Universidad Rey Juan Carlos
Escuela Técnica Superior Ingeniería Informática

Tema 2: **Lógica Proposicional**

Asignatura: Lógica

Joaquín Arias

Universidad Rey Juan Carlos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Curso 2022-2023

Índice I

ISBN:978-84-09-38265-1

Índice II

Índice III

Tema 2.1: **Sintaxis, semántica y teoría interpretativa.**

Lenguaje Proposicional

Lenguaje Proposicional

- En el contexto de la lógica formal se requiere un lenguaje:
  - Sintácticamente preciso y no ambiguo.
  - Con un significado (semántica) unívoco, y no que una palabra pueda significar cosas distintas según algún tipo de contexto.
  - Cuya definición sea muy compacta.
- Queremos símbolos para representar hechos lógicos, es decir, enunciados por los que tiene sentido preguntarse si son verdaderos o falsos.
- Los enunciados más sencillos son los que no dependen de otros:
  - Llueve.
  - Nadal ganó el US Open 2019.

Lenguaje Proposicional: Alfabeto

- Los símbolos de proposición representan este tipo de hechos:
  - p puede representar “llueve”.
  - q puede representar “Nadal ganó el US Open 2019”.
- Para enunciados más complejos necesitamos símbolos que representen la relación entre los más sencillos que los componen:
  - llueve o nieva.
  - si p representa “llueve” y r representa “nieva”,
    $p \vee r$ representaría “llueve o nieva”.
- **Alfabeto** de un lenguaje proposicional:
  - Símbolos de proposición: $p, q, r, \ldots, p1, p2, \ldots$
  - Conectivas lógicas: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Lenguaje Proposicional: Fórmula Bien Formada

- Del conjunto de todas las posibles secuencias (finitas) de símbolos de un alfabeto, ¿cuáles se consideran expresiones bien formadas?
- Son **fórmula bien formada** (*FBF*):
  - F si F es un símbolo de proposición.
  - $\neg F$ si F es un símbolo de proposición.
  - y si F y G son FBFs, también son FBFs:
    - $F \wedge G$ (conjunción).
    - $F \vee G$ (disyunción).
    - $F \rightarrow G$ (implicación).
    - $F \leftrightarrow G$ (doble implicación).

Definición recursiva de fórmulas bien formadas.

- Dado un alfabeto A, el conjunto (infinito) de FBFs que se pueden definir sobre A se denomina FBF_A.

Lenguaje Proposicional: Precedencia

- ¿Que dice la siguiente fórmula?

$$p \rightarrow q \wedge r \begin{cases} p \rightarrow q \wedge r & (a) \\ p \rightarrow q \wedge r & (b) \end{cases}$$

  (a) Si p entonces q, y además r.
  (b) Si p entonces suceden dos cosas: q y r.
- Se define la siguiente precedencia entre las conectivas:
  - $\neg$ mayor precedencia que $\wedge$ y $\vee$.
  - $\wedge$ y $\vee$ mayor precedencia que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.
  - En caso de igual precedencia se agrupan de derecha a izquierda.

Lenguaje Proposicional: Paréntesis

- Si los paréntesis siguen las reglas de precedencia no son necesarios:
  - $p \wedge q \wedge r$ es igual a $p \wedge (q \wedge r)$
  - $p \wedge q \vee r$ es igual a $p \wedge (q \vee r)$
  - $q \to r1 \wedge \neg r2$ es igual a $q \to (r1 \wedge (\neg r2))$
  - $cgm \wedge p \vee \neg\neg q \leftrightarrow ll$ es igual a $(cgm \wedge (p \vee (\neg(\neg q)))) \leftrightarrow ll$
  - $p \to q \to r \to s$ es igual a $p \to (q \to (r \to s))$
  - $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$ es igual a $\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg p))))))$
- Los paréntesis son necesarios para dar otro "significado":
  - $p \wedge q \wedge r$ sería $(p \wedge q) \wedge r$
  - $cgm \wedge p \vee \neg\neg q \leftrightarrow ll$ sería $(cgm \wedge p) \vee (\neg\neg q \leftrightarrow ll)$
  - $p \to q \to r \to s$ sería $(p \to q) \to (r \to s)$

Ejercicios: FBF y paréntesis

Ejercicios: FBF y paréntesis

- Determinar si son FBFs las siguientes fórmulas y eliminar paréntesis superfluos usando las convenciones de precedencia:
  1. $(q \wedge \neg(p)) \rightarrow (\neg(q) \vee r)$.
  2. $(p \wedge \neg(q \vee r)) \vee (\neg(p) \vee q)$.
  3. $((p \vee q) \vee \neg(r)) \leftrightarrow (r \wedge q)$.
  4. $(p \wedge \neg(q \vee r)) \vee (\neg(\rightarrow p))$.
  5. $(p) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg(q))))$.

