Universidad
Rey Juan Carlos
Escuela Técnica Superior
Ingeniería Informática

Tema 3: Lógica de Primer Orden

Asignatura: Lógica

Joaquín Arias

Universidad Rey Juan Carlos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Curso 2022-2023

Índice I

ISBN:978-84-09-38265-1

Índice II

Índice III

Índice IV

Índice V

Tema 3.4: **Método de resolución de Robinson.**

- **Introducción**
- **Interpretaciones de Herbrand**
  - Universo de Herbrand
  - Base de Herbrand
  - Definición
  - Ejemplos
  - Satisfabilidad
- **Teorema de Herbrand**
- **Método de Resolución de Robinson**
  - Algoritmo
  - Ejemplo
- **Resolución con Unificador de Máxima Generalidad**
  - Sustitución

Índice VI

Tema 3.1: **Sintaxis, semántica y teoría interpretativa.**

Sintaxis LPO: Lenguaje Primer Orden

Sintaxis LPO: Lenguaje Primer Orden

- Si este fin de semana nieva y Juan ha terminado el trabajo, irá a esquiar.

  Nieva
  Juan ha terminado el trabajo
  ―――――――――――――
  Juan irá a esquiar

- Si este fin de semana nieva y Juan ha terminado el trabajo, irá a esquiar.
  Si este fin de semana nieva y Paco ha terminado el trabajo, irá a esquiar.

  Nieva
  Juan ha terminado el trabajo
  Paco ha terminado el trabajo
  ―――――――――――――
  Juan y Paco irán a esquiar

Sintaxis LPO: Lenguaje Primer Orden (cont.)

- Si este fin de semana nieva, los que terminan su trabajo van a esquiar

  Nieva
  Juan ha terminado el trabajo
  Paco ha terminado el trabajo
  Nacho ha terminado el trabajo

  Juan, Paco y Nacho irán a esquiar

- Cada vez que nieva, los que terminan su trabajo van a esquiar

  Nieva este fin de semana
  Va a nevar el próximo fin de semana
  Juan ha terminado el trabajo esta semana
  Paco ha terminado el trabajo esta semana

  Juan y Paco irán a esquiar este fin de semana
  y (si terminan su trabajo) también el siguiente

Sintaxis LPO: Lenguaje Primer Orden (cont.)

- La deducción clásica por excelencia:

  Si Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal
  Sócrates es un hombre
  ―――――――――――
  Sócrates es mortal

  Todos los hombres son mortales
  Sócrates es un hombre
  ―――――――――――
  Sócrates es mortal

Sintaxis LPO: Lenguaje Primer Orden (cont.)

- Las proposiciones se refieren a individuos:
  - Un empleado de los de la empresa.
  - Un fin de semana del año.
- Si tenemos que hablar demás de un individuo (para expresar un hecho más general), las proposiciones se nos quedan cortas.
- Podríamos multiplicar las proposiciones, una para cada individuo y hecho lógico que se refiere a él, pero:
  - Esto lo haría todo mucho mas largo y pesado...
  - ... o imposible. En campos como las matemáticas se podría requerir hablar de conjuntos infinitos.
- Necesitamos ampliar la capacidad expresiva de los lenguajes proposicionales con nuevos símbolos.

Sintaxis LPO: Alfabeto

- Un alfabeto de un LPO se define con los siguientes tipos de símbolos:
  - Símbolos de constante: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$
  - Símbolos de variable: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
  - Símbolos de función: $f(\_), g(\_,\_), \ldots$ $\quad$ $o\ f^1, g^2, o\ f/1, g/2$
  - Símbolos de predicado: $P(\_), Q(\_), \ldots$ $\quad$ $o\ P^1, Q^2, o\ P/1, Q/2$
  - Conectivas lógicas: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Cuantificadores: $\exists, \forall$
- Un símbolo de predicado 0-ario es una proposición
- En un LPO no puede haber símbolos comunes entre los conjuntos de variables y constantes, ni entre los símbolos de función y de predicado

Sintaxis LPO: Alfabeto (cont.)

- Símbolos auxiliares de puntuación: paréntesis y comas
  - Innecesarios si la aridad es parte del nombre del símbolo de predicado/función
  - Mejoran la legibilidad: $P(a, f(x, g(b)))$ en lugar de $P^2af^2xg^1b$
- El uso de los paréntesis se puede reducir al mínimo mediante las convenciones de precedencia:
  - $\{\forall, \exists, \neg\}$ tienen mayor precedencia que $\{\wedge, \vee\}$
  - $\{\wedge, \vee\}$ tienen mayor precedencia que $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$

Sintaxis LPO: Expresiones

- Una expresión de un LPO es cualquier concatenación finita de símbolos de su alfabeto. Las expresiones relevantes son:

- Términos:
  - Un símbolo de constante es un término.
  - Un símbolo de variable es un término.
  - Si f es un símbolo de función n-aria y $t_1, \ldots t_n$ son términos entonces $f(t_1, \ldots t_n)$ es un término.

- Fórmulas (Bien Formadas, FBF):
  - Si P es un símbolo de predicado n-ario y $t_1, \ldots t_n$ son términos entonces $P(t_1, \ldots t_n)$ es una fórmula (átomo o fórmula atómica).
  - Si F y G son fórmulas entonces también lo son $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G$ y $F \leftrightarrow G$.
  - Si $F(x)$ es una fórmula en la que x es una variable libre entonces $\forall x F(x)$ y $\exists x F(x)$ son fórmulas.

Sintaxis LPO: Expresiones (cont.)

- Ejemplos de términos:
  - Constantes: $a, b, c, 1, spot, john$
  - Funciones: $f/1, g/3, h/2, +/3$
  - Variables: x, y, m

Correctas: $spot, f(john), f(x), +(1,2,3),$
$+(x,y,m), h(f(h(1,2)), m)$

Incorrectas: $spot(x), +(1,2), g, f(f(h))$

- Ejemplos de fórmulas:
  - Términos correctos...
  - Predicados:
    $dog/1, p/2, q/0, r/0, barks/1$

Correctas: $q, q \rightarrow r, barks(x) \rightarrow dog(x)$
$p(x,y), \exists x(dog(x) \wedge barks(x) \wedge \neg q),$
$\exists y(dog(y) \rightarrow barks(y)), dog(x),$

Incorrectas: $q\vee, \exists p$

Sintaxis LPO: Ejercicios I (Formalización)

- Seleccionar los predicados, constantes y funciones necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:
  1. Vicente es mejicano.
  2. Mi casa es roja.
  3. Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano.
  4. Jorge adora a Juan.
  5. Jorge adora a su hermano Juan.
  6. Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde.
  7. Pedro sujetó a Juan y María le atizó.
  8. Homero escribió la Ilíada y la Odisea.
  9. Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan.
  10. Titán es satélite de Saturno pero Europa no lo es.

Sintaxis LPO: Ejercicios I (Formalización) cont.

- Seleccionar los predicados, constantes y funciones necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:
  11. O Pedro o María (pero no ambos) son hermanos míos.
  12. Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia.
  13. El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto.
  14. María ama a mi padre mientras que Julia me ama a mi.
  15. Cela leía a Borges aunque éste lo detestaba públicamente.
  16. María está enamorada de alguien.
  17. Hay al menos un número primo.
  18. Algunas cantantes de ópera no están gordas.
  19. Cualquier crimen será castigado.
  20. No todos los crímenes merecen la pena capital.

Sintaxis LPO: Ejercicios I (Formalización) cont.

- Seleccionar los predicados, constantes y funciones necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:

21. Las novelas de Cela me fascinan.
22. Hay profesores que no saben explicar.
23. Sólo los suecos entienden a Bergman.
24. Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda.
25. Hay genios, pero no todos los poetas lo son.
26. No todos los satélites de Júpiter tienen atmósfera.
27. Todos los estudiantes de tercer curso ayudan a al menos uno de primero.
28. Los caballeros las prefieren rubias pero se casan con las morenas.
29. Nadie respeta a quien no se respeta a sí mismo.
30. Hay un pintor a quien todo el mundo admira.

Sintaxis LPO: Variables

- Ámbito (alcance) de un cuantificador en una fórmula:
  - La subfórmula inmediatamente a su derecha (puede ser necesario el uso de paréntesis para indicar el alcance del cuantificador):
    $\exists x P(x,y) \vee Q(x,y)$; $\exists x (P(x,y) \vee Q(x,y))$;
    $\forall y \exists x P(x,y) \vee Q(x,y)$; $\forall y \exists x (P(x,y) \vee Q(x,y))$
- Variables libres y ligadas en fórmulas de un LPO. Una variable x:
  - Se encuentra ligada en una fórmula A cuando está en el ámbito de un cuantificador $\exists x$ o $\forall x$ en A.
  - Se encuentra libre en una fórmula cuando no se encuentra ligada.

  NOTA: Un mismo símbolo de variable puede estar libre y ligado en una misma fórmula.
- Fórmulas abiertas y cerradas en un LPO:
  - Es abierta cuando contiene al menos una variable libre.
  - Es cerrada cuando todas sus variables están ligadas.

