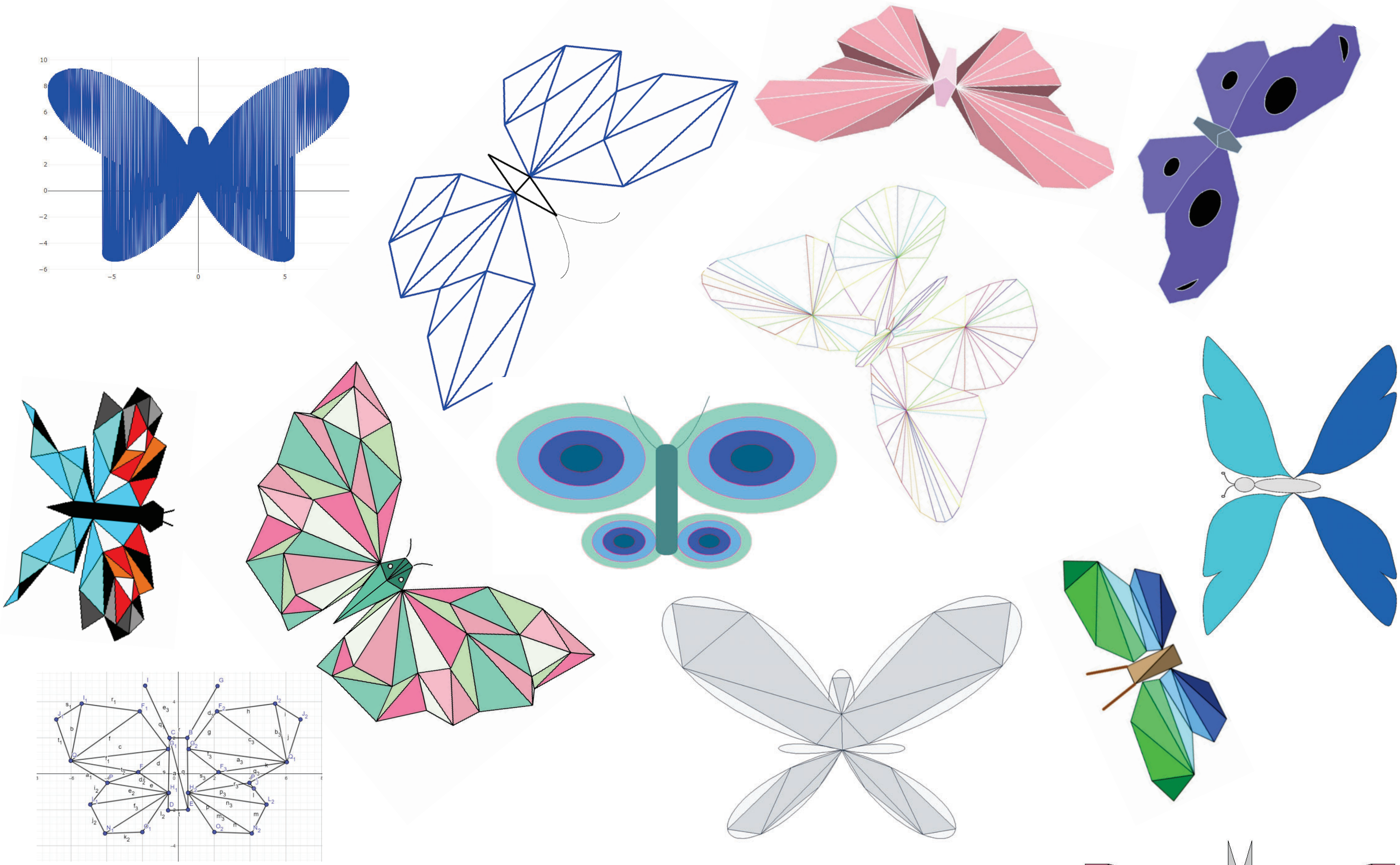
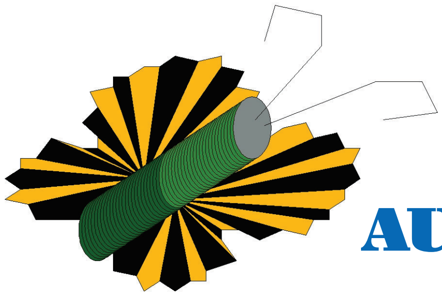
Ciencias Experimentales