Ejercicios: Formalización

- Formalizar en lógica proposicional:
  1. Es necesario abrir la botella para disfrutar su contenido.
  2. Basta con romper el sello para perder la garantía.
  3. Llama al 112 cuando tengas una emergencia.
  4. Perderé el tren a menos que coja un taxi.
  5. Cambia la bombilla sólo y siempre que esté fundida.
  6. No iré al cine a no ser que me inviten.
  7. No pulse la alarma de incendios excepto cuando detecte humo en la escalera.
  8. Pulse la alarma sólo y únicamente si detecta humo en la escalera.

Ejercicios: Formalización (cont.)

- Formalizar en lógica proposicional (Manzano y Huertas, 2004):
  9. Sólo si Pedro juega(p) jugará también Alex(q)
  10. Pedro irá al dentista(p), tanto si quiere(q) como si no quiere(¬q)
  11. La magia se revela(p) sólo si Pinocho miente(q) o Blancanieves muerde la manzana(r)
  12. El certificado tiene validez(p) si está firmado por el director(q) o el tutor del proyecto(r)
  13. La inflación aumentará(p) a menos que baje la emisión de moneda(q) u ocurra un milagro(r)

Ejercicios: Formalización (cont.)

- Formalizar en lógica proposicional (Manzano y Huertas, 2004):
  14. Leeré a Proust(p) si me voy de vacaciones(q) y encuentro sus libros en oferta(r)
  15. Si el mal existe en el mundo(p) y no se origina por las acciones humanas(q), entonces Dios no quiere(r) o no puede(s) impedirlo
  16. Te regalaré el cuadro que te gusta(p) y viajaremos juntos a Italia(q) cuando me toque la lotería(r), o dejo de llamarme Ernesto(s)
  17. Es necesario que llueva(p) o que haga viento(q) para que disminuya la contaminación(r)
  18. Si llueve(p) y hace viento(q), disminuye la contaminación(r)

Semántica de la lógica proposicional

Semántica de la lógica proposicional

- Proposición: Una condición/afirmación posible del mundo sobre el que queremos decir algo.
- Una proposición puede ser *Verdadera* (V) o *Falsa* (F).
- Proposiciones simples:
  - Su valor de verdad no depende de otra proposición.
- Proposiciones compuestas (FBF):
  - Su valor de verdad depende del que tengan las proposiciones simples que la definan y
  - del significado de las conectivas (definido por las funciones de verdad).

Semántica: Funciones de verdad

- Primero definimos una función de verdad (s) para cada conectiva:
  - $s_{\neg}(V) = F \qquad s_{\neg}(F) = V$
  - $s_{\wedge}(V, V) = V \qquad s_{\wedge}(V, F) = s_{\wedge}(F, V) = s_{\wedge}(F, F) = F$
  - $s_{\vee}(F, F) = F \qquad s_{\vee}(V, F) = s_{\vee}(F, V) = s_{\vee}(V, V) = V$
  - $s_{\rightarrow}(V, F) = F \qquad s_{\rightarrow}(F, F) = s_{\rightarrow}(F, V) = s_{\rightarrow}(V, V) = V$
  - $s_{\leftrightarrow}(V, V) = s_{\leftrightarrow}(F, F) = V \qquad s_{\leftrightarrow}(V, F) = s_{\leftrightarrow}(F, V) = F$

Semántica: Funciones de interpretación

- Una función de interpretación, i, asignar un significado a todas y cada una de las FBFs de un alfabeto A.

$$i : FBF_A \Rightarrow \{V, F\}$$

- La interpretación de una FBF se define como:
  - $i(p) = V/F$ si p es una proposición p.
  - $i(\neg G) = s_{\neg}(i(G))$ si G es una FBF.
  - y si G y H son FBFs:
    - $i(G \wedge H) = s_{\wedge}(i(G), i(H))$.
    - $i(G \vee H) = s_{\vee}(i(G), i(H))$.
    - $i(G \rightarrow H) = s_{\rightarrow}(i(G), i(H))$.
    - $i(G \leftrightarrow H) = s_{\leftrightarrow}(i(G), i(H))$.

