1}{4}(3v_1 + v_2 - 1) + \frac{1}{2}\frac{1}{4}(v_1 + 3v_2 + 1)\frac{1}{4}(3v_1 + v_2 - 1) \\ & + \frac{1}{4}(v_1 + 3v_2 + 1)v_1 + \frac{1}{4}(3v_1 + v_2 - 1)v_1 - v_1^2\Bigg) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(& -\frac{3}{16}(1 + 6v_2 + 2v_1 + 6v_2v_1 + 9v_2^2 + v_1^2 + 1 - 2v_2 - 6v_1 + 6v_2v_1 + v_2^2 \\ & + 9v_1^2) + 1 + v_2 - v_1 + \frac{1}{8}(-1 - 2v_2 + 2v_1 + 10v_2v_1 + 3v_2^2 + 3v_1^2) \\ & + v_1^2 + 3v_2v_1 + v_1 + 3v_1^2 + v_2v_1 - v_1 - 4v_1^2\Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(-\frac{1}{16}(6+12v_2-12v_1+36v_2v_1+30v_2^2+30v_1^2)+1+v_2-v_1 - \frac{1}{16}(2+4v_2-4v_1-20v_2v_1-6v_2^2-6v_1^2)+4v_2v_1\Big)$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(-\frac{1}{2}-v_2+v_1-v_2v_1-\frac{3}{2}v_2^2-\frac{3}{2}v_1^2+1+v_2-v_1+4v_2v_1\Big)$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(\frac{1}{2}+3v_2v_1-\frac{3}{2}v_2^2-\frac{3}{2}v_1^2\Big) = \frac{t}{8}\frac{N}{1-v}(1-3(v_2-v_1)^2)$$

$$= \frac{tN}{8}\frac{1-3v^2}{1-v}$$

$$B_2^* = \frac{tN}{1-v}\left(-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}(v_1+3v_2+1)\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}(3v_1+v_2-1)\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{4}(v_1+3v_2+1) - \frac{1}{2}\frac{1}{4}(3v_1+v_2-1)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}(v_1+3v_2+1)\frac{1}{4}(3v_1+v_2-1) + \frac{1}{4}(v_1+3v_2+1)v_2+\frac{1}{4}(3v_1+v_2-1)v_2-v_2^2\right)$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(-\frac{3}{16}(1+6v_2+2v_1+6v_2v_1+9v_2^2+v_1^2+1-2v_2-6v_1+6v_2v_1+v_2^2 + 9v_1^2)+1+v_2-v_1+\frac{1}{8}(-1-2v_2+2v_1+10v_2v_1+3v_2^2+3v_1^2) + v_2v_1+3v_2^2+v_2+3v_2v_1+v_2^2-v_2-4v_2^2\Big)$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(-\frac{1}{16}(6+12v_2-12v_1+36v_2v_1+30v_2^2+30v_1^2)+1+v_2-v_1 - \frac{1}{16}(2+4v_2-4v_1-20v_2v_1-6v_2^2-6v_1^2)+4v_2v_1\Big)$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(-\frac{1}{2}-v_2+v_1-v_2v_1-\frac{3}{2}v_2^2-\frac{3}{2}v_1^2+1+v_2-v_1+4v_2v_1\Big)$$

$$= \frac{t}{4}\frac{N}{1-v}\Big(\frac{1}{2}+3v_2v_1-\frac{3}{2}v_2^2-\frac{3}{2}v_1^2\Big) = \frac{t}{8}\frac{N}{1-v}(1-3(v_2-v_1)^2)$$

$$= \frac{tN}{8}\frac{1-3v^2}{1-v}$$

Anexo 5.4.- Excedente de los consumidores

Empresa 1:

$$\int_0^{v_1} e_1(x)dx + \int_{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}}^{1} e_1(x)dx =$$

$$= \int_0^{v_1} \bar{u} - c - t|x - x_2^*|\,dx + \int_{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}}^{x_2^*+\frac{1}{2}} \bar{u} - c - t|x - x_2^*|\,dx$$
$$+ \int_{x_2^*+\frac{1}{2}}^{1} \bar{u} - c - t|x - x_2^*|dx =$$