Universidad Rey Juan Carlos | Servicio de Publicaciones

ACTAS DÍA DE PI 2022

ISBN: 978-84-09-38264-4



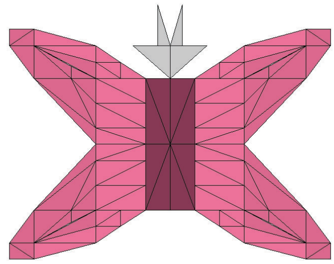


DIA DE π 2022

14 DE MARZO

9:00-18:00

AULA 003 AULARIO 1



HORA	Ponente	Título
9:30	**Inauguración**	**Inauguración**
10:00	Fernando Blasco	Matemáticas recreativas
10:40	Ines María Gómez Chacón	Educación matemática basada en la indagación. Ejemplos para la enseñanza universitaria
11:20	Juan Carlos Aguado Franco	Taller: Cálculo mágico mental y de probabilidades
12:00	Alejandro Garcia del Amo	Máster en matemáticas
12:20	**Coffe Break**	**Coffe Break**
12:40	Marco Castrillón	ESTALMAT / Olimpiadas matemáticas
13:20	Eugenio Roanes Lozano	Cálculo simbólico y educación matemática
14:00	Luis José Rodríguez	La educación estocástica o cómo en la estadística hay vida más allá de la media
14:40	**COMIDA**	**COMIDA**
16:00	Taller: Propuesto por la ANEM	Por determinar
16:30	Clausura	Clausura

Gráficos realizados por los estudiantes de Geometría Computacional de GMAT

Organizadores

- **Clara Simón de Blas**
  Doctora en matemáticas en la UCM. Es profesora en la Escuela Técnica y Superior de Ingeniería Informática de la Universidad Rey Juan Carlos y coordinadora de los grados de matemáticas de la URJC, apasionada de las matemáticas, la enseñanza y la investigación. Se dedica a la Estadística y la Investigación Operativa, aplicaciones estadísticas en medicina, agricultura y otras áreas, problemas de transporte, logística humanitaria, series temporales, eficiencia y ranking de organizaciones y redes sociales.
- **Esther García González**
  Profesora Titular del área de Matemática Aplicada de la URJC. Lleva en esta universidad desde 2004 y ha sido profesora en el grado de matemáticas desde sus inicios en el año 2011. Ha representado a nuestra universidad, junto a la coordinadora del grado Clara Simón, en las últimas cinco ediciones presenciales de la Conferencia de Decanos de matemáticas, y ha actuado como vocal de la URJC en la comisión de materia de Matemáticas II en las Pruebas de Acceso a la Universidad durante siete cursos académicos. Su investigación se centra fundamentalmente en las álgebras asociativas, aunque también ha colaborado con varios compañeros del área en el estudio de las redes complejas.
- **Guillermo Vera de Salas**
  Profesor visitante del área de Matemática Aplicada de la URJC. Su investigación se centra en las álgebras no asociativas.
- **Rubén José Muñoz Alcázar**
  Profesor visitante del área de Matemática Aplicada de la URJC. Su investigación se centra en las álgebras no asociativas. Como profesor de primer curso en varias asignaturas de la URJC, además de enseñar matemáticas como herramienta fundamental en muchas disciplinas, su objetivo es trasmitir su pasión por esta ciencia.
- **Victoria Ruiz**
  Posee el Grado en Matemáticas y Estadística por la UCM, Máster en tratamiento Estadístico Computacional de la Información por la UCM y Doctorado en Tecnologías de la Información y las Comunicaciones por la URJC. Actualmente es Ayudante Doctor en la URJC. Su interés se centra en los sistemas de Visión Artificial, Deep Learning, Data Mining y Machine Learning; y en problemas de Reconocimiento de Texto Manuscrito y Verificación de Firmas.
- **Carmen Lancho Martín**
  Matemática y actualmente tiene una beca para realizar el doctorado en la URJC.