Semántica: Funciones de interpretación: Ejercicios

- Asignar significado a las siguientes fórmulas cuando:
  $$i(p) = i(q) = V \text{ y } i(r) = F.$$
  1. $(p \to q \vee r) \to (p \wedge q \to \neg r)$
  2. $(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \to r)$
- Asignar significado a las siguientes fórmulas para toda posible interpretación:
  1. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  2. $(\neg p \to q) \wedge (\neg q \wedge p)$
  3. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

Satisfacibilidad

Satisfacibilidad

Definición

Se dice que una interpretación i satisface una fórmula proposicional $G \in FBF_A$, si y sólo si (sii) es verdadera bajo esa interpretación:

$$i(G) = V$$

- Para conjuntos de fórmulas $\{G_1, \ldots, G_n\}$, $G_i \in FBF_A$ para todo $i : 1 \leq i \leq n$: Una interpretación i satisface $\{G_1, \ldots, G_n\}$ sii

$$i(G_i) = V \text{ para todo } i : 1 \leq i \leq n$$

Satisfacibilidad (cont.)

Definición

- Una fórmula $G \in FBF_A$ es satisfacible sii existe (al menos) una interpretación i tal que $i(G) = V$.
- Una fórmula $G \in FBF_A$ es insatisfacible sii no existe ninguna interpretación i tal que $i(A) = V$

- Modelo de una fórmula: Una interpretación que la satisface.
- Contramodelo de una fórmula: Una interpretación que la hace falsa.

Satisfacibilidad: Validez

Atendiendo a su semántica, una fórmula G es:

- **Contradicción** sii no existe una interpretación i tal que $i(G) = V$.
- **Válida** (o tautología) sii no existe una interpretación i tal que $i(G) = F$ (se representa $\vdash G$).
- **Contingente** sii existe alguna interpretación i tal que $i(G) = V$ y existe alguna interpretación i' tal que $i'(G) = F$.

- Una fórmula G es válida sii $\neg G$ es una contradicción.
- Una fórmula G es contingente sii $\neg A$ es contingente.

Satisfacibilidad: Conclusión

- Una fórmula es válida sii
  - no tiene contramodelos sii
  - todas sus interpretaciones son modelos sii
  - todas sus interpretaciones la satisfacen.
- Una fórmula es una contradicción sii
  - no tiene modelos sii
  - todas sus interpretaciones son contramodelos sii
  - es insatisfacible.
- Una fórmula es contingente sii
  - tiene modelos y contramodelos.

Satisfacibilidad: Ejercicios

- Determinar para cada una de las siguientes fórmulas si es válida, contradictoria o contingente, indicando la(s) interpretación(es) que lo demuestran:
  1. $p \wedge q \rightarrow p$.
  2. $p \vee q \rightarrow p$.
  3. $p \rightarrow \neg p$.
  4. $p \vee q \rightarrow (r \vee s \rightarrow p)$.
  5. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$.
  6. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
  7. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.
  8. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Satisfacibilidad: Ejercicios (cont.)

- Determinar para cada una de las siguientes fórmulas si es válida, contradictoria o contingente, indicando la(s) interpretación(es) que lo demuestran:

9. $(p \to \neg q) \land \neg(r \land \neg p) \to (q \to \neg r)$.
10. $(p \land q \to r) \to (p \to (q \to r))$.
11. $\neg(p \to q) \leftrightarrow p \land \neg q$.
12. $p \to (q \to r)$.
13. $p \to (q \land \neg q \to \neg p)$.
14. $(p \to q) \land (q \to p)$.
15. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \land r))$.

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica

- Dado un lenguaje proposicional LP, un conjunto de fórmulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $A_i \in FBF_{LP}$ para todo $i : 1 \leq i \leq n$, y una fórmula $B \in FBF_{LP}$:

Consecuencia lógica

- B es consecuencia lógica de $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

$$[A_1, \ldots, A_n] \models B$$

  - sii toda interpretación que satisface $\{A_1, \ldots, A_n\}$ también satisface B.
  - sii no existe ninguna interpretación que satisfaga $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y no satisfaga a B.

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica: Argumento correcto

Argumento correcto

- Un argumento con premisas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y consecuente B es correcto sii $[A_1, \ldots, A_n] \models B$

- Para decidirlo se pueden hacer dos análisis:
  1. Ver si todas las interpretaciones que satisfacen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ también satisfacen B.
  2. o bien ver que no existe una sola interpretación que satisfaga $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y no satisfaga B.

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica: Argumento correcto

Argumento correcto

- Un argumento con premisas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y consecuente B es correcto sii $[A_1, \ldots, A_n] \vDash B$

- Para decidirlo se pueden hacer dos análisis:
  1. Ver si todas las interpretaciones que satisfacen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ también satisfacen B.
  2. o bien ver que no existe una sola interpretación que satisfaga $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y no satisfaga B.
  - El caso 1 requiere examinar todas las interpretaciones posibles y ver si se cumple la condición.
  - El caso 2 podemos centrarnos en definir una interpretación i tal que $\mathrm{i}(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \mathrm{V}$ y $\mathrm{i}(B) = \mathrm{F}$.