$$= \int_0^{v_1} \bar{u} - c - t(x_2^* - x)\,dx + \int_{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}}^{x_2^*+\frac{1}{2}} \bar{u} - c - t(x - x_2^*)\,dx$$
$$+ \int_{x_2^*+\frac{1}{2}}^{1} \bar{u} - c - t(1 - x + x_2^*)dx =$$

$$= \int_0^{v_1} \bar{u} - c - tx_2^* + tx\,dx + \int_{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}v_2+\frac{v_1}{4}+\frac{3}{4}} \bar{u} - c + tx_2^* - tx\,dx$$
$$+ \int_{\frac{3}{4}v_2+\frac{v_1}{4}+\frac{3}{4}}^{1} \bar{u} - c - t - tx_2^* + tx\,dx =$$

$$= (\bar{u} - c - tx_2^*)v_1 + \frac{t}{2}{v_1}^2 + (\bar{u} - c + tx_2^*)\left(\frac{3}{4}v_2 + \frac{v_1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{v_2+v_1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$- \frac{t}{2}\left(\left(\frac{3}{4}v_2 + \frac{v_1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{v_2+v_1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$+ (\bar{u} - c - t - tx_2^*)\left(1 - \left(\frac{3}{4}v_2 + \frac{v_1}{4} + \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$+ \frac{t}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{4}v_2 + \frac{v_1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2\right) =$$

$$= (\bar{u} - c - tx_2^*)v_1 + \frac{t}{2}{v_1}^2 + (\bar{u} - c + tx_2^*)\left(\frac{v_2}{4} - \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$
$$- \frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(9v_2^2 + v_1^2 + 9 + 6v_2v_1 + 18v_2 + 6v_1) - \frac{1}{4}(v_2^2 + v_1^2 + 1\right.$$
$$\left. + 2v_2v_1 + 2v_2 + 2v_1)\right) + (\bar{u} - c - t - tx_2^*)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}v_2 - \frac{v_1}{4}\right)$$
$$+ \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{16}(9v_2^2 + v_1^2 + 9 + 6v_2v_1 + 18v_2 + 6v_1)\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\left(v_1 + \left(\frac{v_2}{4} - \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}v_2 - \frac{v_1}{4}\right)\right)$$
$$+ tx_2^*\left(-v_1 + \frac{v_2}{4} - \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}v_2 - \frac{v_1}{4}\right)\right) + \frac{t}{2}\left({v_1}^2\right.$$
$$- \frac{1}{16}(9v_2^2 + v_1^2 + 9 + 6v_2v_1 + 18v_2 + 6v_1) + \frac{1}{16}(4v_2^2 + 4v_1^2 + 4$$
$$+ 8v_2v_1 + 8v_2 + 8v_1) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}v_2 + \frac{v_1}{2} + 1 - \frac{1}{16}(9v_2^2 + v_1^2 + 9$$
$$\left. + 6v_2v_1 + 18v_2 + 6v_1\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v_2 + v_1) + t\left(\frac{3}{4}v_2 + \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4}\right)(v_2 - v_1)$$
$$+ \frac{t}{2}\left({v_1}^2 - \frac{1}{16}(14v_2^2 - 2v_1^2 + 4v_2v_1 + 4v_2 - 4v_1 + 6)\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v_2 + v_1)$$
$$+ \frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)(3v_2^2 - v_1^2 - 2v_2v_1 + v_2 - v_1)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{16}(18{v_1}^2 - 14v_2^2 - 4v_2v_1 - 4v_2 + 4v_1 - 6)\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v_2 + v_1)$$
$$+ \frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(24v_2^2 - 8v_1^2 - 16v_2v_1 + 8v_2 - 8v_1 + 18{v_1}^2 - 14v_2^2 - 4v_2v_1\right.$$
$$\left. - 4v_2 + 4v_1 - 6)\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v_2 + v_1) + \frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(10v_2^2 + 10v_1^2 - 20v_2v_1 + 4v_2 - 4v_1 - 6)\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v_2 + v_1) + \frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(10(v_2 - v_1)^2 + 4(v_2 - v_1) - 6)\right) =$$