- **Marina Cuesta Santa Teresa**
  Desde pequeña le gustaron las matemáticas y por ello estudió Matemáticas y Estadística en la Universidad Complutense. Tiene una beca para realizar el doctorado en la Universidad Rey Juan Carlos.
- **Azahara Andújar Muñoz-Quirós**
  Estudia el doble grado en Ingeniería del Software y Matemáticas. Le encantan las matemáticas desde muy pequeñita y siempre ha querido dedicarse a algo relacionado con ellas. Aparte, le gusta mucho jugar a videojuegos, ver series y películas.
- **Elena Carreras**
  Estudia el Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. Es una persona trabajadora que le gustan los retos, por eso piensa que ha elegido el grado correcto. Le gusta mucho aprender y leer sobre matemáticas. Además, disfruta mucho con el deporte y el aire libre con la familia y amigos.
- **Silvia Ventura Cabrejas**
  Estudia el Doble Grado de Matemáticas e Ingeniería del Software. Es delegada de la titulación de matemáticas. Desde siempre le ha gustado leer y desde hace unos años incorporó las matemáticas recreativas a la lista. Entre sus otros hobbies se encuentran el senderismo y viajar.

Día de π 2022
14 de marzo de 2022
Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles

Educación matemática basada en la indagación. Ejemplos para la enseñanza universitaria

Inés M. Gómez-Chacón
Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Resumen

La conferencia ofrece una reflexión sobre el enfoque de Inquiry Based Mathematics Education (IBME) en la enseñanza universitaria de matemáticas. Este enfoque se puede definir como una forma de enseñar en la que se invita a los estudiantes a trabajar de forma similar a como trabajan los matemáticos. Se hace hincapié en la participación activa y la responsabilidad del alumno en la construcción del conocimiento. Se combinan métodos inductivos y deductivos y se insiste en la pragmática de la vida real y la práctica profesional (Artigue y Blomhøj, 2013). Se presentan resultados de algunas actividades implementadas en el marco del proyecto europeo PLATINUM (Partnership for Learning and Teaching IN University Mathematics). Un consorcio de 8 universidades de 7 países (Universidad de Agder, Noruega; Universidad de Ámsterdam, Países Bajos; Universidad de Masaryk, República Checa; Universidad Tecnológica de Brno, República Checa; Universidad de Loughborough, Inglaterra; Universidad de Hannover, Alemania, Universidad Complutense de Madrid, España; Universidad Borys Grinchenko de Kiev, Ucrania) que desarrolla enfoques de educación matemática basados en la indagación (IBME) en la enseñanza de las matemáticas. Para llevar a cabo esta finalidad se creó una comunidad de indagación (CoI) para el intercambio sobre las posibilidades y límites de la aplicación y realización de los distintos enfoques de IBME, considerando los contextos locales e internacionales. El desarrollo de materiales, tanto para el aula

como para la formación del profesorado universitario de matemáticas, se puede encontrar en Gómez-Chacón, Hochmuth, Jaworski, et. al. (2021). Para ejemplificar las características de las tareas desde la indagación y considerando central el contenido matemático se seleccionaron tres tipologías de actividades:

1. Tareas matemáticas para el aprendizaje de la demostración, se ejemplifica mediante un problema abierto, donde se deben utilizar heurísticas matemáticas de resolución de problemas para la identificación de estructuras no numéricas, gráficas y geométricas involucradas en la demostración.

2. Proyecto La enseñanza del álgebra lineal y los videojuegos. Transformaciones afines y movimientos rígidos, un proyecto de investigación abierto para el estudiante de grado en Desarrollo de Videojuegos. Se proponen técnicas y recursos específicos para la vinculación del conocimiento intra-matemático y el conocimiento interdisciplinar (véase capítulo 7 en Gómez-Chacón, Hochmuth, et al. (2021).

3. Proyectos de Aprendizaje-Servicio en Matemáticas en el ámbito docente universitario para la asignatura de Trabajo de Fin de Grado del Grado de Ingeniería Matemática realizado en colaboración con ayuntamientos e instituciones públicas. De forma específica se describe la modelización matemática de rutas por vértices como un problema del Viajante (TSP) en el proyecto ApS "Alcobendas cerca de tí", una colaboración entre la Cátedra Extraordinaria Miguel de Guzmán de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) y el Consejo de la Juventud de Alcobendas (CJA) (Madrid) (ver desarrollo del proyecto en Gómez-Chacón, et. al, 2020).