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica: Ejemplo I

- Analiza si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q\} \models r$$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q$	$[A_1, \ldots, A_n]$ $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q\}$	B r
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	F

- De todas las interpretaciones posibles, sólo una hace verdad a las dos premisas (A_1 y A_2), y esa interpretación también hace verdad al consecuente (B). Por tanto, sí hay relación de consecuencia lógica.

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica: Ejemplo II

- Analiza si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{p \wedge \neg\neg q, r\} \vDash q \vee s$$

- tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  1. $\mathrm{i}(p \wedge \neg\neg q) = \mathrm{V}$ sii
     a) $\mathrm{i}(p) = \mathrm{V}$ b) y $\mathrm{i}(\neg\neg q) = \mathrm{V}$ sii $\mathrm{i}(\neg q) = \mathrm{F}$ sii $\mathrm{i}(q) = \mathrm{V}$
  2. $\mathrm{i}(r) = \mathrm{V}$
  3. $\mathrm{i}(q \vee s) = \mathrm{F}$ sii
     a) i(q) = F (en contradicción con 1.b) b) y i(s) = F
- Puesto que **no** es posible definir un contramodelo:
  El argumento es correcto, hay relación de consecuencia lógica.

Teoría interpretativa: Consecuencia Lógica: Ejemplo III

- Analiza si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{p \wedge q, \neg(p \rightarrow r)\} \vDash q \wedge (p \rightarrow r)$$

- tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  1. $\mathrm{i}(p \wedge q) = \mathrm{V}$ sii
     a) $\mathrm{i}(p) = \mathrm{V}$ b) y $\mathrm{i}(q) = \mathrm{V}$
  2. $\mathrm{i}(\neg(p \rightarrow r)) = \mathrm{V}$ sii $\mathrm{i}(p \rightarrow r) = \mathrm{F}$ sii
     a) $\mathrm{i}(p) = \mathrm{V}$ b) y $\mathrm{i}(r) = \mathrm{F}$
  3. $\mathrm{i}(q \wedge (p \rightarrow r)) = \mathrm{F}$ sii
     a) $\mathrm{i}(q) = \mathrm{F}$ (en contradicción con 1.b)
     b) o $\mathrm{i}(p \rightarrow r) = \mathrm{F}$ (OK, compatible con 2).
- Existe un contramodelo al argumento: $\mathrm{i}(p) = \mathrm{i}(q) = \mathrm{V}$, $\mathrm{i}(r) = \mathrm{F}$.
  El argumento no es correcto. NO hay relación de consecuencia lógica.

Teoría interpretativa: Ejercicios (Consecuencia Lógica)

- Determinar si las siguientes argumentaciones son correctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).
  1. $\{p, p \rightarrow q\} \models q$
  2. $\{\neg p, p \vee q\} \models q$
  3. $\{p \rightarrow q, \neg p\} \models \neg q$
  4. $\{p \rightarrow q, \neg q\} \models \neg p$
  5. $\{p \leftrightarrow q, \neg p\} \models q$
  6. $\{p \wedge q\} \models p$
  7. $\{\neg(p \wedge q)\} \models \neg p \wedge \neg q$
  8. $\{\neg(p \vee q)\} \models \neg p \wedge \neg q$

Teoría interpretativa: Ejercicios (Consecuencia Lógica) cont.

- Determinar si las siguientes argumentaciones son correctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).

9. $\{p \to q, p\} \vDash q$
10. $\{p \vee q\} \vDash q \vee p$
11. $\{p \wedge (q \vee r)\} \vDash p$
12. $\{p \vee q \to r\} \vDash q \to r$
13. $\{\neg\neg r \wedge \neg q\} \vDash \neg r$
14. $\{p \to (q \to r)\} \vDash q \to (p \to r)$
15. $\{\neg q \to r, t \to \neg q, \neg s \to \neg q\} \vDash t \vee \neg s \to r$
16. $\{p \vee (q \to r) \to q, p\} \vDash q$
17. $\{\neg p \to \neg s, \neg p \vee r, r \to \neg t\} \vDash \neg s \vee \neg t$
18. $\{(p \to q) \wedge t, (r \vee p) \wedge \neg q, \neg t \leftrightarrow \neg s\} \vDash r \wedge s$

Teoría interpretativa: Equivalencia lógica

- Dos fórmulas A y B son (lógicamente) equivalentes ($A \leftrightarrow B$) sii para toda interpretación i se cumple que $\mathrm{i}(A) = \mathrm{i}(B)$.
- Esta definición implica que:
  - A y B son consecuencia lógica una de la otra ($A \vDash B$ y $B \vDash A$).
  - La fórmula $A \leftrightarrow B$ es válida (es una tautología).
- Por ejemplo: $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Teoría interpretativa: Equivalencia lógica (cont.)