$$= (\bar{u} - c)\frac{1}{2}(1 - v) + \frac{t}{16}(5v^2 + 2v - 3)$$

Empresa 2:

$$\int_{v_2}^{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}} e_2(x)dx =$$

$$= \int_{v_2}^{x_1^*+\frac{1}{2}} \bar{u} - c - t|x - x_1^*|\, dx + \int_{x_1^*+\frac{1}{2}}^{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}} \bar{u} - c - t|x - x_1^*|\, dx =$$

$$= \int_{v_2}^{\frac{v_2}{4}+\frac{3}{4}v_1+\frac{1}{4}} \bar{u} - c - t(x - x_1^*)\, dx + \int_{\frac{v_2}{4}+\frac{3}{4}v_1+\frac{1}{4}}^{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}} \bar{u} - c - t(1 - x + x_1^*)\, dx =$$

$$= \int_{v_2}^{\frac{v_2}{4}+\frac{3}{4}v_1+\frac{1}{4}} \bar{u} - c + tx_1^* - tx\, dx + \int_{\frac{v_2}{4}+\frac{3}{4}v_1+\frac{1}{4}}^{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}} \bar{u} - c - t - tx_1^* + tx\, dx =$$

$$= (\bar{u} - c + tx_1^*)\left(\frac{v_2}{4} + \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4} - v_2\right) - \frac{t}{2}\left(\left(\frac{v_2}{4} + \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}\right)^2 - v_2^2\right)$$
$$+ (\bar{u} - c - t - tx_1^*)\left(\frac{v_2 + v_1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{v_2}{4} + \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}\right)\right)$$
$$+ \frac{t}{2}\left(\left(\frac{v_2 + v_1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{4} + \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}\right)^2\right) =$$

$$= (\bar{u} - c + tx_1^*)\left(-\frac{3}{4}v_2 + \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}\right)$$
$$- \frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(v_2^2 + 9v_1^2 + 6v_2v_1 + 2v_2 + 6v_1 + 1) - v_2^2\right)$$
$$+ (\bar{u} - c - t - tx_1^*)\left(\frac{v_2}{4} - \frac{v_1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \frac{t}{2}\left(\left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{v_2 + v_1}{2}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{16}(v_2^2 + 9v_1^2 + 6v_2v_1 + 2v_2 + 6v_1 + 1)\right) =$$

$$= (\bar{u}-c)\left(-\frac{3}{4}v_2+\frac{3}{4}v_1+\frac{1}{4}+\frac{v_2}{4}-\frac{v_1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+tx_1^*\left(-\frac{3}{4}v_2+\frac{3}{4}v_1+\frac{1}{4}-\frac{v_2}{4}+\frac{v_1}{4}-\frac{1}{4}\right)-t\left(\frac{v_2}{4}-\frac{v_1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}\left(v_2^2+9v_1^2+6v_2v_1+2v_2+6v_1+1-16v_2^2\right.\right.$$
$$-16\left(\frac{v_2^2}{4}+\frac{v_1^2}{4}+\frac{v_2v_1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{v_2+v_1}{2}\right)+v_2^2+9v_1^2+6v_2v_1+2v_2$$
$$\left.\left.+6v_1+1\right)\right)=$$
$$=(\bar{u}-c)\left(-\frac{1}{2}v_2+\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}\right)+t\left(\frac{v_2}{4}+\frac{3}{4}v_1-\frac{1}{4}\right)(-v_2+v_1)-t\left(\frac{v_2}{4}-\frac{v_1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(v_2^2+9v_1^2+6v_2v_1+2v_2+6v_1+1-16v_2^2-4v_2^2-4v_1^2\right.$$
$$\left.-8v_2v_1-4-8v_2-8v_1+v_2^2+9v_1^2+6v_2v_1+2v_2+6v_1+1)\right)=$$
$$=(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v_2+v_1)+\frac{t}{4}(v_2+3v_1-1)(-v_2+v_1)-\frac{t}{4}(v_2-v_1+1)$$
$$-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{16}(-18v_2^2+14v_1^2+4v_2v_1-4v_2+4v_1-2)\right)=$$
$$=(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v_2+v_1)+\frac{t}{4}(-v_2^2+3v_1^2-2v_2v_1+v_2-v_1)-\frac{t}{4}(v_2-v_1+1)$$
$$-\frac{t}{16}(-9v_2^2+7v_1^2+2v_2v_1-2v_2+2v_1-1)=$$
$$=(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v_2+v_1)+\frac{t}{4}(-v_2^2+3v_1^2-2v_2v_1-1)$$
$$-\frac{t}{16}(-9v_2^2+7v_1^2+2v_2v_1-2v_2+2v_1-1)=$$
$$=(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v_2+v_1)+\frac{t}{16}(5v_2^2+5v_1^2-10v_2v_1+2v_2-2v_1-3)=$$
$$=(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v_2+v_1)+\frac{t}{16}(5(v_2-v_1)^2+2(v_2-v_1)-3)$$
$$=(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v)+\frac{t}{16}(5v^2+2v-3)$$