Referencias:

1. Artigue, M., Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM Mathematics Education, 45(6), 797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6.

2. Gómez-Chacón, I. M., Ortuño, T., de la Fuente, A. (2020). Service-learning in Mathematics: Use of learning trajectories in university education. REDU. Revista de Docencia Universitaria, 18(1), 213-231. https://doi.org/10.4995/redu.2020.12079

3. Gómez-Chacón, I.M., Hochmuth, R., Jaworski, B., Rebenda, J., Ruge, J., Thomas. S. (Eds) (2021) Inquiry in University Mathematics Teaching and

Learning: The Plati-num Project. Brno: MUNI, Masaryk University Editor. https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021.

Día de π 2022
14 de marzo de 2022
Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles

Cálculo mágico mental y de probabilidades

Juan Carlos Aguado Franco
Universidad Rey Juan Carlos
juancarlos.aguado@urjc.es

Resumen

La magificación consiste en la introducción de la magia en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Es un término creado como juego de palabras con "gamificación", solo con el cambio de orden de dos letras. La justificación del uso de la magia en la enseñanza viene dada por los estudios acerca de cómo aprende el cerebro, en los que se afirma que el cerebro, para aprender, necesita emoción, que despierta la curiosidad y favorece la atención, de forma que todo ello lleva a un mayor aprendizaje y memorización. Indudablemente, hay más formas de conseguirlo, pero la magia es un instrumento ideal para lograr emoción, curiosidad, atención y aprendizaje. De hecho, existen estudios experimentales en los que se ha apreciado que la actividad cerebral de un estudiante en una clase magistral era similar a lo que ocurría estando en casa tumbado en el sofá viendo la televisión, tras haber llevado un sensor en la muñeca durante 7 días las 24 horas (Poh et al., 2010). En efecto, el aprendizaje se facilita a través de los retos, de la curiosidad, de lo inesperado. Y eso es así porque cuando se superan las expectativas iniciales se activa el llamado sistema de recompensa cerebral que libera dopamina y que conecta regiones del sistema límbico o emocional con otras de la corteza frontal responsables de lo cognitivo (Howard-Jones, 2014). Esa emoción necesaria para el aprendizaje se puede conseguir, por ejemplo, con juegos de magia como el cálculo de sumas o la realización de raíces cúbicas mentalmente por parte del profesor, más rápido que una calculadora. Para ilustrar conceptos relacionados con la probabilidad, se pueden utilizar juegos como el 1, 2, 3 y 4; los cuatro reyes; la adivinación de la ficha del dominó que va a construir

una persona del público; la adivinación de una carta elegida tanto por decisiones de distintas personas del público como introduciendo el azar con el lanzamiento de un dado, etc.

Referencias:

1. Howard-Jones, Paul (2014). Neuroscience and Education: a review of educational interventions and approaches informed by Neuroscience. Education Endowment Foundation.

2. Poh M. Z., Swenson, N. C., Picard, R. W. (2010): "A wearable sensor for unobtrusive, long-term assessment of electrodermal activity". IEEE Transactions on Biomedical Engineering 57 (5), 1243-1252.

Día de π 2022
14 de marzo de 2022
Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles

Máster en Matemáticas Avanzadas

Alejandro J. García del Amo Jiménez
Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, ESCET, URJC
alejandro.garciadelamo@urjc.es

Resumen

En esta sesión se presentó el *Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas* por la Universidad Rey Juan Carlos (URJC), que empezará su andadura el próximo curso académico 2022-2023.

Esta titulación permite completar la formación académica de los graduados, pudiendo iniciarse una carrera docente e investigadora en Universidades e Institutos de Investigación, o en Departamentos de I+D+i del sector privado, especialmente en empresas de los sectores tecnológico, financiero e informático

Los 60 ECTS del *Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas* se han organizado en un curso académico articulado en dos semestres. El plan de estudios contempla 60 ECTS obligatorios para todos los alumnos de este Máster presencial impartido en el Campus de Móstoles. Los 60 ECTS del *Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas* están distribuidos en los dos semestres según tres módulos: *Formación Avanzada en Matemáticas*, *Metodología de la Investigación* y *Trabajo fin de Máster*.