- La equivalencia entre fórmulas proporciona numerosas ventajas prácticas, entre ellas:
  - permite utilizar indistintamente las fórmulas equivalentes en una demostración (lo utilizaremos más adelante).
  - permite reducir el tamaño de un lenguaje proposicional (disminuir el nº de conectivas que emplea).
- Por ejemplo, cualquier lenguaje proposicional puede reducirse a otro que sólo utiliza $\{\neg, \vee\}$
  - Esta reducción simplifica tareas como:
    - construcción de sistemas sintácticos de demostración.
    - demostración de las propiedades metalógicas del sistema formal.

Teoría interpretativa: Equivalencia lógica: Ejemplos

$\neg(\neg p)$	$\leftrightarrow$	p	doble negación
$p \wedge p$	$\leftrightarrow$	p	ley de idempotencia
$p \wedge q$	$\leftrightarrow$	$q \wedge p$	conmutatividad de la conjunción
$p \vee q$	$\leftrightarrow$	$q \vee p$	conmutatividad de la disyunción
$p \wedge (q \wedge r)$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q) \wedge r$	asociatividad de la conjunción
$p \vee (q \vee r)$	$\leftrightarrow$	$(p \vee q) \vee r$	asociatividad de la disyunción
$p \wedge (q \vee r)$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
$p \vee (q \wedge r)$	$\leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
$p \leftrightarrow q$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	definición de la doble implicación en función de la implicación
$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow$	$\neg p \vee q$	implicación vs. disyunción
$\neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p \wedge \neg q$	ley de De Morgan
$\neg(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p \vee \neg q$	ley de De Morgan

Teoría interpretativa: Ejercicios (Equivalencia lógica)

- De los pares de fórmulas siguientes, ¿en cuáles se cumple $A \models B$?, ¿en cuáles se cumple $B \models A$?, ¿en cuáles A y B son equivalentes?
  1. A: $p \vee q$, B: $q \vee p$
  2. A: $p \rightarrow q$, B: $q \rightarrow p$
  3. A: $p \vee q \rightarrow r$, B: $p \rightarrow r$
  4. A: $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, B: $p \vee q \rightarrow r$
  5. A: $p \rightarrow q$, B: $p \leftrightarrow q$

Tema 2.2: **Sistemas formales y deducción natural.**

Motivación

Motivación

- ¿Por qué queremos construir un cálculo deductivo?
  - Es difícil determinar $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ por medios semánticos.
    - Confirmar la corrección de un argumento puede ser muy costoso.
  - Alternativa: determinar que B se deduce de $\{A_1, \ldots, A_n\}$ por medios sintácticos: $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$
    - Encontrar un procedimiento que nos permita construir una argumentación paso a paso, manipulando los símbolos de las fórmulas, sabiendo que cada paso es válido.
- El análisis de la corrección de un argumento por medios sintácticos se hace siempre en un contexto o marco formal, denominado **sistema formal**.
- En un sistema formal los símbolos carecen de significado, y al manipularlos hemos de ser cuidadosos y no presuponer nada sobre sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema.

Sistemas formales

Sistemas formales

- Un sistema formal de demostración consiste en:
  - Un lenguaje formal (alfabeto y reglas sintácticas de formación de fórmulas).
  - Un conjunto de axiomas lógicos o axiomas (fórmulas válidas sin prueba, podría ser vacío).
  - Un conjunto de reglas de inferencia para demostrar fórmulas.
  - Una definición de prueba o demostración.
- Una teoría T es un sistema formal ampliado con un conjunto Γ de axiomas no lógicos o premisas (es decir, que se consideran como verdad): $T[\Gamma]$.
  - Si $\Gamma = \emptyset$ entonces T es la teoría básica del sistema formal.

Sistemas formales (cont.)

- Una demostración o prueba de una fórmula B en una teoría $T[\Gamma]$ (escrito $T[\Gamma] \vdash B$) es una secuencia finita de fórmulas tal que:
  - Toda fórmula de la secuencia es:
    - Un axioma o premisa de la teoría.
    - o, el resultado de aplicar una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia.
  - B es la última fórmula de la secuencia
- Un teorema de una teoría $T[\Gamma]$ es una fórmula para la que existe al menos una demostración en $T[\Gamma]$
- $T[\Gamma] \vdash B$ indica que B se deduce de $T[\Gamma]$ (B es teorema de $T[\Gamma]$)

Sistemas formales: Propiedades

Corrección: Teorema de validez.