Excedente total:

$$E(v) = \frac{N}{1-v}\left[\int_0^{v_1} e_1(x)dx + \int_{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}}^{1} e_1(x)dx + \int_{v_2}^{\frac{v_2+v_1}{2}+\frac{1}{2}} e_2(x)dx\right] =$$

$$= \frac{N}{1-v}\Big[(\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v) + \frac{t}{16}(5v^2+2v-3) + (\bar{u}-c)\frac{1}{2}(1-v) + \frac{t}{16}(5v^2+2v-3)\Big] =$$

$$= \frac{N}{1-v}\Big[(\bar{u}-c)(1-v) + \frac{t}{8}(5v^2+2v-3)\Big]$$

Anexo 5.5.- Proposición 5.1.

La función de bienestar del regulador medioambiental,

$$\Psi_{\mathrm{e}}(v) = -Nv^2 + (N\alpha - \beta)v + \beta$$

es una parábola invertida en v que alcanza su valor máximo en el punto

$$v^* = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{N}\right)$$

tal y como se demuestra a continuación:

$$\frac{\partial \Psi_{\mathrm{e}}}{\partial v} = -2Nv + N\alpha - \beta$$

$$\frac{\partial \Psi_{\mathrm{e}}}{\partial v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2Nv = N\alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{N\alpha - \beta}{2N}$$

q.e.d.

Se ha de verificar que el punto de máximo pertenece a la región factible del parámetro v:

$$v^* \in [0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{N}\right) \in [0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \left[\frac{\beta}{N}, \frac{\beta}{N} + 2\right)$$

6. Capítulo VI - Conclusiones

Tres modelos de regulación sobre competencia espacial se han presentado en este trabajo de tesis doctoral, cuyo objeto fundamental ha sido el de exponer los efectos de la modelización de una autoridad reguladora que busca influir en el comportamiento de los agentes intervinientes en todo proceso de la actividad económica, a saber, consumidores y empresas. El propósito de dicha autoridad se ve siempre definido por el interés o bienestar global de la sociedad, en una búsqueda de equilibrio que aúne la optimización de los intereses de todos los actores implicados.

Se han incorporado a los modelos diversas especificidades de la disciplina: costes de transporte convexos, mercados lineal y circular, formación de precios *mill* o de precios de entrega, todas ellas tratadas profusamente en la literatura relacionada; y añadiendo las figuras de la multa del regulador y el daño social y medioambiental producido, que estipulan las herramientas de dicha autoridad reguladora de cara a orientar la actividad productiva de las empresas, en base a las preferencias sociales relacionadas con el bienestar del conjunto de agentes que conforman la actividad económica.

