

Ciencias Experimentales

 Universidad
Rey Juan Carlos
| Servicio de Publicaciones

José Luis Trueba Santander
Nagi Khalil Rodríguez

Teoría y problemas resueltos de Física Básica

ISBN: 978-84-09-46503-3

Teoría y problemas resueltos de Física Básica

Fundamentos de la Arquitectura
Universidad Rey Juan Carlos

José Luis Trueba Santander
Nagi Khalil Rodríguez

Diciembre de 2022

Depósito
Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

©2022 José Luis Trueba Santander Nagi Khalil Rodríguez
Algunos derechos reservados
Este documento se distribuye bajo la licencia
“Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons,
disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

Prefacio

Este texto está dirigido a los estudiantes de la asignatura Física Básica del Grado en Fundamentos de Arquitectura. La asignatura cubre temas de Termodinámica, Ondas, Electromagnetismo y Circuitos Eléctricos y, al estar pensada para impartirse en la primera mitad del grado, no presupone más conocimientos que los usuales en estudios preuniversitarios.

En cada tema, se incluyen apuntes que explican la parte teórica, ejemplos numéricos intercalados, una tabla resumen con las cantidades y fórmulas más importantes y una lista de problemas resueltos. El material se ha ido elaborando, modificando y completando durante los varios cursos en que los autores hemos impartido esta asignatura en la Universidad Rey Juan Carlos.

Nos sentimos muy agradecidos a cada uno de los estudiantes del Grado de Fundamentos de Arquitectura que han pasado por nuestras clases por su motivación, crítica constructiva y esfuerzo, sin los cuales jamás habríamos completado este trabajo.

Los autores
Móstoles, 2022

Índice general

1. Gases	1
1.1. Gases ideales	1
1.2. Presión cinética	4
1.3. Energía interna de un gas ideal	7
1.4. Dilatación térmica de sólidos y líquidos	10
1.5. Tabla resumen	12
1.6. Problemas resueltos	13
2. Calor	19
2.1. El calor como forma de transferencia de energía	19
2.2. Algunos mecanismos de transferencia de energía	20
2.3. Capacidad calorífica y calor específico	25
2.4. Calor latente	28
2.5. Tabla resumen	31
2.6. Problemas resueltos	32
3. Termodinámica	39
3.1. Contacto térmico y equilibrio térmico	39
3.2. Trabajo de deformación	40
3.3. Procesos termodinámicos	42
3.4. Capacidades caloríficas de los gases ideales	44
3.5. Procesos adiabáticos de los gases ideales	47
3.6. Máquinas térmicas	48
3.7. Bombas térmicas y frigoríficos	51
3.8. Máquina de Carnot	54
3.9. Tabla resumen	59
3.10. Problemas resueltos	61

4. Ondas	73
4.1. Propagación de una perturbación	73
4.2. Ondas en una cuerda tensa	75
4.3. Ondas de sonido	79
4.4. Superposición e interferencia	84
4.5. Tabla resumen	87
4.6. Problemas resueltos	89
5. Acústica	101
5.1. Intensidad de una onda de sonido armónica	101
5.2. Impedancia acústica y transmisión del sonido	104
5.3. Nivel sonoro y sensación auditiva	108
5.4. Tabla resumen	111
5.5. Problemas resueltos	112
6. Carga y corriente eléctrica	121
6.1. Carga eléctrica	121
6.2. Campo eléctrico	124
6.3. Potencial eléctrico	126
6.4. Capacidad y condensadores	131
6.5. Corriente eléctrica	137
6.6. Resistencia	139
6.7. Fuentes de fuerza electromotriz	144
6.8. Potencia eléctrica	146
6.9. Tabla resumen	150
6.10. Problemas resueltos	152
7. Circuitos de corriente continua	167
7.1. Leyes de Kirchhoff	167
7.2. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton	171
7.3. Circuitos de corriente continua con condensadores	178
7.4. Tabla resumen	182
7.5. Problemas resueltos	183
8. Magnetismo e inducción	197
8.1. Imanes y solenoides	197
8.2. Inducción electromagnética	199
8.3. Autoinducción	202

8.4. Generadores eléctricos de corriente alterna	205
8.5. Transformadores	208
8.6. Tabla resumen	212
8.7. Problemas resueltos	214
9. Circuitos de corriente alterna	225
9.1. Resistencias en corriente alterna	225
9.2. Condensadores en corriente alterna	228
9.3. Inductores en corriente alterna	231
9.4. Números complejos	233
9.5. Fasores, impedancias y ley de Ohm generalizada	236
9.6. Potencias activa, reactiva y aparente	239
9.7. Tabla resumen	243
9.8. Problemas resueltos	244

Capítulo 1

Gases

Estudiamos la ecuación de estado del gas ideal que relaciona la presión con el número de partículas, el volumen y la temperatura. A través de ésta, junto con una expresión cinética para la presión, obtenemos la energía interna del gas ideal que toma distintas formas según se trate de un gas monoatómico, diatómico o poliatómico. Finalmente, analizamos la dilatación en líquidos y sólidos, lo que nos permite relacionar variaciones de volumen con cambios de temperatura.