Todos los teoremas de $T[\Gamma]$ son consecuencias lógicas de Γ:

$$\text{si } T[\Gamma] \vdash B \text{ entonces } \Gamma \models B.$$

Completitud: Teorema de completitud.

Dada una teoría $T[\Gamma]$, todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de $T[\Gamma]$:

$$\text{si } \Gamma \models B \text{ entonces } T[\Gamma] \vdash B.$$

Si el cálculo es **correcto** y **completo** entonces $\vdash$ y $\models$ son equivalentes.

Deducción Natural

Deducción Natural

- Es un sistema formal para la lógica proposicional.
  - Lenguaje: Lenguaje proposicional.
  - Axiomas: No tiene.
  - Reglas de inferencia: dos por cada conectiva:
    - Introducción y eliminación.
  - Demostración: es una secuencia finita de fórmulas en la que cada elemento es:
    - Un *supuesto* o *premisa* de la teoría.
    - o, el resultado de la aplicación de una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia.

  y la última fórmula de la secuencia es la fórmula probada.

Deducción Natural: Supuestos y Premisas.

- Son fórmulas añadidas a una teoría básica T y pueden aparecer en una prueba sin requerir demostración. Sin embargo:
  - Las **premisas**: son añadidas permanentemente
  - Los **supuestos**: son incorporados temporalmente a T:
    - es introducido en un determinado punto de la demostración
    - luego, es cancelado (descargado) en otro punto posterior,
    - y como resultado una nueva fórmula queda demostrada.
- Lo que significa usar un supuesto es lo siguiente:
  - "supongamos que A"
  - "entonces demuestro (usando A) que B"
  - "en realidad acabo de mostrar que si tuviera A como premisa, entonces podría demostrar B"
  - "eso equivale a decir que he demostrado la implicación $A \rightarrow B$"

Deducción Natural: Teorema de la Deducción

- Siendo $T[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ una teoría básica ampliada con un conjunto de n premisas, A_i, si la incorporación como supuesto de un fórmula A permite deducir otra fórmula B: entonces
$$T[A_1, A_2, \ldots, A_n] \cup \{A\} \vdash B$$
entonces:
$$T[A_1, A_2, \ldots, A_n] \vdash A \to B$$

Teorema de la deducción:

En general, tanto para premisas como para supuestos:

$$T[A] \vdash B \text{ si y sólo si } T \vdash A \to B$$

Deducción Natural: Reglas de inferencia

- En la definición de las reglas de inferencia vamos a usar A y B, que no son símbolos de proposición: son variables sobre fórmulas del lenguaje (metavariables)
  - Mediante metavariables podemos razonar sobre conjuntos (infinitos) de fórmulas que comparten una misma forma lógica.
    - Por ejemplo: $A \wedge \neg A$ agrupa $p \wedge \neg p$, $q \wedge \neg q$, ...
  - Cada regla de inferencia es una metaregla con infinitas instancias.

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Conjunción

Introducción de $\wedge$ ($I_\wedge$)

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

$T[p,q] \vdash p \wedge q$

1. p	premisa
2. q	premisa
3. $p \wedge q$	$I_\wedge$ (1,2)

Eliminación de $\wedge$ ($E_\wedge$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$T[p \wedge q] \vdash p$

1. $p \wedge q$	premisa
2. p	$E_\wedge$ (1)

$T[p \wedge q] \vdash q$

1. $p \wedge q$	premisa
2. q	$E_\wedge$ (1)

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Disyunción

Eliminación de $\vee$ ($E_\vee$)

$$\frac{A \vee B \qquad A \rightarrow C \qquad B \rightarrow C}{C}$$

$T[p \vee q, p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash \neg r$

1.	$p \vee q$	premisa
2.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
3.	$q \rightarrow \neg r$	premisa
4.	$\neg r$	$E_\vee$ (1,2,3)

Introducción de $\vee$ ($I_\vee$)

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

$T[p] \vdash p \vee r$

1.	p	premisa
2.	$p \vee r$	$I_\vee$ (1)