En el primer modelo, el regulador especifica su característica de preferencia y las empresas atienden a dicha norma en base a evitar una multa directa y una penalización en sus consumidores en el caso de que se alejen de la producción preconizada. Se modeliza primero un caso en el que los consumidores no son conscientes del daño que infieren sobre el bienestar social al adquirir sus bienes a una empresa que se aleja de la recomendación regulatoria, mientras que a continuación sí se contempla dicho daño. En este segundo caso es necesario recurrir al caso simétrico de localización de las empresas en el espacio de mercado, con el objeto de poder obtener conclusiones en base a los parámetros, y es aquí en donde se plantea la idoneidad de estimar los parámetros de las funciones que intervienen en el modelo y trabajar con los valores numéricos obtenidos, de manera que la inferencia sea más asequible e interpretable, trabajo que trasciende los objetivos de esta tesis.

En el segundo de los modelos se realiza un estudio pormenorizado de las implicaciones de la decisión del regulador de implantar una zona medioambiental, en base a su sesgo respecto a los intereses enfrentados de consumidores y empresas. Se infiere que los valores de los parámetros determinan la decisión del regulador una vez que este ha establecido el peso que otorga a los intereses de los agentes que intervienen en el modelo, para llegar al óptimo de bienestar social a través de la implantación o no de una zona medioambiental que, en base a su tamaño, es la que maximiza las funciones de beneficio planteadas.

De hecho, cuando los efectos negativos de la congestión suponen un valor elevado respecto a los efectos positivos de la zona verde, la decisión óptima se acercará a la no implantación del área medioambiental, mientras que, en el caso contrario, los efectos positivos pueden llevar al caso extremo de recomendar una implantación de zona regulada que comprenda todo el espacio. En los casos intermedios, se observa como el tamaño óptimo de la zona verde se va ajustando según cambian los resultados de los parámetros y los pesos de los intereses de empresas y consumidores.

Para el tercer modelo se persigue de nuevo mejorar el bienestar social, bien a través de la mejoría del medioambiente, bien a partir de los beneficios mercantiles derivados de dicha mejoría, y así se estudia la posible implantación de una zona exclusiva de uso medioambiental en la ciudad circular. En esta modelización se trabaja con la asignación espacial de precios como estrategia de formación de los mismos, diferente a lo estudiado en los dos modelos anteriores. Se toma de nuevo una función de bienestar medioambiental-social ponderada para determinar la política óptima del regulador. Se concluye indicando la relación entre la dimensión óptima de la zona regulada y los efectos de impacto ambiental y de congestión.

Se realiza un primer análisis con un perfil de regulador *ecologista* puro, que no tiene en cuenta aspectos mercantiles sino únicamente la mejora ambiental y la congestión poblacional. En base a las preferencias de los consumidores, no se implantará zona verde cuando estos valoren principalmente los efectos de la congestión poblacional;

mientras que sí se procederá a la implantación de dicha zona verde cuando estos valoren positivamente los beneficios medioambientales, hasta llegar incluso al caso de la solución degenerada de zona medioambiental en todo el espacio de mercado. En un segundo análisis, se toma un planificador que valora exclusivamente efectos mercantiles a la hora de ejercer su autoridad reguladora, tanto de las empresas como de los consumidores. Se observa que, teniendo en cuenta los intereses de las empresas, aparece una zona regulada de tamaño relativamente pequeño, que es la configuración que optimiza sus beneficios, y no la ausencia de la misma, tal y como pudiera parecer en un primer término. Desde el punto de vista de los intereses de los consumidores, un área verde que ocupe todo el espacio de mercado es la solución que optimiza la función de bienestar, en lo que supone una degeneración matemática del problema de optimización, que no es realista desde el punto de vista práctico.

Una visión general de los resultados permite afirmar que la complejidad de los mismos supone un serio reto de cara a proporcionar una interpretación realista de la situación, y por tanto modelizaciones particulares, con funciones que incorporen parámetros estimados de las distintas variables que se proponen en la caracterización de los agentes que intervienen en los modelos, permitirá arrojar luz sobre los supuestos que al final de cada capítulo quedan abiertos.