Sintaxis LPO: Ejercicios II (Ligadura de variables)

- Señalar las variables libres y ligadas en las siguientes fórmulas:
  1. $\exists x(P(x, f(y)) \rightarrow \exists y Q(x, y))$
  2. $\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(x, f(y))$
  3. $\exists x \exists y(P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(a, y)$
  4. $\exists x \exists y((P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(x, y))$
  5. $\forall x(x = y \rightarrow \exists z P(x, z))$
  6. $\exists x \forall y P(x, f(x, y)) \rightarrow \exists y Q(x, y)$
  7. $x = y + z \rightarrow x \leq y + z$
  8. $\forall x(x + 0 = x)$
  9. $\forall x(N(x) \rightarrow N(s(x)))$
  10. $\forall x \exists y(P(g(x, a), y) \vee Q(x) \vee R(z, b)) \wedge \exists z S(x, y, z)$

Sintaxis LPO: Sustituciones

- Una sustitución es una función finita de un conjunto de variables de un lenguaje en el de términos. Se representa como $\{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$ donde $x_1, \ldots, x_n$ son variables diferentes y $t_1, \ldots, t_n$ son términos.
  - Cada par x_i/t_i se denomina ligadura.
  - Una sustitución que no sustituye ninguna variable se llama sustitución vacía ($\emptyset$)
- Dada una fórmula A y una sustitución $\alpha = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, se denomina aplicación de α a A ($A\alpha$) a la fórmula obtenida reemplazando simultáneamente cada ocurrencia en A de x_i por t_i, para cada $x_i/t_i \in \alpha$.
  - $\alpha = \{x/f(a), y/x, z/h(b, y), w/a\}$
  - $P(x, y, z)\alpha = P(f(a), f(a), h(b, f(a)))$ incorrecto
  - $P(x, y, z)\alpha = P(f(a), x, h(b, y))$ correcto

Sintaxis LPO: Sustituciones (cont.)

- Notación: Siendo A una fórmula y x una variable de un LPO:
  - $A(x)$ indica la aparición de al menos una ocurrencia libre de x en A
  - $A\{x/t\}$ representa la fórmula obtenida a partir de A sustituyendo todas las apariciones de la variable libre x por el término t.
- Ejemplos:

$$A(x) : P(x, f(y)) \to \exists y Q(x, y) \qquad A\{x/a\} : P(a, f(y)) \to \exists y Q(a, y)$$

$$A(y) : \exists x((P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(x, y))$$

$$A\{y/f(z)\} : \exists x((P(x, f(z)) \vee Q(x, f(z))) \wedge R(x, f(z)))$$

Sintaxis LPO: Sustituciones (cont.)

- Condiciones para la aplicación de una sustitución a una fórmula A:
  - Se aplica única y exclusivamente sobre variables libres presentes en A. De no haberlas, la sustitución no tiene ningún efecto sobre la expresión inicial.
  - Su aplicación reemplaza todas y sólo las ocurrencias de la variable libre en la fórmula por el término.

    Errores comunes:

    $(\forall x(P(x, f(y)) \rightarrow \exists y Q(x, y))) \{y/a\}$: $\exists x(P(x, f(a)) \rightarrow \exists y Q(x, y))$

    $(\exists x(P(x, f(y)) \rightarrow \exists y Q(x, y))) \{y/a\}$: $\exists x(P(x, f(a)) \rightarrow Q(x, a))$

    $(\exists x(P(x, f(y)) \wedge Q(x, y))) \{y/a\}$: $\exists x(P(x, f(a)) \rightarrow Q(x, y))$
  - Una sustitución α no se puede aplicar a A si pasa lo siguiente:
    - (i) α contiene una ligadura x/t y t contiene la variable y.
    - (ii) hay una ocurrencia de x en A que se puede reemplazar por t
    - (iii) dicha ocurrencia está dentro del ámbito de un cuantificador sobre y.

      $\exists y(\forall z P(x, z) \wedge Q(y)) \{x/f(y)\}$: $\exists y(\forall z P(f(y), z) \wedge Q(y))$

Sintaxis LPO: Ejercicios III (Sustituciones)

- Realizar las siguientes sustituciones:
  1. $(\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists yQ(x,y))) \{y/g(z)\}$
  2. $(\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))) \{y/a\}$
  3. $(\forall x(\forall yP(x,y) \rightarrow Q(x,y))) \{y/a\}$
  4. $(\exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)) \{y/b\}$
  5. $(\exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)) \{x/b\}$
  6. $(\exists x \forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)) \{x/a, y/b\}$
  7. $(\forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))) \{y/f(x,a)\}$
  8. $(\forall yP(x,y) \rightarrow \forall xQ(x,y)) \{y/f(x,a)\}$
  9. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z) \{x/1, y/2\}$
  10. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z) \{x/s(x)\}$
  11. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z) \{x/s(y)\}$
  12. $(\forall x(x + 0 = x)) \{x/1\}$

Sintaxis LPO: Composición de Sustituciones

- Dadas dos sustituciones $\alpha = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ y $\beta = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$ su composición $\alpha\beta$ se define eliminando del conjunto $\{x_1/t_1\beta, \ldots, x_n/t_n\beta, y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$
  - las ligaduras $x_i/t_i\beta$ tales que $x_i \equiv t_i\beta$,
  - y las ligaduras y_i/s_i tales que $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ejemplo:
  - si $\alpha = \{x/3, y/f(x,1)\}$ y $\beta = \{x/4\}$ entonces $\alpha\beta = \{x/3, y/f(4,1)\}$ y $\beta\alpha = \{x/4, y/f(x,1)\}$
- Propiedades de la composición:
  - $(F\alpha)\beta = F(\alpha\beta)$
  - $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
  - $\alpha\lambda = \lambda\alpha = \alpha$
  - $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

Sintaxis LPO: Ejercicios IV (Composición de sustituciones)

- Realizar la composición de las siguientes sustituciones:
  1. $\{x/a, y/g(z), z/f(x)\}\ \{x/b, z/y\}$
  2. $\{x/b, z/y\}\ \{x/a, y/g(z), z/f(x)\}$
  3. $\{x/f(a, y), y/b\}\ \{x/a, y/c\}$
  4. $\{x/a, y/c\}\ \{x/f(a, y), y/b\}$
  5. $\{x/y, y/z, z/w\}\ \{x/a, y/b, z/c, w/d\}$
  6. $\{x/a, y/b, z/c, w/d\}\ \{x/y, y/z, z/w\}$
  7. $\{x/f(z), y/w\}\ \{z/a, w/f(y, z)\}$
  8. $\{z/a, w/f(y, z)\}\ \{x/f(z), y/w\}$

Sintaxis LPO: Ejercicios V (Formalización de argumentos)

- Definir LPOs en los que formalizar los siguientes argumentos:
  1. La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. Todo cuerpo que orbita en torno al Sol es un planeta. Son satélites los cuerpos que orbita en torno a planetas. Luego la Tierra es un planeta y la Luna un satélite.
  2. Cero es un número natural. El sucesor de un número natural es también un número natural. Uno es sucesor de cero. Luego uno es un número natural.
  3. Cero es un número natural. El sucesor de un número natural es también un número natural. La suma de cualquier número natural y cero es igual a ese mismo número. La suma de un número y el sucesor de otro es igual al sucesor de la suma del primero más el antecesor del segundo.

Sintaxis LPO: Ejercicios V (Formalización de argumentos) cont.

- Definir LPOs en los que formalizar los siguientes argumentos:
  4. Aquel que no existe no puede engañarse. Yo me engaño. Luego yo existo. (A. Deaño)
  5. Solamente las personas bien educadas están suscritas al Times. Ningún puercoespín sabe leer. Las personas bien educadas saben leer. Luego ningún puercoespín está suscrito al Times. (L. Carroll)
  6. Todos los filósofos se han preguntado qué es la Filosofía. Todos los que se han preguntado qué es la Filosofía han dado en la locura. Nietzsche es un filósofo. El Padre Ceballos no acabó loco. Luego Nietzsche y el Padre Ceballos no son la misma persona. (A. Deaño)

Sintaxis LPO: Ejercicios V (Formalización de argumentos) cont.

- Definir LPOs en los que formalizar los siguientes argumentos:
  7. Todos los libros de texto son tediosos Algunos libros de texto están llenos de ejercicios. Luego algunos libros llenos de ejercicios son tediosos
  8. Todos los políticos tienen algo que ocultar Algunos políticos salen en televisión. Luego hay quienes tienen algo que ocultar y salen en televisión
  9. Todos los chimpancés son primates Sara es un chimpancé. Luego Sara es un primate
  10. Algunos primates no son chimpancés Algunos chimpancés saben hablar. Luego algunos primates no saben hablar
  11. Ningún individuo que no sea chimpancé es un primate Ninguno que no sea primate es inteligente Sara no es un chimpancé. Luego Sara no es inteligente

Sintaxis LPO: Ejercicios V (Formalización de argumentos) cont.

- Definir LPOs en los que formalizar los siguientes argumentos:
  12. Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente.
  13. Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.
  14. No todos los seres humanos saben hablar o son inteligentes. Sara es un ser humano pero no sabe hablar. En consecuencia, Sara es inteligente.
  15. Todos los chimpancés saben hablar. Algunos primates no saben hablar. Algunos primates son humanos. Por tanto, algunos seres humanos son chimpancés y saben hablar.

Sintaxis LPO: Ejercicios V (Formalización de argumentos) cont.

- Definir LPOs en los que formalizar los siguientes argumentos:
  16. Todos los chimpancés son primates. Algunos seres humanos son inteligentes. Algunos primates son seres humanos. Juan es un chimpancé y Sara es un ser humano que sabe hablar. Así pues , Juan es un primate y Sara es inteligente.
  17. Todos los rinocerontes tienen un cuerno. Todos y sólo los rinocerontes son dignos de ser cazados. Luego todos los animales dignos de ser cazados tienen un cuerno.
  18. Todas las selvas tropicales tienen color verde. Nada que tenga color verde esta seco. Por tanto, ninguna selva tropical esta seca.
  19. Ningún fotógrafo es pintor. Todo aquel que no es fotógrafo es buen dibujante. Así pues, todos los pintores son buenos dibujantes.