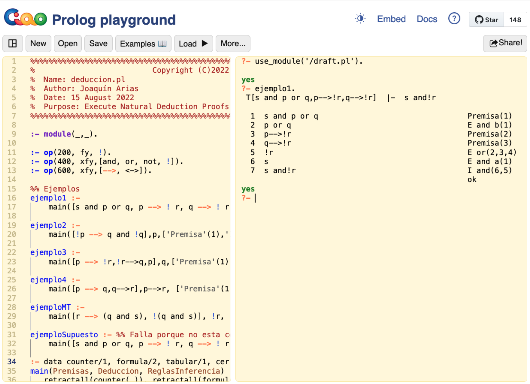
$T[p] \vdash r \vee p$

1.	p	premisa
2.	$r \vee p$	$I_\vee$ (1)

Deducción Natural: Ejemplo

$$T[s \wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$$

1.	$s \wedge (p \vee q)$	*premisa*
2.	$p \vee q$	$E_{\wedge}(1)$
3.	$p \rightarrow \neg r$	*premisa*
4.	$q \rightarrow \neg r$	*premisa*
5.	$\neg r$	$E_{\vee}(2,3,4)$
6.	s	$E_{\wedge}(1)$
7.	$s \wedge \neg r$	$I_{\wedge}(5,6)$



- Prueba los ejemplos (y ejercicios) online.

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Negación

Introducción ¬ ($I_\neg$)

$$\frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

Eliminación ¬ ($E_\neg$)

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

$T[\neg p \rightarrow q \wedge \neg q] \vdash p$

1.	$\neg p \rightarrow q \wedge \neg q$	premisa
2.	$\neg\neg p$	$I_\neg$ (1)
3.	p	$E_\neg$ (2)

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Implicación

Eliminación → ($E_{\rightarrow}$)

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q, p] \vdash q$

1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	p	premisa
3.	$\neg r$	**$E_{\rightarrow}$ (1,2)**
4.	$\neg r \rightarrow q$	premisa
5.	q	**$E_{\rightarrow}$ (3,4)**

Introducción → ($I_{\rightarrow}$)

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ (supuesto)} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

$T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	p	supuesto
4.	q	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5.	r	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6.	$p \rightarrow r$	**$I_{\rightarrow}$ (3,5)**

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Doble Implicación

Introducción $\leftrightarrow$ ($I_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{A \rightarrow B \qquad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow p] \vdash p \leftrightarrow \neg r$

1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
3.	$p \leftrightarrow \neg r$	**$I_{\leftrightarrow}$ (1,2)**

Eliminación $\leftrightarrow$ ($E_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$T[p \leftrightarrow q \wedge r, p] \vdash r$

1.	$p \leftrightarrow q \wedge r$	premisa
2.	$p \rightarrow q \wedge r$	**$E_{\leftrightarrow}$ (1)**
3.	p	premisa
4.	$q \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,3)
5.	r	$E_{\wedge}$ (4)

Deducción Natural: Ejercicios

- Demostrar los siguientes esquemas argumentales:
  1. $T[p] \vdash q \to p$
  2. $T[p \to (q \to r)] \vdash (p \to q) \to (p \to r)$
  3. $T[\neg p \to \neg q] \vdash (\neg p \to q) \to p$
  4. $T[\neg p \to \neg q] \vdash q \to p$
  5. $T[p \to q, q \to r] \vdash p \to r$
  6. $T[p \to (q \to r), q] \vdash p \to r$
  7. $T[p \wedge q \to r, r \wedge s \to t] \vdash p \wedge q \wedge s \to t$
  8. $T[p \wedge q \to r] \vdash p \wedge \neg r \to \neg q$
  9. $T[p \vee q \to r, s \to p] \vdash s \to r$
  10. $T[p \wedge q \to r, \neg(p \vee r) \to s, p \to q] \vdash \neg s \to r$
  11. $T[p \vee p] \vdash p$
  12. $T[p] \vdash \neg\neg p$
  13. $T[p \vee q \to r] \vdash q \to r$

Deducción Natural: Reglas de inferencia Derivadas I

- En distintas demostraciones se repiten con frecuencia ciertos pasos:

$T[r \to (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$

1.	$r \to (q \wedge s)$	premisa
2.	$\neg(q \wedge s)$	premisa
3.	r	supuesto
4.	$q \wedge s$	$E\to$ (1,3)
5.	$(q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	$I\wedge$ (2,4)
6.	$r \to (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	$I\to$ (3,5)
7.	$\neg r$	$I\neg$ (6)

$T[p \to q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1.	$p \to q$	premisa
2.	$r \wedge \neg q$	premisa
3.	$\neg q$	$E\wedge$ (2)
4.	p	supuesto
5.	q	$E\to$ (1,4)
6.	$q \wedge \neg q$	$I\wedge$ (3,5)
7.	$p \to q \wedge \neg q$	$I\to$ (4,6)
8.	$\neg p$	$I\neg$ (7)
9.	r	$E\wedge$ (2)
10.	$r \wedge \neg p$	$I\wedge$ (8,9)

- Aunque son distintas las fórmulas que aparecen en estos dos ejemplos, las líneas destacadas tienen una estructura común
- Podríamos acortar las dos demostraciones si previamente demostramos con carácter general que $T[A \to B, \neg B] \vdash \neg A$, para cualesquiera fórmulas A y B.