1.1. Gases ideales

Debido a la pequeña densidad de los gases, sus moléculas están en promedio bastante separadas unas de otras en comparación con su tamaño. De este modo, las partículas siguen un movimiento rectilíneo y uniforme excepto cuando colisionan de forma elástica entre ellas o con las paredes del recipiente que contiene el gas. Sin embargo, a pesar de la aparente simplicidad de los gases, una *descripción microscópica* de los mismos que nos proporcione la posiciones y velocidades de las molécula en todo instante de tiempo es imposible, pues hay demasiadas (un centímetro cúbico de aire contiene unas $2,7 \cdot 10^{19}$ moléculas).

Afortunadamente, aún es posible recurrir a una *descripción macroscópica* de los gases que tiene en cuenta un conjunto pequeño de variables (macroscópicas), tales como la presión p , el volumen V y la temperatura T .

Estas variables o magnitudes determinan los estados de equilibrio del gas, es decir, situaciones estacionarias (independientes del tiempo) que los sistemas alcanzan cuando están aislados (no intercambian energía con su exterior). Vamos a estudiar estas propiedades macroscópicas y cómo se relacionan con los valores medios de las cantidades microscópicas.

Como la cantidad de partículas de un gas macroscópico es enorme, se usa también como unidad de cantidad de materia el *mol*, que es la cantidad de materia que contiene

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ partículas,}$$

sean éstas átomos, moléculas, iones, etc. El número N_A se llama *número de Avogadro* y se definió inicialmente como el número de átomos que hay en 12 g de carbono. Como el número de moles se usa para partículas muy diferentes, se suele especificar de qué partículas se trata. Así, tenemos moles de átomos, de moléculas, etc.

La *masa molar* de un elemento es la masa de un mol. Usando la tabla periódica podemos ver, por ejemplo, que un mol de moléculas de O_2 tiene una masa muy aproximada de 32 g. Para el aire, formado principalmente por un 76 % de N_2 , un 23 % de O_2 y un 1 % de Ar, la masa molar es muy aproximadamente de 29 g/mol.

Supongamos n moles de gas dentro de un recipiente de volumen V a una temperatura T . El gas ejercerá una presión p que obedecerá, en buena aproximación, la *ley de los gases ideales*

$$p = \frac{nRT}{V},$$

donde $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ es la *constante universal de los gases*. En la ley de los gases ideales, la temperatura T se mide en la *escala absoluta de temperaturas (Kelvin)*, en la cual el punto de congelación del agua corresponde a $T = 273,15 \text{ K}$, y su punto de ebullición a $T = 373,15 \text{ K}$. Aunque la escala absoluta de temperaturas es la única con significado fundamental, es de uso común la *escala Celsius*, definida tal que $T_C = T - 273,15 \text{ }^\circ\text{C}$. En ella, el punto de congelación del agua es $0 \text{ }^\circ\text{C}$ y su punto de ebullición es $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

La ley de los gases ideales es una relación simple entre las cantidades macroscópicas que caracterizan un gas. En condiciones normales de densidad y presión, los gases reales obedecen esta ley bastante bien, pero si un gas se comprime hasta llegar a tener una densidad muy alta, su comportamiento se

desviará del de un gas ideal. Un *gas ideal* es uno que obedece exactamente la ecuación anterior, y es el caso límite de un gas real cuando la densidad y presión tienden a cero. Podemos pensar en un gas ideal como consistente en átomos o moléculas de tamaño infinitesimal que no ejercen fuerzas entre ellas o sobre las paredes del recipiente que los contiene excepto en los brevísimos instantes en los que se produce una colisión.

La ley de los gases ideales se puede escribir también en términos del *número de partículas* (átomos o moléculas) N . Como el mol es la cantidad de materia que contiene exactamente el número de Avogadro N_A de partículas, resulta que se puede escribir

$$N = nN_A,$$

de manera que la ley de los gases ideales se expresa

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = N\frac{R}{N_A}T = Nk_B T, \quad (1.1)$$

donde la cantidad

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

se llama *constante de Boltzmann*.