Semántica LPO: Objetivo

Semántica LPO: Objetivo

- Dado un LPO, definir de modo preciso el significado de sus fórmulas.
- Conceptos semánticos empleados en semántica formal:
  - Dominio de interpretación D: conjunto no vacío de objetos
    - Relaciones n-arias: subconjuntos de Dominio^n
    - Funciones n-arias: n-tuplas de obj. del dominio $\rightarrow$ obj. del dominio
- Función de interpretación $i()$:
  - Fórmulas $\rightarrow \{V, F\}$
  - Términos $\rightarrow$ objetos del dominio
  - Predicados y funciones $\rightarrow$ relaciones y funciones en obj. del dominio
- Interpretación I: $\langle D, i() \rangle$
  - Un dominio no vacío de individuos, D
  - Una función $i()$ de individuos de D, funciones y relaciones sobre D a todas las constantes, funciones y predicados del LPO.

Semántica LPO: Dominios de interpretación

- Las expresiones de un lenguaje sólo significan algo cuando se refieren o hablan de algo. Esto es el dominio o universo de discurso.
- Punto de partida: elección de un dominio no vacío de interpretación:
  - $D = \{Sol, Tierra, Luna\}$; $D = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; $D = \{\blacklozenge, \bigcirc, \square\}$
- A continuación, se define la función de interpretación para el lenguaje L:
  - Para toda constante $a \in L : i(a) = d, d \in D$
    - Todo individuo de D debe tener un nombre (distinto) en L
    - Si L no tuviera suficientes constantes, se amplía con las constantes necesarias y se denomina $L(D)$
  - Para toda función n-aria $f \in L : i(f) = f_D$
    - $f_D : \langle d_1, \ldots, dn \rangle \rightarrow d$ (aplicación de D^n en D)
  - Para todo predicado n-ario $P \in L : i(P) = P_D$
    - $P_D : \langle d_1, \ldots, dn \rangle \rightarrow \{V, F\}$ (aplicación de D^n en $\{V, F\}$)

Semántica LPO: Interpretación de Fórmulas

- Dada una interpretación $I = \langle D, i() \rangle$ para un lenguaje de primer orden L:
  - Asignar significado a las fórmulas de L implica:
    - Asignar significado a las fórmulas atómicas
    - Asignar significado al resto de fórmulas mediante inducción
  - Asignación de valor de verdad a las fórmulas atómicas de L:
    $i(P(t_1, \ldots, t_n)) = V/F$ sii $P_D(i(t_1), \ldots, i(t_n)) = V/F$
    - Cada interpretación concreta asignará un y sólo un valor de verdad a cada fórmula atómica de L. Dos interpretaciones sobre un mismo dominio y para un mismo lenguaje difieren entre sí en el valor de verdad que asignan.
    - En el caso del predicado $=$, su semántica es fija, sin variación entre interpretaciones:

$i(t1 = t2) = V/F$ sii $i(t_1)$ es idéntico a / no es idéntico a $i(t_2)$

Semántica LPO: Interpretación de Fórmulas (cont.)

- Asignación de valor de verdad a fórmulas:

$i(\neg A) = V$ sii $i(A) = F$

$i(A \wedge B) = V$ sii $i(A) = i(B) = V$

$i(A \vee B) = F$ sii $i(A) = i(B) = F$

$i(A \rightarrow B) = F$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = F$

$i(A \leftrightarrow B) = V$ sii $i(A) = i(B)$

$i(\exists x A) = V$ sii $i(Ax/a) = V$ para al menos una constante a de $L(D)$

$i(\forall x A) = V$ sii $i(Ax/a) = V$ para toda constante a de $L(D)$

Semántica LPO: Ejemplo I: $\forall x(M(a,x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)$

- Construimos una interpretación sobre el dominio de los números naturales:
$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$
- El lenguaje de la fórmula sólo tiene un símbolo de constante (a), por lo que ampliamos el conjunto de constantes y definimos $L(D)$:
$$Ctes. = \{a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$
- La función de interpretación i podría ser:
  - $i(a) = 0, i(a_1) = 1, i(a_2) = 2, i(a_3) = 3, \dots$
  - $P_D(x)$: x es par; $Q_D(x)$: x es impar; $M_D(x,y)$: $x < y$

Semántica LPO: Ejemplo I (cont.)

Bajo esta interpretación: $i(\forall x(M(a,x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)) = V$

- $i(\forall x(M(a,x) \wedge P(x))) = F$ porque:
  - $i((M(a,x) \wedge P(x))\{x/a\}) = i(M(a,a) \wedge P(a)) =$
    $M_D(i(a), i(a)) \wedge P_D(i(a)) = M_D(0,0) \wedge P_D(0) = F$
- $i(\neg\exists y Q(y)) = F$ porque:
  - $i(\exists y Q(y)) = V$ porque:
    - $i(Q(y)\{y/a_1\}) = i(Q(a_1)) = Q_D(i(a_1)) = Q_D(1) = V$

Semántica LPO: Ejemplo II: $\forall x(M(a,x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)$

- Construimos una interpretación sobre un dominio finito:
$$D = \{\bigcirc, \square, \blacklozenge\}$$
- El lenguaje de la fórmula sólo tiene un símbolo de constante (a), por lo que ampliamos el conjunto de constantes y definimos L(D):
$$Ctes. = \{a, b, c\}$$
- La función de interpretación i podría ser:
  - i(a) = $\bigcirc$, i(b) =$\square$, i(c) =$\blacklozenge$

P_D	
$\bigcirc$	V
$\square$	V
$\blacklozenge$	V

Q_D	
$\bigcirc$	V
$\square$	F
$\blacklozenge$	V

M_D			
$\bigcirc$	V	V	V
$\square$	F	F	V
$\blacklozenge$	V	F	F

Semántica LPO: Ejemplo II (cont.)

Bajo esta interpretación: $i(\forall x(M(a,x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)) = F$

- $i(\forall x(M(a,x) \wedge P(x))) = V$ porque:
  1. $i((M(a,x) \wedge P(x))\{x/a\}) = M_D(i(a), i(a)) \wedge P_D(i(a)) = M_D(\bigcirc, \bigcirc) \wedge P_D(\bigcirc) = V$
  2. $i((M(a,x) \wedge P(x))\{x/b\}) = M_D(i(a), i(b)) \wedge P_D(i(b)) = M_D(\bigcirc, \square) \wedge P_D(\square) = V$
  3. $i((M(a,x) \wedge P(x))\{x/c\}) = M_D(i(a), i(c)) \wedge P_D(i(c)) = M_D(\bigcirc, \blacklozenge) \wedge P_D(\blacklozenge) = V$
- $i(\neg\exists y Q(y)) = F$ porque:
  - $i(\exists y Q(y)) = V$ porque:
    - $i(Q(y)\{y/a\}) = i(Q(a)) = Q_D(i(a)) = Q_D(\bigcirc) = V$

Semántica LPO: Ejercicio: Aritmética de Peano

1. Dadas las fórmulas:

$$\{N(a), \forall x(N(x) \rightarrow N(s(x))), \forall x(N(x) \rightarrow x + a = x),$$
$$\forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow x + s(y) = s(x + y))\}$$

interpretarlas en el dominio de los números naturales (con el 0), siendo $N(\_)$ la propiedad de ser un número natural, $= (\_, \_)$ la relación de identidad y $s(\_)$ y $+(\_, \_)$ las funciones sucesor y suma, respectivamente.

Satisfabilidad: Formulas Abiertas

Satisfabilidad: Formulas Abiertas

- Hemos visto como establecer claramente el significado de una fórmula cuando ésta es cerrada, pero ¿cómo interpretar una fórmula abierta?
- Ejemplos de fórmulas abiertas:
  1. Alguien es el rey de Canadá: $R(x, a)$
  2. Algo es igual a dos: $x = 2$
  3. Alguien va a morir: $M(x)$
- ¿Que significado tienen estas fórmulas abiertas?
  1. $R(x, a)$ es falsa pues ninguna sustitución de x produce una afirmación verdadera: ninguna persona es rey de Canadá.
  2. $x = 2$ es una fórmula que puede ser verdadera si sustituimos x por el número 2, mientras que será falsa si elegimos otro número.
  3. $M(x)$ es una fórmula que siempre es verdadera para cualquier nombre de persona que sustituya a x.

Satisfabilidad: Formulas Abiertas

- Sea A una fórmula abierta de L (LPO):
  - A es satisfacible cuando puede ser verdadera:
    - Hay una interpretación $\langle D, i()\rangle$ y una sustitución $\theta = \{x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n\}$ de todas sus variables libres por constantes de $L(D)$ que la hacen verdadera
      (existe una $\langle D, i()\rangle$ y una θ tal que $i(A\theta) = V$)
  - A es verdadera en una interpretación $\langle D, i()\rangle$ cuando:
    - Toda sustitución θ de sus variables libres por constantes de $L(D)$ la hacen verdadera ($i(A\theta) = V$ para toda θ)
  - A es válida cuando es verdadera en toda interpretación
    - $i(A\theta) = V$ para toda $\langle D, i()\rangle$ y toda θ

Satisfabilidad: Fórmulas Cerradas

- Dada una fórmula abierta $A(x_1, \ldots, x_n)$, definimos:
  - Cierre existencial de $A(x_1, \ldots, x_n)$: $\exists x_1, \ldots, x_n A$
  - Cierre universal de $A(x_1, \ldots, x_n)$: $\forall x_1, \ldots, x_n A$

Relaciones semánticas entre fórmulas abiertas y cerradas:

- $A(x_1, \ldots, x_n)$ es satisfacible sii $\exists x_1, \ldots, x_n A$ es satisfacible.
- $A(x_1, \ldots, x_n)$ es insatisfacible sii $\exists x_1, \ldots, x_n A$ es insatisfacible.
- $A(x_1, \ldots, x_n)$ es verdadera en I sii $\forall x_1, \ldots, x_n A$ es verdadera en I.
- $A(x_1, \ldots, x_n)$ es válida sii $\forall x_1, \ldots, x_n A$ es válida.