El *Módulo de Formación Avanzada en Matemáticas*, impartido en el primer y segundo semestre y formado por siete asignaturas obligatorias, permite completar la formación fundamental avanzada de los alumnos. Por su parte, el *Módulo de*

Metodología de la Investigación conteniendo dos asignaturas obligatorias, *Metodología de la Investigación en Matemáticas*, que introduce a los alumnos en temas generales de la formación científica como la selección de un tema de investigación, la búsqueda bibliográfica, la escritura y la revisión de trabajos científicos, y la comunicación de los resultados obtenidos, y *Seminario de Investigación en Matemáticas*, consistente en la asistencia a un conjunto de charlas y jornadas sobre temas de investigación que tienen interés por su novedad, actualidad, etc. Finalmente, el *Módulo del Trabajo fin de Máster* permite valorar los contenidos formativos recibidos, capacidades, competencias y habilidades adquiridas durante el periodo de docencia del Máster mediante la realización por parte del estudiante, de forma individual, de un proyecto, memoria o estudio original e inédito bajo la orientación y supervisión de uno o más directores.

Día de π 2022
14 de marzo de 2022
Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles

El proyecto ESTALMAT

Marco Castrillón López
Universidad Complutense de Madrid
mcastri@mat.ucm.es

Resumen

Hace más de 20 años empezó su singladura el Proyecto ESTALMAT en la Comunidad de Madrid promovido por el Prof. Miguel de Guzmán y con el apoyo institucional de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Desde ese momento, el proyecto se ha extendido a muchas comunidades autónomas y muchas generaciones han podido participar de su singular propósito: el de detectar y estimular el talento matemático. Diseñado para niños y niñas de 12 y 13 años de edad, en el proyecto se desarrollan actividades que, sin adelantar conocimientos matemáticos de las enseñanzas regladas, sirvan para enriquecer las cualidades matemáticas de participantes. En la charla se describirán los objetivos, la prueba de selección y algunas de las actividades. También se analizará el vínculo con las olimpiadas y competiciones de carácter matemático. Por último, se discutirán algunos datos del perfil del estudiantado y de los frutos que ha cosechado el proyecto en su provechosa vida.

Referencias:

1. www.estalmat.org

Día de π 2022
14 de marzo de 2022
Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles

Cálculo simbólico y educación matemática

Eugenio Roanes Lozano
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@ucm.es

Resumen

Se muestra una sucinta visión de los sistemas de cáculo simbólico y las ventajas que supone su utilización incluso a nivel de matemática elemental.

1. ¿Qué es el cálculo simbólico o álgebra computacional?

¿Qué es el cálculo simbólico o álgebra computacional? Según R. Loos [1]:

> "Computer Algebra is that part of Computer Science which
> designs, analyzes, implements and applies algebraic algorithms"

(en inglés se denomina "Computer Algebra", en alemán "Computer-Algebra" y en francés "Calcul Formel").

Los sistemas de cómputo algebraico o sistemas de cálculo simbólico o sistemas de álgebra computacional –"Computer Algebra Systems" (CAS) en inglés– tienen dos características específicas, que los distinguen de un otros sistema de matemática computacional y de los lenguajes de programación habituales:

- si no se especifica lo contrario, utilizan aritmética exacta,
- pueden manejar variables no asignadas.

2. Aritmética en coma flotante y aritmética exacta

La aritmética en coma flotante ("Floating Point Arithmetic") viene implementada en hardware y considera un número fijo de dígitos para representar cualquier número. Ello implica asumir muchos inconvenientes:

- Hay una cota superior y una cota inferior para los números admisibles.
- Se producen truncamientos y redondeos (necesariamente en los racionales cuya expresión decimal es periódica y en los irracionales).
- La correspondencia:

  $$\mathbb{Z} \longrightarrow \{\text{representaciones de enteros}\}$$

  deja de ser una biyección. Por ejemplo

  $$12345678901234567890$$

  y el entero siguiente

  $$12345678901234567891$$

  se representan ambos como

  $$.1234567890e20$$

  Pero esto desencadena terribles consecuencias: por ejemplo la operación suma en $\mathbb{Z}$ deja de ser asociativa (observación debida al profesor Rob Corless). Consideremos en *FMSLogo* (es indiferente el lenguaje de programación –si trabaja en mayor precisión basta tomar números consecutivos lo suficientemente grandes para que los pase a notación científica–):

  ```
  print (12345678901234567891 + -12345678901234567890) + -1
  -1
  print 12345678901234567891 + (-12345678901234567890 + -1)
  0
  ```

- ...