Ejemplo 1.1.1 *Un manómetro es un aparato de medida que nos proporciona la presión de un gas tomando como referencia (cero) la presión atmosférica. Uno de estos aparatos nos proporciona una medida de 500 kPa para un gas (ideal) cuando su temperatura es de 10°C. Si el gas no sale ni entra de su recipiente y la presión atmosférica se mantiene a 1 atm \simeq 101 kPa, queremos calcular la presión del gas cuando el gas está a 40°C.*

Sol. *El número de moles y el volumen del gas en el interior del recipiente se mantienen constantes. Según la ecuación de estado de los gases ideales, esto implica, entre un estado 1 y un estado 2, que*

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{nR}{V} = \text{constante} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$$

Un aspecto clave es que se nos pide la presión interna o manométrica del gas, que se define como la diferencia entre la presión del gas p y la

presión atmosférica p_0 , es decir, aquella presión p_{man} tal que

$$p = p_0 + p_{man}.$$

En el estado 1,

$$p_1 = p_0 + p_{man,1} = 101 \text{ kPa} + 500 \text{ kPa} = 601 \text{ kPa}.$$

Usando la primera ecuación, en el estado 2,

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 601 \text{ kPa} \frac{273,15 + 40}{273,15 + 10} \simeq 665 \text{ kPa}.$$

La presión manométrica final es, entonces,

$$p_{man,2} = p_2 - p_0 \simeq 665 - 101 = 564 \text{ kPa}.$$

1.2. Presión cinética

La presión ejercida por un gas sobre el recipiente que lo contiene se debe a los impactos de las moléculas del gas contra las paredes. Se puede saber cuánto vale esta presión a partir de los valores medios del movimiento de las moléculas, lo que permite comprender cómo una propiedad macroscópica (la presión) emerge del comportamiento microscópico de las moléculas individuales del gas.

Supondremos que el recipiente es un cubo de lado L , que las moléculas chocan con las paredes pero no lo hacen entre sí y que las colisiones con las paredes son elásticas, así que se conservan el momento lineal y la energía cinética en cada choque. Estas suposiciones no son absolutamente necesarias pero hacen los cálculos más sencillos.

En la figura 1.1 vemos una representación esquemática del recipiente lleno de moléculas de gas. El movimiento de cada molécula se puede descomponer en componentes x , y , z , todas ellas equivalentes por la simetría de la situación. Veamos el movimiento en el eje x .

Una molécula dada tiene, a lo largo del eje x , una velocidad v_x que supondremos positiva y cuyo valor permanece constante hasta colisionar con la pared en $x = L$, por sufrir sólo colisiones elásticas con las paredes. Cuando la molécula choca con la pared en $x = L$, le transfiere un momento lineal igual

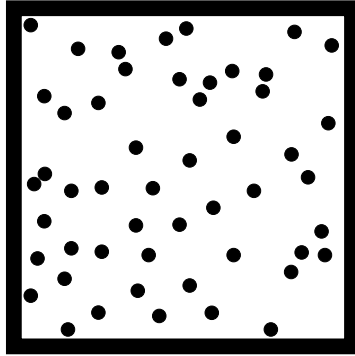


Figura 1.1: Representación esquemática de un gas ideal.

a $2mv_x$, donde m es la masa de la molécula. Si, además, suponemos que la mitad de las partículas $N/2$ tienen velocidad v_x y la otra mitad $-v_x$, entonces la fuerza promedio f ejercida por las moléculas del gas sobre la pared es igual al cambio de momento en cada colisión, $2mv_x$, multiplicado por $N/2$ y dividido por el tiempo que tardan en colisionar L/v_x :

$$f = N \frac{mv_x^2}{L}.$$

La presión del gas sobre la pared es la fuerza dividida por el área $S = L^2$ de la pared, de modo que

$$\frac{f}{S} = \frac{Nmv_x^2}{L^3} = \frac{Nmv_x^2}{V},$$

donde $V = L^3$ es el volumen total del gas.

Hemos supuesto en el cálculo anterior que todas las moléculas tienen la misma velocidad en módulo, pero esto no es verdad: las velocidades de las moléculas tienen cierta distribución. La fuerza promedio por unidad de área proporciona la presión. De este modo, hemos de reemplazar la cantidad v_x^2 en la fórmula de la presión del gas por el valor medio $\overline{v_x^2}$, llegando a

$$p = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{V}.$$

Por la simetría del problema, el movimiento en cada uno de los ejes x , y , z es básicamente el mismo, por lo que los valores promedios de las velocidades

al cuadrado son todos iguales, esto es, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. El valor medio del cuadrado de la velocidad de las moléculas cumple entonces

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}.$$

De aquí, la presión se puede escribir como

$$p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}, \quad (1.2)$$

que es el resultado que buscábamos, relacionando p con los valores promedio del movimiento de las moléculas. Se suele llamar a esta expresión la fórmula de la *presión cinética*.