Satisfabilidad: Fórmulas Cerradas

- Satisfabilidad de una fórmula:
  - Una interpretación $\langle D, i() \rangle$ satisface una fórmula A sii $i(A) = V$
  - Una fórmula A es satisfacible sii existe al menos una interpretación $\langle D, i() \rangle$ tal que $i(A) = V$
  - Una fórmula A es insatisfacible sii no existe ninguna interpretación $\langle D, i() \rangle$ tal que $i(A) = V$
- Extensión a conjuntos de fórmulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$:
  - Una interpretación $\langle D, i() \rangle$ satisface $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sii $i(A_i) = V$ para todo $i : 1 \leq i \leq n$
  - $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es satisfacible sii existe al menos una interpretación $\langle D, i() \rangle$ tal que $i(A_i) = V$ para todo $i : 1 \leq i \leq n$
  - $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es insatisfacible sii no existe ninguna interpretación $\langle D, i() \rangle$ tal que $i(A_i) = V$ para algún $i : 1 \leq i \leq n$
- Una fórmula A es válida sii $i(A) = V$ para toda interpretación $\langle D, i() \rangle$

Satisfabilidad: Modelos vs. Contramodelos

- **Modelo**: una interpretación I es modelo de una fórmula A sii
  - $i(A) = V$ cuando A es una fórmula cerrada
  - $i(A\theta) = V$ para toda sustitución θ de todas sus variables libres, cuando A es una fórmula abierta
- **Contramodelo**: una interpretación I es contramodelo de A sii
  - $i(A) = F$ cuando A es una fórmula cerrada
  - $i(A\theta) = F$ para alguna sustitución θ de todas sus variables libres, cuando A es una fórmula abierta

Teoría interpretativa: Validez y Consecuencia Lógica

Teoría interpretativa: Validez y Consecuencia Lógica

- Validez lógica
  - Una fórmula $A \in L$ es válida (lógicamente válida) sii es verdadera en toda interpretación: $\models A$
- Consecuencia lógica
  - Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ $(A_i \in L)$ y una fórmula $B \in L$, B es consecuencia lógica de Γ $(\Gamma \models B)$ sii:
    - Todo modelo de Γ es también modelo de B (toda interpretación que haga verdad a Γ también hace verdad a B)
    - No existe ninguna interpretación que haga verdad a Γ y que no haga verdad a B

Teoría interpretativa: Ejemplo Validez I: $\models \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

Considerando $D = \{1,2\}$, $L(D) = \{P/2\} \cup \{a,b\}$

La fórmula es válida.

- No hay forma de encontar contramodelos. Justificación:
  1. $i(\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii $i(\exists x \forall y P(x,y)) = V$ sii
     - $i(\forall y P(a,y)) = V$ sii $i(P(a,a)) = V$ y $i(P(a,b)) = V$
     - o bien $i(\forall y P(b,y)) = V$ sii $i(P(b,a)) = V$ y $i(P(b,b)) = V$
  2. y $i(\forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii
     - $i(\exists x P(x,a)) = F$ sii $i(P(a,a)) = F$ y $i(P(b,a)) = F$
     - o bien $i(\exists x P(x,b)) = F$ sii $i(P(a,b)) = F$ y $i(P(b,b)) = F$
- La imposibilidad de encontrar contramodelos NO es exclusiva de esta interpretación. Verificar el antecedente es incompatible con hacer falso el consecuente.

Teoría interpretativa: Ejemplo Validez II: $\models \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

Considerando $D = \{1,2\}$, $L(D) = \{P/2\} \cup \{a,b\}$

La fórmula NO es válida.

- Porque la siguiente interpretación es un contramodelo:
  - i(a) = 1
  - i(b) = 2
  - $P_D(1,1) = V$, $P_D(1,2) = F$, $P_D(2,1) = F$, $P_D(2,2) = V$
- Justificación:
  1. $i(\forall y \exists x P(x,y)) = V$ porque:
     1. $i(P(a,a)) = V$ porque $P_D(i(a), i(a)) = P_D(1,1) = V$
     2. y $i(P(b,b)) = V$ porque $P_D(i(b), i(b)) = P_D(2,2) = V$
  2. $i(\exists x \forall y P(x,y)) = F$ porque:
     1. $i(P(a,b)) = F$ porque $P_D(i(a), i(b)) = P_D(1,2) = F$
     2. y $i(P(b,a)) = F$ porque $P_D(i(b), i(a)) = P_D(2,1) = F$

Teoría interpretativa: Ejemplo Consecuencia Lógica I

- Sea el argumento: Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente.
- Y su formalización: $\{\exists x(I(x) \vee H(x)), \neg H(a)\} \models \neg I(a)$
- Para determinar la corrección de este argumento (si hay consecuencia lógica) por medios semánticos, intentamos encontrar un contramodelo, es decir una interpretación que:
    1. Verifique las premisas: $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ y $i(\neg H(a)) = V$
    2. Haga falsa la pretendida conclusión: $i(\neg I(a)) = F$
- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p. ej., $D = \{Juan, Pedro\}$
- Ampliemos el lenguaje de formalización con una nueva constante: b

Teoría interpretativa: Ejemplo Consecuencia Lógica I (cont.)

- La interpretación:
  1. $i(a) = Juan$, $i(b) = Pedro$
  2. $I_D(Juan) = V$, $I_D(Pedro) = V$, $H_D(Juan) = F$, $H_D(Pedro) = V$
- Verifica las premisas 1 y 2 y hace falsa la conclusión 3:
  1. $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ sii $i((I(x) \vee H(x))\{x/c\}) = V$ para alguna constante c de L.

     Sea a esa constante: $i(I(a) \vee H(a)) = V$ sii

     1.a $i(I(a)) = V$ sii: $i(I(a)) = V$, $i(a) = Juan$ y $I_D(Juan) = V$

     1.b o bien $i(H(a)) = V$ ...
  2. y $i(\neg H(a))) = V$ sii $i(H(a)) = F$ sii: $i(a) = Juan$ y $H_D(Juan) = F$
  3. y $i(\neg I(a)) = F$ sii $i(I(a)) = V$ sii: $i(a) = Juan$ y $I_D(Juan) = V$
- ... es un contramodelo, luego el argumento NO es correcto.

Teoría interpretativa: Ejemplo Consecuencia Lógica II

- Sea el argumento: Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.
- Y su formalización: $\{\forall x(E(x) \rightarrow O(x) \vee R(x)), E(a) \wedge \neg O(a)\} \vDash R(a)$
- Para determinar la corrección de este argumento por medios semánticos, tratemos de encontrar un contramodelo que:
  1. Verifique las premisas: $i(\forall x(E(x) \rightarrow O(x) \vee R(x))) = V$ y $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$
  2. Haga falsa la pretendida conclusión: $i(R(a)) = F$
- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p. ej., $D = \{carbono, oxigeno\}$
- Ampliemos el lenguaje de formalización con una nueva constante: b

Teoría interpretativa: Ejemplo Consecuencia Lógica II (cont.)

- La interpretación:
  1. $i(a) = carbono$, $i(b) = oxigeno$
  2. $E_D(carbono) = E_D(oxigeno) = V$, $O_D(carbono) = F$, $O_D(oxigeno) = V$, $R_D(carbono) = R_D(oxigeno) = F$
- No puede verificar las premisas y hacer falsa la conclusión:
  1. $i(\forall x(E(x) \to O(x) \vee R(x))) = V$ sii
     1. $i(E(a) \to O(a) \vee R(a)) = V$ sii $\quad i(E(a)) = F$ o $i(O(a) \vee R(a)) = V$
     2. $i(E(b) \to O(b) \vee R(b)) = V$ sii $\quad i(E(b)) = F$ o $i(O(b) \vee R(b)) = V$
  2. $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$ sii
     1. $i(E(a)) = V$ y $i(O(a)) = F$ $\quad$ por 1.1 $R(a) = V$
  3. $i(R(a)) = F$ $\quad$ por 1.1 y 2.1 contradicción.
- ... lo que impide crear el contramodelo no depende de I.
- Como no existe contramodelo, el argumento es correcto.

Teoría interpretativa: Ejercicio: Validez de Argumentos

- Determina por medios semánticos la validez de los siguientes argumentos:
  1. $0 > 1$. $1 > 2$. La relación '$>$' es transitiva. Por tanto, $0 > 2$.
  2. Robin Hood es generoso. Todos los ladrones son generosos. Por tanto, Robin Hood es un ladrón.
  3. Siempre que Pedro discute con María, ésta se enfada con su padre. Una persona que se enfade con otra no la invita a su boda. Luego, si Pedro discute con María, ésta no invitará a su padre a su boda.
  4. Todos los ladrones son generosos. Sólo los ricos son generosos. Robin Hood es un ladrón. Por tanto, Robin Hood es rico.
  5. Juan Carlos ama a Sofía. Quienes trabajan con Juan Carlos no conocen a fondo a Sofía. Si se ama a alguien, se le conoce a fondo. Sabino trabaja con Juan Carlos. Por tanto, Sabino no ama a Sofía.