La aritmética en coma flotante es muy conveniente para los computadores, pues permite conocer la cantidad de memoria necesaria en cada momento (por ejemplo, para almacenar una matriz numérica 3×3).

Mientras, la aritmética exacta es la que utilizamos desde que comenzamos a aprender matemáticas (por ejemplo los números racionales se tratan como fracciones, no se aproximan). Al tener que implementarse en software es más lenta, además de por el posible crecimiento de expresiones que involucren, por ejemplo, irracionales. Como ventaja, no se producen errores.

El uso de aritmética en coma flotante puede llevar a que un programa tal que el proceso matemático subyacente sea correcto y que esté correctamente escrito en un lenguaje computacional, devuelva un resultado totalmente incorrecto.

Ejemplos típicos son aquellos en que se comprueba si algo es cero o no (evaluar el discriminante de una ecuación de segundo grado, comprobar la compatibilidad de un sistema lineal, etc.). Un ejemplo en *Scratch 3* se puede encontrar en las Figuras 1 y 2.

Este mismo ejemplo también da problemas en *GNU Octave 6.4.0* (Figura 3): se aplican procesos diferentes para calcular determinante y rango y para el cálculo directo.

Pero lo más sorprendente es que trabajar en 16 dígitos de precisión en aritmética en coma flotante no asegura tener, al menos, por ejemplo, 12 dígitos correctos. Si elevamos 1,000000000001 al cuadrado cincuenta veces con 16 dígitos de precisión obtenemos:

$$.9377933075763701e489$$

mientras que si lo hacemos con 32 dígitos de precisión obtenemos:

$$.93781401111740627394143271038401e489$$

¡y sólo coinciden las tres primeras cifras! (estos cálculos han sido realizados con el CAS *Maple* [4-7], que permite trabajar en aritmética en coma flotante de precisión variable).

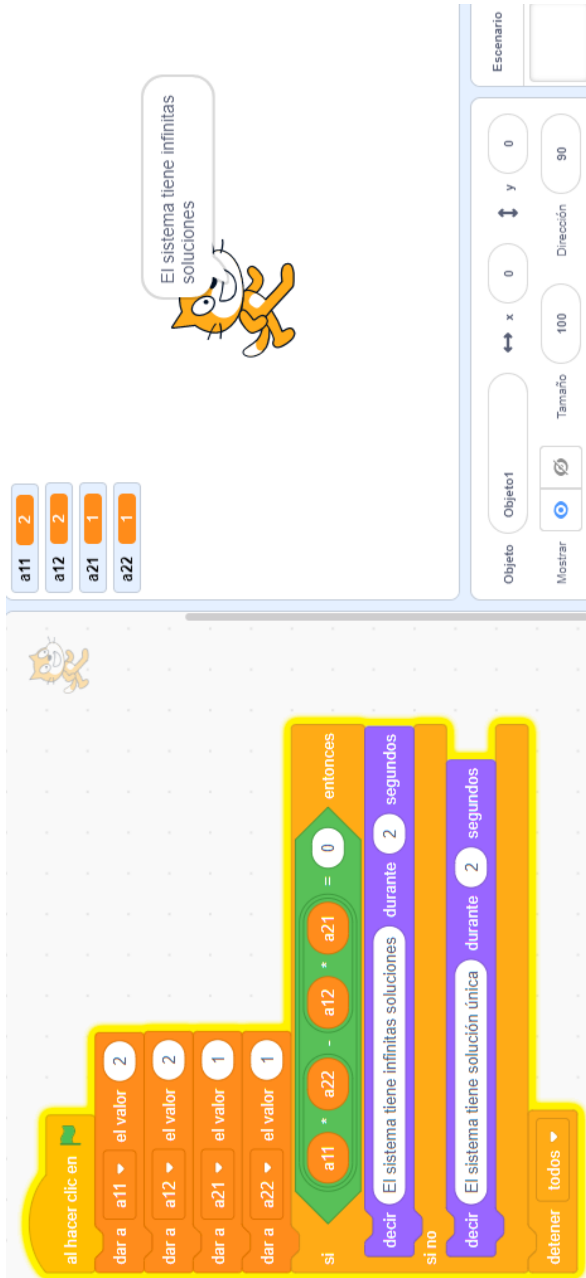


Figura 1: Un programa (correcto) calcula correctamente el número de soluciones de un sistema lineal homogéneo con dos ecuaciones y dos incógnitas.