Deducción Natural: Reglas de inferencia Derivadas II

- Las reglas derivadas se representan como las reglas básicas:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A} \quad \textit{Modus Tollens (MT)}$$

- Las demostraciones anteriores quedarían ahora:

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$

1.	$r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2.	$\neg(q \wedge s)$	premisa
3.	$\neg r$	**MT (1,2)**

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$r \wedge \neg q$	premisa
3.	$\neg q$	E$\wedge$ (2)
4.	$\neg p$	**MT (1,3)**
5.	r	E$\wedge$ (2)
6.	$r \wedge \neg p$	I$\wedge$ (8,9)

Deducción Natural: Reglas de inferencia Derivadas III

Reglas para la implicación

$T[A \rightarrow B, B \rightarrow C]$	$\vdash$	$A \rightarrow C$	Transitividad
$T[A \rightarrow B, \neg B]$	$\vdash$	$\neg A$	Modus Tollens

Reglas para la disyunción

$T[(A \vee B) \vee C]$	$\vdash$	$A \vee (B \vee C)$	Asociatividad
$T[A \vee B]$	$\vdash$	$B \vee A$	Conmutatividad

Reglas de Morgan

$T[\neg(A \wedge B)]$	$\vdash$	$\neg A \vee \neg B$	De Morgan
$T[\neg(A \vee B)]$	$\vdash$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morgan

Reglas de corte

$T[A \vee B, \neg A]$	$\vdash$	B	Corte
$T[A \vee B, \neg B]$	$\vdash$	A	Corte
$T[A \vee B, \neg A \vee C]$	$\vdash$	$B \vee C$	Corte

Deducción Natural: Teorema de intercambio (o sustitución)

- Sea:
  - A una fórmula.
  - B1 una sub-fórmula de A.

  Si tenemos:
  - $\vdash A$.
  - $\vdash B1 \leftrightarrow B2$.

  Entonces tenemos:
  - $\vdash A'$

  Donde A' resulta de sustituir en A todas o alguna aparición de $B1$ por $B2$.

- Ejemplo:
  $T[p \leftrightarrow r, q \rightarrow s, s \rightarrow t \wedge r] \vdash q \rightarrow p \wedge t$

1.	$q \rightarrow s$	premisa
2.	$s \rightarrow t \wedge r$	premisa
3.	q	supuesto
4.	s	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5.	$t \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6.	$p \leftrightarrow r$	premisa
7.	$t \wedge p$	Intercambio (5,6)
8.	$p \wedge t$	conmutatividad (7)
9.	$q \rightarrow p \wedge t$	$I_{\rightarrow}$ (3,8)

Deducción Natural: Ejercicios

- Demostrar los siguientes formulas y/o esquemas argumentales:
  1. $T \vdash p \wedge q \rightarrow p$
  2. $T \vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
  3. $T \vdash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
  4. $T \vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
  5. $T \vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  6. $T \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
  7. $T \vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
  8. $T \vdash \neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
  9. $T \vdash p \rightarrow (q \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
  10. $T \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

Deducción Natural: Ejercicios (cont.)

- Demostrar los siguientes formulas y/o esquemas argumentales:

11. $T[p \to q, p] \quad \vdash \quad q$
12. $T[p] \quad \vdash \quad p \lor q$
13. $T[p \lor p] \quad \vdash \quad p$
14. $T[p \land (q \lor r)] \quad \vdash \quad p$
15. $T[p] \quad \vdash \quad \neg\neg p$
16. $T[p \lor q \to r] \quad \vdash \quad q \to r$
17. $T[p \to (q \to r)] \quad \vdash \quad q \to (p \to r)$
18. $T[p \to q] \quad \vdash \quad p \lor r \to q \lor r$
19. $T[\neg q \to r, t \to \neg q, \neg s \to \neg q] \quad \vdash \quad t \lor \neg s \to r$
20. $T[p \lor (q \to r) \to q, p] \quad \vdash \quad q$
21. $T[\neg p \to \neg s, \neg p \lor r, r \to \neg t] \quad \vdash \quad \neg s \lor \neg t$
22. $T[(p \to q) \land t, (r \lor p) \land \neg q, \neg t \leftrightarrow \neg s] \quad \vdash \quad r \land s$