Teoría interpretativa: Ejercicio: Validez de Argumentos (cont.)

- Determina por medios semánticos la validez de los siguientes argumentos:
  6. Hay un ladrón generoso. Por tanto, hay un ladrón y hay alguien generoso.
  7. Hay un ladrón y hay alguien generoso. Por tanto, hay un ladrón generoso.
  8. Todo elemento pesado es metálico. Por tanto, ningún no metal es un elemento pesado.
  9. No es cierto que todo sea blanco o negro. Por tanto, hay algo que no es ni blanco ni negro.

Tema 3.2: **Teorema de la demostración y deducción natural.**

Decibilidad de la Lógica de Primer Orden

Decibilidad de la Lógica de Primer Orden

- Entscheidungsproblem: Denominación original del problema planteado por Hilbert, que consiste en determinar si un argumento dado es correcto o no para la Lógica de Primer Orden.
- Problema de la parada: saber si dada una tarea (descripción de sus instrucciones) y un input para la misma es posible determinar de manera efectiva si dicha tarea finalizaría arrojando un output, no importa cuál.

Teorema (Church y Turing 1936)

La Lógica de Primer Orden con identidad no es decidible.

- Demostración: Determinar el problema de parada se reduce a demostrar en LPO la fórmula que expresa la existencia de un output a partir de la aplicación de una serie de instrucciones previamente fijadas. □

Decibilidad de la Lógica de Primer Orden (cont.)

- Es decir, NO es posible decidir, para un conjunto cualquiera de fórmulas Γ de un LPO, si $\Gamma \vdash A$ o bien $\Gamma \nvdash A$.
- Ejemplo:
  - Sea $\Gamma = \{P(a), \forall x(\ P(x) \rightarrow P(f(x))\ )\}$,
  - $\Gamma \vdash P(a), \Gamma \vdash P(f(a)), \Gamma \vdash P(f(f(a))), \Gamma \vdash P(f(f(f(a)))), \ldots$
  - ¿$\Gamma \vdash P(f(b))$? o ¿$\Gamma \nvdash P(f(b))$?
- Estrategias:
  1. Extender la deducción Natural de la lógica proposicional.
  2. Utilizar el método de resolución de Robinson (1965).
     - A partir de fórmulas simplificadas (Forma Normal de Skolem).
     - Resolver usando el unificador de máxima generalidad (UMG).
     - Elegir una estrategia de resolución computacionalmente eficiente.

Deducción Natural

Deducción Natural

- Al igual que en Lógica Proposicional podemos aplicar Deducción Natural incluyendo 4 nuevas reglas de inferencia.
- Hay fórmulas de LPO que podemos demostrar sin añadir nuevas reglas:

$$T[\exists x P(x) \to \forall y Q(y), \forall y Q(y) \to \forall z R(z)] \vdash \exists x P(x) \to \forall z R(z)$$

- En general las nuevas reglas son necesarias para:
  - "abrir" las fórmulas cuantificadas (eliminar cuantificadores).
  - aplicar las reglas de inferencia proposicionales.
  - "cerrar" las fórmulas resultantes (introducir cuantificadores).

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Existencial

Introducción de ∃

$$\frac{F(a)}{\exists x F(x)}$$

T[P(a) v Q(a)] ⊢ ∃x(P(x) v Q(x))

1.	P(a) v Q(a)	premisa
2.	∃x(P(x) v Q(x))	**$I_{\exists}$ 1**

Eliminación de ∃

$$\frac{\exists x F(x)}{F(a^*)}$$

CONDICIÓN: 'a' ha de ser un nombre temporal nuevo en la demostración*

T[∃x(P(x) ∧ Q(x))] ⊢ ∃xP(x)

1.	∃x(P(x) ∧ Q(x))	premisa
2.	P(a*) ∧ Q(a*)	**$E_{\exists}$ 1**
3.	P(a*)	E∧ 2
4.	∃xP(x)	$I_{\exists}$ 3

Deducción Natural: Reglas de inferencia: Universal

Eliminación de ∀

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)}$$

$T[\forall x P(x)] \vdash P(f(b))$	
1. $\forall x P(x)$	Premisa
2. $P(f(b))$	$E_\forall$ 1

Introducción de ∀

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}$$

CONDICIONES:

- *F(x) no es ni una premisa ni un supuesto*
- *F(x) no incluye nombres temporales*
- *x no aparece libre en ninguna premisa ni supuesto previo no cancelado*

$T[\forall x P(x)] \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$	
1. $\forall x P(x)$	premisa
2. $P(x)$	$E_\forall$ 1
3. $P(x) \vee Q(x)$	$I\vee$ 2
4. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$	$I_\forall$ 3

Deducción Natural: Ejemplos

- $T[\exists x(P(x) \wedge Q(x))] \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$P(a*) \wedge Q(a*)$	$E_{\exists}(1)$
3.	$P(a*)$	$E_{\wedge}(2)$
4.	$\exists x P(x)$	$I_{\exists}(3)$
5.	$Q(a*)$	$E_{\wedge}(2)$
6.	$\exists x Q(x)$	$I_{\exists}(5)$
7.	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	$I_{\wedge}(4, 6)$

- Se introduce $a*$ como una constante nueva, sólo vigente mientras llegamos a deducir la fórmulas que nos interesan, que son $\exists x P(x)$ y $\exists x Q(x)$

Deducción Natural: Ejemplo (Incorrecto)

- $T[\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] \vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

1.	$\exists x(P(x) \wedge \exists x Q(x)$	premisa
2.	$\exists x P(x)$	$E_{\wedge}(1)$
3.	$P(a*)$	$E_{\exists}(2)$
4.	$\exists x Q(x)$	$E_{\wedge}(1)$
5.	$Q(a*)$	$E_{\exists}(4)$
6.	$P(a*) \wedge Q(a*)$	$I_{\wedge}(3,5)$
7.	$\exists(xP(x) \wedge xQ(x))$	$I_{\exists}(6)$

- Al usar otra vez $a*$ damos a entender que el elemento que cumple Q es el mismo que cumple P, y no tiene por qué ser así.

Deducción Natural: Ejemplo

- $T[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))] \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premisa
2.	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	premisa
3.	$P(x) \rightarrow Q(x)$	$E_\forall(1)$
4.	$Q(x) \rightarrow R(x)$	$E_\forall(2)$
5.	$\quad P(x)$	supuesto
6.	$\quad Q(x)$	$E_\rightarrow(3,5)$
7.	$\quad R(x)$	$E_\rightarrow(4,6)$
8.	$P(x) \rightarrow R(x)$	$I_\rightarrow(5,7)$
9.	$\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	$I_\forall(8)$

Deducción Natural: Ejemplo (Incorrecto)

- $T[\exists x P(x)] \vdash \forall x P(x)$

1.	$\exists x P(x)$	premisa
2.	$P(a*)$	$E_\forall(1)$
3.	$\forall x P(x)$	$I_\forall(2)$

- $T[\forall x \exists y M(y,x)] \vdash \exists y \forall x M(y,x)$

1.	$\forall x \exists y M(y,x)$	premisa
2.	$\exists y M(y,x)$	$E_\forall(1)$
3.	$M(a*,x)$	$E_\exists(2)$
4.	$\forall x M(a*,x)$	$I_\forall(3)$
5.	$\exists y \forall x M(y,x)$	$I_\exists(4)$

- No se puede generalizar una fórmula que tiene constantes temporales.

Tema 3.3: **Simplificación de fórmulas.**

Objetivo

Objetivo

- Queremos simplificar las fórmulas mediante transformaciones de una fórmula F a otra F' (preservando ciertas propiedades):
  - La satisfabilidad: Existe un modelo I de F sii existe un modelo I' (probablemente no el mismo) de F'
    $$\text{SAT}(\exists x\ p(x)) \text{ sii } \text{SAT}(p(a))$$
  - La semántica: Para toda interpretación I, I es un modelo de F sii es un modelo de F'
    $$\forall x\ p(x) \text{ es semánticamente equivalente a } \neg\exists x\ \neg p(x)$$

Objetivo (cont.)

- Ejemplo: De LPO a Forma Normal de Skolem (FNS) a Forma Clausular:

$$\begin{array}{cc}
\text{Fórmula en LPO} & \exists y(\forall x(p(x,f(y)) \to q(z)) \land \neg\exists w\ p(g(w),y)) \\
\downarrow & \downarrow \\
\text{Fórmula en FNS} & \forall x \forall w(\neg p(x,f(b)) \lor q(a) \land \neg p(g(w),b)) \\
\downarrow & \downarrow \\
\text{Forma Clausular} & \{\neg p(x,f(b)) \lor q(a),\ \neg p(g(w),b)\}
\end{array}$$

- Preserva la satisfabilidad pero NO preserva todos los modelos (la semántica): el resultado no es equivalente a la fórmula original.

Forma Normal de Skolem

Forma Normal de Skolem

- Procedimiento para obtener la Forma Normal de Skolem (FNS) de una fórmula A:
  1. Obtener la forma Prenex: Todos los cuantificadores a la cabeza de la fórmula. La forma Prenex(A) siempre existe, aunque puede no ser única.
  2. Realizar el cierre existencial: Se quitan las variables libres. Una fórmula $A(x)$ es satisfacible sii $\exists x\ A(x)$ es satisfacible.
  3. Obtener la forma normal conjuntiva: Conjunción de disyunciones. La forma normal conjuntiva de A siempre existe.
  4. Eliminar los cuantificadores existenciales: Dejar solo los cuantificadores universales. El resultado es la FNS.