7. Capítulo VII - Bibliografía

Anderson, S. (1987). Spatial competition and price leadership. *International Journal of Industrial Organization*, 5(4), 369-398.

Anderson, S. P. (1988). Equilibrium existence in the linear model of spatial competition. *Economica*, 479-491.

Anderson, S. P. & De Palma, A. (1988). Spatial price discrimination with heterogeneous products. *The Review of Economic Studies*, 55(4), 573-592.

Anderson, S.P. & Thisse, J. F. (1988). Price discrimination in spatial competitive markets. *European Economic Review*, Vol. 32(2), 578-590.

Anderson, S. & Neven, D. (1991). Cournot competition yield spatial agglomeration. *International Economic Review*, Vol. 32, 793-808.

Anderson, S., de Palma, A. & Thisse, J. F. (1992), Discrete choice theory of product differentiation. *MIT Press*.

Anderson, S. P. & Engers, M. (1994). Spatial competition with price-taking firms. *Economica*, 125-136.

Anderson, S. P., Goeree, J. K. & Ramer, R. (1997). Location, location, location. *Journal of Economic Theory*, 77(1), 102-127.

Anton, J. J. & Gertler, P. J. (2004). Regulation, local monopolies and spatial competition. *Journal of Regulatory Economics*, 25(2), 115-141.

Arguedas, C. & Hamoudi, H. (2008). A note on product differentiation under concave transportation costs. *Cuadernos de Economía*, 31(85), 91-106.

Arguedas, C., Hamoudi, H. & Saez, M. (2008). Equilibrium Nonexistence in Spatial Competition with Quadratic Transportation Costs. *Public Finance, Monetary Policy and Market Issues*, 343.

Bárcena-Ruiz, J. C. & Garzón, M. B. (2003). Mixed duopoly, merger and multiproduct firms. *Journal of Economics*, 80(1), 27-42.

Bárcena-Ruiz, J. C., Casado-Izaga, F. J. & Hamoudi, H. (2014-a). Optimal zoning of a mixed duopoly. *The Annals of Regional Science*, 52(1), 141-153.

Bárcena-Ruiz, J. C., Casado-Izaga, F. J., Hamoudi, H. & Rodríguez, I. (2014-b). Optimal zoning in the unconstrained Hotelling game. *Papers in Regional Science*.

Baron, D. P. & Myerson, R. B. (1982). Regulating a monopolist with unknown costs. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 911-930.

Benassi, C., Chirco, A. & Scrimitore, M. (2007). Spatial discrimination with quantity competition and high transportation costs: a note. *Economics Bulletin*, 12(1), 1-7.

Bertrand, J. (1883). Review of Walras's théorie mathématique de la richesse sociale and Cournot's recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses in Cournot oligopoly: Characterization and applications. *Edited by A. F. Daughety* (pp. 73-81). *Cambridge University Press*.(1988).

Chamorro-Rivas, J. M. (2000). Spatial dispersion in Cournot competition. *Spanish Economic Review*, 2(2), 145-152.

Chen, C. S. & Lai, F. C. (2008). Location choice and optimal zoning under Cournot competition. *Regional Science and Urban Economics*, 38(2), 119-126.

Colombo, S. (2012). On optimal zoning in a linear town with Cournot competitors. *Letters in Spatial and Resource Sciences*, 5(2), 113-118.

Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot*. chez L. Hachette.

Dasgupta, P. & Maskin, E. (1986). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory. *The Review of economic studies*, 53(1), 1-26.

D'Aspremont, C., Gabszewicz, J. J. & Thisse, J. F. (1979). On Hotelling's "Stability in competition". *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1145-1150.

D'Aspremont, C., Gabszewicz, J. J. & Thisse, J. F. (1983). Product differences and prices. *Economics Letters*, 11(1-2), 19-23.

Duranton, G. (2008). Spatial economics. *The new Palgrave dictionary of economics*, 2.

Eaton, B. C. & Lipsey, R. G. (1975). The principle of minimum differentiation reconsidered: some new developments in the theory of spatial competition. *The Review of Economic Studies*, 27-49.