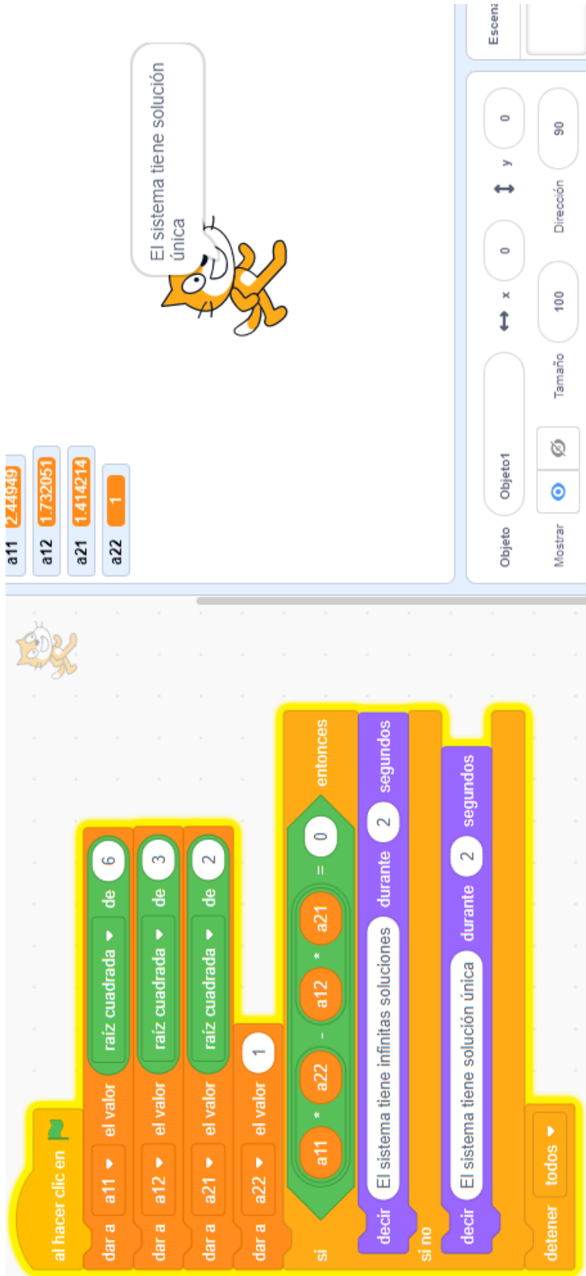


Figura 2: El mismo programa (correcto) NO calcula correctamente el número de soluciones de otro sistema lineal homogéneo con dos ecuaciones y dos incógnitas.

```
>> A=[sqrt(6),sqrt(3);sqrt(2),1]
A =

   2.4495   1.7321
   1.4142   1.0000

>> det(A)
ans = 0
>> rank(A)
ans = 1
>> sqrt(6)*1-sqrt(3)*sqrt(2)
ans = -4.4409e-16
>>
```

Figura 3: Un cálculo en GNU Octave 6.4.0: rango y determinante son calculados correctamente, pero si se escribe la expresión correspondiente al determinante de esa matriz, no se obtiene el mismo resultado.

3. Manejo de variables no asignadas

Por otra parte, el que los CAS puedan manejar variables no asignadas hace que puedan trabajar de un modo cualitativamente distinto a los lenguajes computacionales usuales. En cualquier lenguaje podemos calcular $x+y$ para cualesquiera valores de x e y, pero un CAS puede hacer cálculos como:

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

sin especificar valores para x e y, esto es, sin asignarles valores numéricos. Ello permite

- manipular polinomios y expresiones simbólicas,
- expandir y simplificar expresiones algebraicas,
- calcular la función derivada de una función dada (es muy sencillo implementarlo) y calcular primitivas (integrales indefinidas),
- calcular límites,
- manipular expresiones lógicas,
- resolver ecuaciones y sistemas lineales,

- resolver ecuaciones y sistemas algebraicos,
- operar con matrices y determinantes (incluidas matrices simbólicas),
- ...