  Una fórmula A es satisfacible sii $FNS(A)$ es satisfacible.

Forma Normal de Skolem: 1. Obtener Forma Prenex

- Poner cuantificadores a la cabeza de la fórmula usando:
  - Cambio de nombre de variables ligadas:

$$\forall x A(x) \leftrightarrow \forall y A(x/y) \qquad \exists x A(x) \leftrightarrow \exists y A(x/y)$$

… si y no está libre en A

  - Interdefinición de cuantificadores:

$$\neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x) \qquad \neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

  - Distribución de conectivas respecto a cuantificadores:

$$\forall x A \wedge C \leftrightarrow \forall x(A \wedge C) \qquad (\forall x A \rightarrow C) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow C)$$
$$\exists x A \wedge C \leftrightarrow \exists x(A \wedge C) \qquad (\exists x A \rightarrow C) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow C)$$
$$\forall x A \vee C \leftrightarrow \forall x(A \vee C) \qquad (A \rightarrow \forall x C) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow C)$$
$$\exists x A \vee C \leftrightarrow \exists x(A \vee C) \qquad (A \rightarrow \exists x C) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow C)$$

… si x no está libre en la otra subfórmula

$$\forall x A \wedge \forall x C \leftrightarrow \forall x(A \wedge C) \qquad (\exists x A \vee \exists x C) \leftrightarrow \exists x(A \vee C)$$

Forma Normal de Skolem: 2. Cierre existencial

- Las variables libres de la fórmula se ligan existencialmente poniendo el cuantificador correspondiente en cabeza de la fórmula.
- Ejemplo:

$$\forall y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow r(f(z), x))$$
$$\downarrow$$
$$\exists x \forall y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow r(f(z), x))$$

Forma Normal de Skolem: 3. Forma normal conjuntiva

- Transformar en conjunción de disyunciones usando:
  - Interdefinición:

$$(A \to B) \;\leftrightarrow\; (\neg A \lor B)$$
$$(A \leftrightarrow B) \;\leftrightarrow\; (A \to B) \land (B \to B)$$

  - Leyes de De Morgan

$$\neg(A \land B) \;\leftrightarrow\; \neg A \lor \neg B$$
$$\neg(A \lor B) \;\leftrightarrow\; \neg A \land \neg B$$

  - Distribución de $\lor$ y $\land$

$$A \land (B \lor C) \;\leftrightarrow\; (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \;\leftrightarrow\; (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Forma Normal de Skolem: 4. Eliminación de cuantificadores exitenciales

- Se elimina el cuantificador existencial sustituyendo la variable que ligaba por una función de Skolem o constante de Skolem.
- La función de Skolem será una función nueva en la fórmula, aplicada a todas la variables cuantificadas universalmente que aparecen antes que el cuantificador existencial a eliminar. Si no hay tales variables se utilizará una constante nueva en la fórmula para hacer la sustitución.
- Ejemplos:
  - $\forall x \exists y (p(x) \rightarrow \neg q(y))$ se transforma en $\forall x (p(x) \rightarrow \neg q(f(x)))$
  - $\exists x \forall z (q(x, z) \vee r(a, x))$ se transforma en $\forall z (q(b, z) \vee r(a, b))$
  - $\exists x \forall y \exists z (p(x) \wedge q(y) \rightarrow r(f(z), x))$ se transforma en $\forall y (p(a) \wedge q(y) \rightarrow r(f(g(y)), a))$

Forma Clausular

Forma Clausular

- Una cláusula es una disyunción de literales.
- La forma clausular es la conjunción de las cláusulas, cuyas variables están todas ellas ligadas universalmente.
- Ejemplo:

$$A : \forall x \forall w (\neg p(x, f(b)) \vee q(a) \wedge \neg p(g(w), b) e)$$
$$\downarrow$$
$$FC(A) : \{\neg p(x, f(b)) \vee q(a),\ \neg p(g(w), b)\}$$

Teorema

Una fórmula F es satisfacible sii FC(F) es satisfacible

Forma Clausular: De una deducción

- Una deducción $T[P_1, P_2, \ldots, P_n] \vdash C$ es correcta sii $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge \neg C$ es insatisfacible
- Por lo tanto dada una deducción $T[P_1, P_2, \ldots, P_n] \vdash C$:
  - Obtener la forma clausular de cada P_i, $i \leq i \leq n$.
  - Obtener la forma clausular de $\neg C$.
  - Realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas.
  - Comprobar la satisfacibilidad (p.ej. mediante el método de resolución de Robinson).

Objetivo

Una deducción $T[P_1, P_2, \ldots, P_n] \vdash C$ es correcta sii $\{P_1, P_2, \ldots, \neg C\}$ es insatisfacible

Tema 3.4: **Método de resolución de Robinson.**

Introducción

Introducción

- Una fórmula A es insatisfacible sii no existe ninguna interpretación I tal que $I(A) = V$ (sii todas las interpretaciones la evalúan como falsa)
  - Si A es una fórmula proposicional el número de interpretaciones a analizar es finito: 2^n, siendo n el número de proposiciones diferentes que la integran.
  - Si A es una fórmula de primer orden el número de interpretaciones a analizar sería infinito y no numerable.
- Solución: Las interpretaciones de Herbrand:
  - Cuyo número sea menor (finito o infinito numerable como mucho).
  - Cuyo análisis fuese suficiente para determinar la insatisfaciblidad de A (si A es insatisfacible para esas interpretaciones también lo es para cualquier otra).

Interpretaciones de Herbrand: Universo

Interpretaciones de Herbrand: Universo

- El dominio de la interpretación de un fórmula A en las interpretaciones de Herbrand, es H, el Universo de Herbrand de A.
- Se define de manera recursiva a partir de las constantes y funciones de A, aplicadas de todas las formas posibles.
  - Sea C el conjunto de constantes de A.
  - Sea F el conjunto de funciones de A.

$H_0 = C$ si $C \neq \emptyset$ o $H_0 = \{a\}$ si $C = \emptyset$

$H_i = \{f(t_1, \dots, t_n)/t_j \in (H_{i-1} \cup \dots \cup H_0), f/n \in F\}$

$H = H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_i \cup \dots$

Interpretaciones de Herbrand: Universo (Ejemplos)

- $A = \{P(x), Q(y)\}$ $\qquad C = \emptyset \qquad F = \emptyset$

  $H_0 = \{a\}$
  $H_1 = H_2 = \cdots = \emptyset$
  $H = \{a\}$

- $A = \{P(a), Q(y) \vee \neg R(b, f(x))\}$ $\qquad C = \{a, b\} \qquad F = \{f/1\}$

  $H_0 = \{a, b\}$
  $H_1 = \{f(a), f(b)\}$
  $H_2 = \{f(a), f(f(a)), f(b), f(f(b))\}$
  $\ldots$
  $$H = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots\} =$$
  $$= \{a, b, f^n(a), f^n(b), \forall n \geq 1\}$$

Interpretaciones de Herbrand: Base

- Átomo básico: Se obtiene aplicando un símbolo de predicado de la fórmula a términos de su universo de Herbrand.
- Base de Herbrand (BH) de una fórmula A: Conjunto de todos los átomos básicos de A.
- Contiene todos los predicados de A aplicados a todos los términos de H de todas las formas posibles.
  - Sea P el conjunto de predicado de A

$$BH = \{P(t_1, \ldots, t_n)/t_j \in H, P/n \in P\}$$

Interpretaciones de Herbrand: Base (Ejemplos)

- $A = \{P(x), Q(y)\}$ $\qquad H = \{a\}$
  $BH = \{P(a), Q(a)\}$

- $A = \{P(a), Q(y) \vee \neg R(b, f(x))\}$ $\qquad H = \{a, b, f(a), f(b), \dots\}$
  $$\begin{aligned} BH = \{\; & P(a), P(f(a)), \dots, P(f^n(a)), \dots, \\ & P(b), P(f(b)), \dots, P(f^n(b)), \dots, \\ & Q(a), Q(f(a)), \dots, Q(f^n(a)), \dots, \\ & Q(b), Q(f(b)), \dots, Q(f^n(b)), \dots, \\ & R(a,a), R(a,b), \dots, R(a, f^n(a)), \dots, \\ & R(b,a), \dots, R(f^n(b), f^m(a)), \dots\} = \\ & = \{P(t), Q(t), R(t,t'),\; \forall t, t' \in H\} \end{aligned}$$

Interpretaciones de Herbrand: Definición

- Finalmente, una interpretación de Herbrand (IH) de una fórmula A es un interpretación sobre H tal que:
  - Cada constante $a \in C$ se asocia consigo misma: $IH(a) = a$
  - Cada símbolo de función $f/n \in F$ se asocia con la función f_H/n
    - $f_H : H^n \Rightarrow H$
    - $IH(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = f_H(IH(t_1), IH(t_2), \dots, IH(t_n)) = f_H(t_1, t_2, \dots, t_n) = t$
  - Cada símbolo de predicado $P/n \in P$ se asocia con el predicado P_H/n
    - $P_H : H^n \Rightarrow \{V, F\}$
    - $IH(P(t_1, \dots, t_n)) = P_H(IH(t_1), \dots, IH(t_n)) = P_H(t_1, t_2, \dots, t_n) = \text{V (o F)}$
  - Cada átomo básico de BH tiene un valor de verdad.