Economides, N. (1986). Minimal and maximal product differentiation in Hotelling's duopoly. *Economics Letters*, 21(1), 67-71.

Economides, N. (1989). Quality variations and maximal variety differentiation. *Regional Science and Urban Economics*, 19(1), 21-29.

Economides, N. (1989). Symmetric equilibrium existence and optimality in differentiated product markets. *Journal of Economic Theory*, 47(1), 178-194.

Economides, N. (1993). Hotelling's “Main Street” with more than two competitors. *Journal of Regional Science*, 33(3), 303-319.

Fetter, F. A. (1924). The economic law of market areas. *The Quarterly Journal of Economics*, 520-529.

De Frutos, M. A., Hamoudi, H. & Jarque, X. (1999). Equilibrium existence in the circle model with linear quadratic transport cost. *Regional Science and Urban Economics*, 29(5), 605-615.

De Frutos, M. A., Hamoudi, H. & Jarque, X. (2002). Spatial competition with concave transport costs. *Regional Science and Urban Economics*, 32(4), 531-540.

De Palma, A., Ginsburgh, V., Papageorgiou, Y. Y. & Thisse, J. F. (1985). The principle of minimum differentiation holds under sufficient heterogeneity. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 767-781.

Gabszwicz, J. J. & Thisse, J. F. (1986). On the nature of competition with differentiated products. *The Economic Journal*, 160-172.

Greenhut, J. G. & Greenhut, M. L. (1975). Spatial price discrimination, competition and locational effects. *Economica*, 42(168), 401-419.

Gupta, B. (1992). Sequential entry and deterrence with competitive spatial price discrimination. *Economics Letters*, 38(4), 487-490.

Gupta, B., Pal, D. & Sarkar, J. (1997). Spatial Cournot competition and agglomeration in a model of location choice. *Regional Science and Urban Economics*, 27(3), 261-282.

Gupta, B., Lai, F. C., Pal, D., Sarkar, J. & Yu, C. M. (2004). Where to locate in a circular city? *International Journal of Industrial Organization*, 22(6), 759-782.

Hamilton, J. H., Thisse, J. F. & Weskamp, A. (1989). Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot in a model of location choice. *Regional Science and Urban Economics*, 19(1), 87-102.

Hamilton, J. H., Klein, J. F., Sheshinski, E. & Slutsky, S. M. (1994). Quantity competition in a spatial model. *Canadian Journal of Economics*, 903-917.

Hamoudi, H. & Moral, M. J. (2005). Equilibrium existence in the linear model: concave versus convex transportation costs. *Papers in Regional Science*, 84(2), 201-219.

Hamoudi, H., Rodriguez, I. & Martín-Bustamante, M. S. (2011). Product differentiation in a regulated market: a welfare analysis. *International Advances in Economic Research*, 17(4), 486.

Hamoudi, H. & Martín-Bustamante, M. S. (2011). Revisiting price equilibrium existence in the linear-city model of spatial competition. *Papers in Regional Science*, 90(1), 179-196.

Hamoudi, H. & Risueño, M. (2012). The effects of zoning in spatial competition. *Journal of Regional Science*, 52(2), 361-374.

Hamoudi, H., Rodríguez Iglesias, I. M. & Martín-Bustamante, M. S. (2015). The equivalence of convex and concave transport cost in a circular spatial model with and without zoning. *Estudios de economía*, 42(1), 5-20.

Henderson, J. V. (1991). Optimal regulation of land development through price and fiscal controls. *Journal of Urban Economics*, 30(1), 64-82.

Hinloopen, J. (2002). Price regulation in a spatial duopoly with possible non-buyers. *The Annals of Regional Science*, 36(1), 19-39.

Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *The Economic Journal*, Vol. 39, No. 153, 41–57.

Hoover, E. M. (1937). Spatial price discrimination. *The Review of Economic Studies*, 4(3), 182-191.

Hurter, A. P. & Lederer, P. J. (1985). Spatial duopoly with discriminatory pricing. *Regional Science and Urban Economics*, 15(4), 541-553.