4. Un poco de historia

Los primeros CAS se desarrollaron a finales de los años sesenta en Estados Unidos: *Macsyma* en el MIT y *REDUCE* por la University of Utah y RAND Corporation. Existen o han existido muchos CAS de propósito general: *Maple*, *Mathematica*, *Maxima* (descendiente de Macsyma), *REDUCE*, *Derive* (sucesor de *muMATH*), *MuPAD*, *AXIOM*, *SageMath*, *Fermat*... Y existen otros de propósito específico: *CoCoA*, *Singular*, *PolyBoRi*,... Además, algunos algunos sistemas de geometría dinámica como *GeoGebra* y *Geometry Expressions* incorporan un pequeño CAS y también pueden comunicarse con CAS externos para, por ejemplo, realizar demostración automática de teoremas geométricos.

5. Conclusiones

Vistos los inconvenientes que puede tener trabajar en aritmética en coma flotante y las posibilidades que abre el poder manejar variables no asignadas, pensamos que es muy conveniente el uso de los CAS no sólo para investigación, sino también para la docencia.

Referencias:

1. R. Loos: Introduction. En R. Albrecht, B. Buchberger, G. E. Collins y R. Loos (Eds.): *Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation.* Springer-Verlag Wien Gmbh., Viena, 1982, 1–10.
2. J. Fitch, M. Rothstein, R. Pavelle: Computer Algebra. *Scientific American* 245/6 (1981) 136–154.
3. E. Roanes Lozano: Precisión indefinida y matemática elemental. *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* 31 (1992) 33–52.
4. R. M. Corless: *Essential Maple: an introduction for scientific programmers.* Springer Science & Business Media, Berlin, 2013.

5. A. Heck: *Introduction to Maple*. Springer Science & Business Media, Berlin, 2011.

6. E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: *Cálculos Matemáticos por ordenador con Maple V*. Rubiños-1890, Madrid, 1999.

7. –: *Maple User Manual*. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Toronto, 2005-2019.

Día de π 2022
14 de marzo de 2022
Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles

El sentido estocástico o cómo, en la estadística, hay vida más allá de la media

Luis J. Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo
luisj@uniovi.es

Resumen

El nuevo currículo escolar de matemáticas español incorpora, tanto en Primaria como en Secundaria, el sentido estocástico como el organizador de los contenidos de estadística y probabilidad. Este término nace (Batanero y Borovnick, 2016; Batanero, 2019; Rico, 2016) con la vocación de integrar el razonamiento probabilístico en el sentido estadístico que, a su vez, surge (Batanero, 2013) de la consideración de la alfabetización estadística (Gal, 2022), el pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) y las grandes ideas de la estadística (Burrill y Biehler, 2011). En el sentido estocástico también tienen relevancia otras conceptualizaciones como la alfabetización de datos (Schield, 2004).

Entre las principales novedades que se incorporan al sentido estocástico al currículo escolar destaca el manejo de conjeturas desde el segundo ciclo de Primaria, desde el punto de vista de la inferencia informal, el tratamiento de diferentes significados de la probabilidad (clásico, frecuencial, subjetivo), o la importancia de la representación gráfica. Estos aspectos, que se refuerzan en Secundaria con la importancia de la variabilidad como elemento vertebrador, marcan una necesidad de cambio tanto en la formación inicial y continua del profesorado como en el tipo de tareas que se plantean en el aula.

Referencias:

1. Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Universidad de Granada. `https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/4770161.pdf`

2. Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. `http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html`

3. Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer. `https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8`

4. Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57–69). Springer. `https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10`

5. Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1–25. `https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x`

6. Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno Verdejo (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 985–100). Pirámide.

7. Schield, M. (2004). Information literacy, statistical literacy and data literacy. *Iassist Quarterly, 28*, 6–11. `https://doi.org/10.29173/iq790`

8. Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223–265. `https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x`