Notación: C es el conjunto de constantes, F el conjunto de símbolos de función y P el conjunto de símbolos de predicado del LPO de A

Interpretaciones de Herbrand: Ejemplos

- Una interpretación Herbrand se puede representar como el conjunto de los átomos básicos de la Base de Herbrand, afirmados si se interpretan como verdaderos y negados si se interpretan como falsos
- $A = \{P(x), Q(y)\}$ $\quad BH = \{P(a), Q(a)\}$

  $IH_1 = \{P(a), Q(a)\}$ $\quad IH_1(P(a))=V,\ IH_1(Q(a))=V$

  $IH_2 = \{P(a), \neg Q(a)\}$ $\quad IH_2(P(a))=V,\ IH_2(Q(a))=F$

  $IH_3 = \{\neg P(a), Q(a)\}$ $\quad IH_3(P(a))=F,\ IH_1(Q(a))=F$

  $IH_4 = \{\neg P(a), \neg Q(a)\}$ $\quad IH_4(P(a))=F,\ IH_4(Q(a))=F$

Interpretaciones de Herbrand: Satisfabilidad

Una fórmula A es insatisfacible sii

A es falsa para todas sus interpretaciones Herbrand (IH_i)

- Por lo tanto, para estudiar la insatisfacibilidad de una fórmula basta con estudiar las interpretaciones Herbrand de su forma clausular:
  - Si alguna IH_i evalúa A como verdadera entonces A es satisfacible.
  - Si ninguna IH_i evalúa A como verdadera entonces es insatisfacible.
- Ejemplo: $A = \{P(x), Q(y)\}$
  - $IH_1 = \{P(a), Q(a)\}$
    es un modelo de A (hace verdad todas las instancias).
  - $IH_2 = \{P(a), \neg Q(a)\}, IH_3 = \{\neg P(a), Q(a)\}, IH_4 = \{\neg P(a), \neg Q(a)\}$, son contramodelos de A (falsifican una o las dos instancias).

Teorema de Herbrand

Teorema de Herbrand

- Cualquier interpretación de Herbrand que evalúe una fórmula A como verdadera, debe hacer verdad a todas y cada una de las instancias básicas de la fórmula.

Teorema de Herbrand

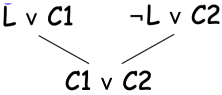
Un conjunto de cláusulas C es insatisfacible sii existe un conjunto finito de instancias básicas de cláusulas de C que es insatisfacible.

- El teorema sugiere que dado un conjunto de cláusulas C insatisfacible, mediante un procedimiento mecánico generar incrementalmente conjuntos de instancias básicas $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ de cláusulas de C y analizar de forma sucesiva la insatisfacibilidad de $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, se podría detectar un k tal que S_k es insatisfacible.
  - P.ej., método de Resolución de Robinson (1965).

Método de Resolución de Robinson

Método de Resolución de Robinson

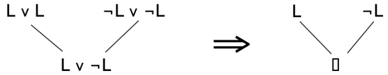
- Idea general: Plantear un método de obtención de nuevas instancias deducidas del conjunto original, de forma que si llega a deducirse un literal y su negación puede concluirse que el conjunto original es insatisfacible.
- Está basado en la regla de resolución básica: De dos instancias básicas $L \vee C1$ y $\neg L \vee C2$ (L es un literal) puede deducirse una nueva instancia básica $C1 \vee C2$, llamada resolvente:



- La aplicación sucesiva de la regla de resolución permite obtener una contradicción cuando el conjunto original es insatisfacible.

Método de Resolución de Robinson (cont.)

- La contradicción se obtiene cuando se deducen dos instancias básicas (literales aislados) L y $\neg L$. La aplicación de la regla sobre L y $\neg L$ genera [], llamada cláusula vacía.
- Para asegurarnos deducir la cláusula vacía hay que tener en cuenta la idempotencia $L \vee L \Rightarrow L$



- o aplicar la regla de resolución básica extendida, que de dos instancias $L \vee \cdots \vee L \vee C1$ y $\neg L \vee \cdots \vee \neg L \vee C1$ deduce $C1 \vee C2$.

Método de Resolución de Robinson: Algoritmo

- Dado un conjunto C de instancias básicas:
  1. Generar el conjunto R de todos los resolventes que pueden obtenerse aplicando la regla de resolución entre instancias del conjunto C de todas las formas posibles.
  2. Si [] está incluida en R entonces terminar $\Rightarrow$ C es insatisfacible.
  3. Si $R \subseteq C$ significa que ya se han generado todos los resolventes posibles, entonces terminar $\Rightarrow$ C es satisfacible.
  4. Hacer $C = C \cup R$ y repetir desde paso 1.
- El método es correcto: Si deducimos [] entonces C es insatisfacible.
- El método es completo: Si C is insatisfacible, entonces con la aplicación de la regla de resolución deduciremos [].

Método de Resolución de Robinson: Ejemplo

- Resolución aplicando el procedimiento de saturación:

C = {I1: ¬p(a, f(b)), I2: ¬p(b, f(b)), I3: p(a, f(b)) ∨ q(f(b)), I4: p(b, f(b)) ∨ ¬q(f(b))}

resuelve I1 con I2: NO
resuelve I1 con I3: q(f(b))
resuelve I1 con I4: NO
resuelve I2 con I3: NO
resuelve I2 con I4: ¬q(f(b))
resuelve I3 con I4: p(a, f(b)) ∨ p(b, f(b))

R = {I5: q(f(b)), I6: ¬q(f(b)), I7: p(a, f(b)) ∨ p(b, f(b))}

En R no está □ , por tanto redefinimos C = C ∪ R y buscamos <u>nuevos</u> resolventes:

resuelve I1 con I5: NO
resuelve I1 con I6: NO
resuelve I1 con I7: p(b, f(b))
resuelve I2 con I5: NO
resuelve I2 con I6: NO
resuelve I2 con I7: p(a, f(b))

resuelve I3 con I5: NO
resuelve I3 con I6: p(a, f(b))
resuelve I3 con I7: NO
resuelve I4 con I5: p(b, f(b))
resuelve I4 con I6: NO
resuelve I4 con I7: NO

resuelve I5 con I6: □
resuelve I5 con I7: NO
resuelve I6 con I7: NO

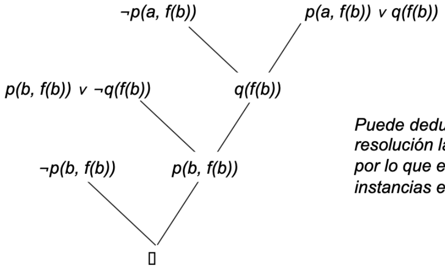
R = {p(b, f(b)), p(a, f(b)), □ }

R incluye a □ → *C es insatisfacible*

Método de Resolución de Robinson: Ejemplo (cont.)

- En la práctica, la aplicación de sucesivos pasos de resolución se puede representar en forma de árbol (árbol de resolución):
  - Árbol binario invertido (cada dos nodos tienen un “hijo” común)
  - Cada nodo representa una instancia básica.
  - Sólo se representan los pasos relevantes para llegar a [].

Conjunto de instancias básicas: {¬p(a, f(b)), ¬p(b, f(b)), p(a, f(b)) v q(f(b)), p(b, f(b)) v ¬q(f(b))}



Puede deducirse por resolución la cláusula vacía, por lo que el conjunto de instancias es insatisfacible

Resolución con UMG: Sustitución

Resolución con UMG: Sustitución

- Un sustitución $\alpha = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ es una función finita de un conjutno de variables de un lenguaje en el de términos. Donde x_i/t_i es una ligadura.
- Dominio(α)=$\{x_i : x_i/t_i \in \alpha\}$
- Rango(α)=$\{y_i : y_i apareceent_i, x_i/t_i \in \alpha\}$
- Ejemplos

$\alpha_1 = \{x/f(a), y/x, z/h(b, y), w/a\}$ $\quad Dominio(\alpha_1) = \{x, y, z, w\}$ $\quad Rango(\alpha_1) = \{x, y\}$

$\alpha_2 = \{x/a, y/a, z/h(b, c), w/f(d)\}$ $\quad Dominio(\alpha_2) = \{x, y, z, w\}$ $\quad Rango(\alpha_2) = \emptyset$

$\alpha_3 = \{x/y, z/w\}$ Renombrado

$\lambda = \{x/x, y/y, z/z\}$ Sustitución vacía

Resolución con UMG: Sustitución (cont.)