Irmen, A. & Thisse, J. F. (1998). Competition in multi-characteristics spaces: Hotelling was almost right. *Journal of Economic Theory*, 78(1), 76-102.

Kats, A. (1995). More on Hotelling's stability in competition. *International Journal of Industrial Organization*, 13(1), 89-93.

Lai, F. C. & Tsai, J. F. (2004). Duopoly locations and optimal zoning in a small open city. *Journal of Urban Economics*, 55(3), 614-626.

Lambertini, L. (1994). Equilibrium locations in the unconstrained Hotelling game. *Economic notes - Siena -*, 438-438.

Lambertini, L. (1997). Unicity of the equilibrium in the unconstrained Hotelling model. *Regional Science and Urban Economics*, 27(6), 785-798.

Lambertini, L., Poddar, S. & Sasaki, D. (2002). Research joint ventures, product differentiation, and price collusion. *International Journal of Industrial Organization*, *20*(6), 829-854.

Lederer, P. J. & Hurter Jr, A. P. (1986). Competition of firms: discriminatory pricing and location. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 623-640.

Lerner, A. P. & Singer, H. W. (1937). Some notes on duopoly and spatial competition. *The Journal of Political Economy*, 145-186.

Matsumura, T., Ohkawa, T. & Shimizu, D. (2005). Partial agglomeration or dispersion in spatial Cournot competition. *Southern Economic Journal*, 224-235.

Matsumura, T. & Shimizu, D. (2006). Cournot and Bertrand in shipping models with circular markets. *Papers in Regional Science*, 85(4), 585-598.

Matsumura, T. & Matsushima, N. (2011). Collusion, agglomeration, and heterogeneity of firms. *Games and Economic Behavior*, 72(1), 306-313.

Matsumura, T., & Matsushima, N. (2012). Locating outside a linear city can benefit consumers. *Journal of Regional Science*, 52(3), 420-432.

Matsushima, N. (2001). Cournot competition and spatial agglomeration revisited. *Economics Letters*, 73(2), 175-177.

Mayer, T. (2000). Spatial Cournot competition and heterogeneous production costs across locations. *Regional Science and Urban Economics*, 30(3), 325-352.

Miceli, T. J. (1992). Optimal fiscal zoning when the local government is a discriminating monopolist. *Regional Science and Urban Economics*, 22(4), 579-596.

Mills, D. E. (1989). Is zoning a negative-sum game? *Land Economics*, 65(1), 1-12.

Neven, D. J. (1987). Endogenous sequential entry in a spatial model. *International Journal of Industrial Organization*, 5(4), 419-434.

Osborne, M. J. & Pitchik, C. (1987). Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 911-922.

Ottaviano, G. I. & Puga, D. (1998). Agglomeration in the global economy: a survey of the 'new economic geography'. *The World Economy*, 21(6), 707-731.

Pal, D. (1998). Does Cournot competition yield spatial agglomeration? *Economics Letters*, 60(1), 49-53.

Pal, D. & Sarkar, J. (2002). Spatial competition among multi-store firms. *International Journal of Industrial Organization*, 20(2), 163-190.

Salop, S. C. (1979). Monopolistic competition with outside goods. *The Bell Journal of Economics*, 141-156.

Shimizu, D. (2002). Product differentiation in spatial Cournot markets. *Economics Letters*, 76(3), 317-322.

Tabuchi, T. & Thisse, J. F. (1995). Asymmetric equilibria in spatial competition. *International Journal of Industrial Organization*, 13(2), 213-227.

Tabuchi, T. & Thisse, J. F. (2011). A new economic geography model of central places. *Journal of Urban Economics*, 69(2), 240-252.

Tsai, J. F., Peng, S. K. & Lai, F. C. (2006). Spatial duopoly with zoning. *The Annals of Regional Science*, 40(3), 515-530.

Wheaton, W. C. (1993). Land capitalization, Tiebout mobility, and the role of zoning regulations. *Journal of Urban Economics*, 34(2), 102-117.