- Dada una fórmula F y una sustitución $\alpha = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, se denomina aplicación de α a F ($F\alpha$) a la fórmula obtenida reemplazando simultáneamente cada ocurrencia en F de x_i por t_i, para cada $x_i/t_i \in \alpha$.
- Ejemplo: $\alpha = \{x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a\}$
  - $P(x,y,z)\alpha = P(f(a), x, h(b,y))$ Correcto
  - $P(x,y,z)\alpha = P(f(a), f(a), h(b,f(a)))$ Incorrecto
- Si $Dominio(\alpha) \cap Rango(\alpha) = \emptyset$, α es idempotente y $(F\alpha)\alpha = F\alpha$:
  - $\alpha_1 = \{x/a, y/f(b), z/v\}$ Es idempotente

  $P(x,y,w,z)\alpha_1 = P(a,f(b),w,v)$ $P(a,f(b),w,v)\alpha_1 = P(a,f(b),w,v)$
  - $\alpha_2 = \{x/a, y/f(b), z/x\}$ No es idempotente

  $P(x,y,w,z)\alpha_2 = P(a,f(b),w,x)$ $P(a,f(b),w,x)\alpha_2 = P(a,f(b),w,a)$
- F' es instancia de F si existe una sustitución $\alpha \neq \emptyset$ tal que $F' = F\alpha$

Resolución con UMG: Composición de sustituciones

- Dadas dos sustituciones:
  $\alpha = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ y $\beta = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$
  su composición $\alpha\beta$ se define como el conjunto
  $\{x_1/t_1\beta, \ldots, x_n/t_n\beta, y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$ una vez eliminadas:
  - las ligaduras $x_i/t_i\beta$ tales que $x_i \equiv t_i\beta$,
  - y las ligaduras y_i/s_i tales que $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ejemplo: Si $\alpha = \{x/3, y/f(x,1)\}$ y $\beta = \{x/4\}$ entonces:
  - $\alpha\beta = \{x/3, y/f(4,1)\}$
  - $\beta\alpha = \{x/4, y/f(x,1)\}$
- Propiedades de la composición:
  - $(F\alpha)\beta = F(\alpha\beta)$
  - $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
  - $\alpha\lambda = \lambda\alpha = \alpha$
  - $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

Resolución con UMG: Unificadores y UMG

- Una sustitución α es un unificador de dos fórmulas A y B si $A\alpha = B\alpha$. En este caso se dice que A y B son unificables.
- Un unificador α de A y B se denomina unificador de máxima generalidad (umg) sii para cualquier otro unificador β de A y B existe alguna sustitución γ tal que $\beta = \alpha\gamma$
  - Si dos fórmulas son unificables entonces tienen umg
  - El umg de dos fórmulas es único (salvo renombrado)
- Ejemplo: $A \equiv P(x, f(x, g(y)), z)$ y $B \equiv P(r, f(r, u), a)$
  $\alpha_1 = \{x/r, u/g(y), z/a\}$ $\quad$ $\alpha_2 = \{x/a, r/a, y/b, u/g(b), z/a\}$
  $A\alpha_1 = B\alpha_1 = P(r, f(r, g(y)), a)$ $\quad$ $A\alpha_2 = B\alpha_2 = P(a, f(a, g(b)), a)$
- α_1 y α_2 son unificadores de A y B.
  - α_1 es el umg de A y B, porque con $\gamma = \{r/a, y/b\}$, $\alpha_2 = \alpha_1\gamma$.

Resolución con UMG: Algoritmo de Unificación

- Sean A y B dos átomos con el mismo símbolo de predicado:

1. $\alpha = \lambda$
2. Mientras A$\alpha \neq$ Bα:
    1. Encontrar el símbolo más a la izquierda en Aα tal que el símbolo correspondiente en Bα sea diferente.
    2. Sean t_A y t_B los términos de Aα y Bα que empiezan con esos símbolos:
        - Si ni t_A ni t_B son variables o, si uno de ellos es una variable que aparece en el otro $\Rightarrow$ terminar con fallo (A y B no son unificables)
        - En otro caso, sea t_A una variable $\Rightarrow$ el nuevo α es el resultado de $\alpha\{t_A/t_B\}$
3. Terminar, siendo α el umg de A y B

Resolución con UMG: Algoritmo de Unificación: Ejemplos

- Ejemplo 1: $A = P(x, x)$ y $B = P(f(a), f(b))$

α	Aα	Bα	(t_a, t_b)
λ	P(x,x)	P(f(a),f(b))	(x,f(a))
$\{x/f(a)\}$	P(f(a),f(a))	P(f(a),f(b))	(a,b)
FALLO	A y B NO son unificables		

- Ejemplo 2: $A = P(x, f(y))$ y $B = P(z, x)$

α	Aα	Bα	(t_a, t_b)
λ	P(x,f(y))	P(z,x)	(x,z)
$\{x/z\}$	P(z,f(y))	P(z,z)	(f(y),z)
$\{x/f(y), z/f(y)\}$	P(f(y),f(y))	P(f(y),f(y))	ÉXITO

A y B son unificables, su umg es $\{x/f(y), z/f(y)\}$

Resolución con UMG: Definición

- Regla de resolución con umg: Sean $L_1 \vee \cdots \vee L_n \vee C_1$ y $\neg L'_1 \vee \cdots \vee \neg L'_m \vee C_2$ dos cláusulas, donde todos los L_{ij} son literales con el mismo símbolo de predicado. Puede deducirse una nueva cláusula $(C_1\rho_1 \vee C_2\rho_2)\beta$, llamada resolvente, donde
  - ρ_1 y ρ_2 son renombrados cuyos dominios respectivos son todas las variables de cada cláusula y $Rango(\rho_1) \cap Rango(\rho_2) = \emptyset$
  - β es umg de $\{L_1\rho_1, \ldots, L_n\rho_1, \neg L'_1\rho_2, \ldots, \neg L'_m\rho_2\}$
- La regla de resolución con umg se apoya en una versión de la regla de factorización para LPO: Dada una cláusula $L_1 \vee \cdots \vee L_n \vee C$, siendo $L_1, \ldots, L_n$ literales con el mismo símbolo de predicado, puede deducirse una nueva cláusula $L \vee C\beta$ donde
  - β es unificador de $L_1, \ldots, L_n$
  - $L = L_1\beta = \cdots = L_n\beta$ El literal L se denomina factor de $L_1 \vee \cdots \vee L_n \vee C$

Resolución con UMG: Definición (cont.)

- La aplicación de la regla de resolución con UMG es correcta.
- La aplicación de la regla de resolución con UMG es completa.

Teorema

Un conjunto de cláusulas es insatisfacible sii se puede deducir o a partir de él por resolución con umg.

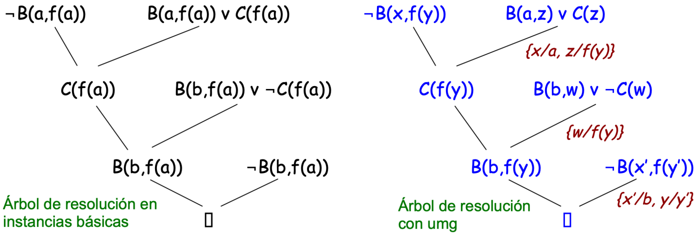
- Por tanto, el método general de insatisfacibilidad se puede reducir a la búsqueda de [] a partir del conjunto de cláusulas, en lugar de tener que generar conjuntos de instancias básicas.

Resolución con UMG: Ejemplo

- Pueden construirse árboles de resolución en los que los resolventes de cada dos cláusulas se obtienen en un paso de resolución con umg.
  - Por cada paso de resolución en instancias básicas puede definirse un paso de resolución con umg.

Ejemplo: C_1: $\neg B(x,f(y))$ $\quad C_2$: $B(a,z) \vee C(z)$ $\quad C_3$: $B(b,w) \vee \neg C(w)$

I_1: $\neg B(a,f(a))$ $\quad I_1'$: $\neg B(b,f(a))$ $\quad I_2$: $B(a,f(a)) \vee C(f(a))$ $\quad I_3$: $B(b,f(a)) \vee \neg C(f(a))$



Estrategias de resolución: Motivación

Estrategias de resolución: Motivación

- Distintas estrategias de resolución tienen sus ventajas e incovenientes.
  - P.ej., la aplicación del procedimiento de saturación, sin limitaciones, genera normalmente muchas cláusulas irrelevantes y redundantes.
- Para hacer el proceso de resolución computacionalmente eficiente es necesario aplicar criterios selectivos de forma sistemática que simplifiquen el proceso.
  - Estrategias de simplificación: con el objetivo de reducir el número de cláusulas en el conjunto.
  - Estrategias de refinamiento: con el objetivo de limitar la generación de cláusulas.

Estrategias de resolución: Ejemplos y Propiedades

Estrategia	Correcta	Completa
Saturación	Si	Si
Lineal	Si	Si
Input	Si	No, en el caso general
Dirigida	Si	Si, si el conjunto soporte es satisfacible
Ordenada	Si	No

- Correcta: [] se deduce sólo si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible:

$$[] \rightarrow \text{S insatisfacible}$$

- Completa: Si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible, se deduce []:

$$\text{S insatisfacible} \rightarrow []$$

Estrategias de resolución: Resolución lineal

- Aplica las siguientes reglas de simplificación:
  - Eliminación de cláusulas idénticas: Es posible deducir por resolución [] a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución [] a partir de C tras eliminar cláusulas idénticas.
  - Eliminación de cláusulas con literales puros: Un literal L de un conjunto de cláusulas es puro si y sólo si no existe ningún otro literal complementario $\neg L'$ en el conjunto tal que L y L' son unificables.
    - Una cláusula con un literal puro es inútil de cara a la refutación porque el literal nunca podrá eliminarse en el proceso de resolución.
  - Eliminación de cláusulas tautológicas: Una cláusula tautológica es verdad para cualquier interpretación. P.ej., $P(x) \vee \neg P(x) \vee Q(y)$.

Estrategias de resolución: Resolución lineal (cont.)

- Aplica la siguiente regla de refinamiento:
  - Derivación lineal: Una derivación lineal de C_m a partir de $\{C_1, \ldots, C_n\}$ es una secuencia $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots, C_m$ tal que:
    - C_{n+1} es el resolvente de dos cláusulas $\in \{C_1, \ldots, C_n\}$ (cláusulas de cabecera) y
    - Para todo $i > n+1$, C_i es el resolvente de C_{i-1} con otra cláusula $C_j, j < i$.
- Resolución lineal: Sólo genera derivaciones lineales
- La resolución lineal es completa: Un conjunto de cláusulas C es insatisfacible sii existe una refutación lineal de C.
  - Podemos restringir las derivaciones posibles a derivaciones lineales.