En el caso de un gas ideal, la fórmula de la presión permite interpretar microscópicamente la temperatura, obteniendo un significado físico para ella. Usamos la ley de los gases ideales en la forma $pV = Nk_B T$. Despejando p de aquí e introduciendo el resultado en la fórmula de la presión, obtenemos

$$T = \frac{m\overline{v^2}}{3k_B},$$

o bien, en términos del valor medio del cuadrado de la velocidad,

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m}.$$

La raíz cuadrada del valor medio $\overline{v^2}$ se llama *velocidad cuadrática media* v_{rms} y cumple

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \quad (1.3)$$

lo que indica que la velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas aumenta cuando la temperatura del gas aumenta. Esto relaciona el concepto de temperatura con una medida de la rapidez del movimiento de las partículas.

Ejemplo 1.2.1 *Podemos aprovechar la relación (1.3) para hacernos una idea de la velocidad a la que van las moléculas del aire en condiciones físicas normales. Para ello, podemos calcular la velocidad cuadrática media de la molécula de nitrógeno y de oxígeno a 15°C, por ejemplo.*

Sol. *Para poder usar la ecuación (1.3), necesitamos la masa de la molécula*

la en cuestión. La masa de una molécula de N_2 es

$$m = \frac{M(N_2)}{N_A} = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} \simeq 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

de modo que su velocidad cuadrática media es

$$v(N_2) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \simeq \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (273,15 + 15)}{4,65 \cdot 10^{-26}}} \simeq 507 \text{ m/s}.$$

Para el oxígeno,

$$m = \frac{M(O_2)}{N_A} = \frac{32 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 5,31 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

por lo que

$$v(O_2) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (273,15 + 15)}{5,31 \cdot 10^{-26}}} = 474 \text{ m/s}.$$

1.3. Energía interna de un gas ideal

Consideremos un gas encerrado en un recipiente. La energía de este sistema tiene varias contribuciones. Una de ellas es la energía cinética del movimiento macroscópico del sistema como un todo (podemos llevarnos el recipiente de un lado a otro a cierta velocidad, o rotarlo con cierta velocidad angular); otra es la energía potencial macroscópica del sistema, con sus contribuciones gravitatoria, elástica, electrostática, etc; y otra es la energía cinética y potencial microscópica de las moléculas del gas cuando el recipiente está en reposo. Esta última contribución es la que nos interesa ahora, y se llama *energía interna* U del gas.

En un gas ideal, las moléculas no interaccionan entre sí a menos que choquen, de manera que su energía potencial de interacción no varía y puede tomarse como nula eligiendo el origen de energías apropiadamente (en un gas real, en un líquido o en un sólido sí han de considerarse variaciones de energía potencial para la energía interna). Esto implica que sólo hemos de tener en cuenta la energía cinética de las moléculas, pudiendo escribir la

energía interna como

$$U = NE_c,$$

donde N es el número de moléculas y E_c la energía cinética media de cada una de ellas, que se expresa

$$E_c = \frac{1}{2}m\overline{v^2}.$$

Usando la relación de $\overline{v^2}$ con T obtenida en el apartado anterior, llegamos a

$$U = N \frac{1}{2}m \frac{3k_B T}{m} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T. \quad (1.4)$$

En este cálculo hemos supuesto implícitamente que las moléculas del gas son puntuales, sin estructura. Esto es válido en el caso de *gases monoatómicos* como el helio o el argón, pero no en general.

Los *gases diatómicos*, como los compuestos por N_2 y O_2 , tienen, además del movimiento traslacional de sus moléculas, otros movimientos posibles. Podemos ver las moléculas de estos gases como dos átomos puntuales unidos entre sí rígidamente por una varilla, como se representa en la figura 1.2. Al colisionar con la pared del recipiente, estas moléculas pueden empezar a rotar respecto a su centro de masas. Así, hay que tener en cuenta también la energía cinética de rotación respecto a dos ejes perpendiculares entre sí y que pasan por el centro de masas de las moléculas, ejes que vemos en la figura 1.2.

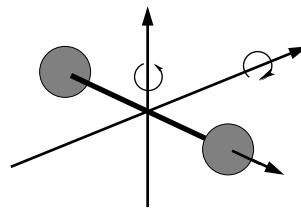


Figura 1.2: Representación esquemática de una molécula diatómica.

En el caso de los gases monoatómicos, los valores medios de las cantidades v_x^2 , v_y^2 , v_z^2 contribuyen de la misma manera a la energía interna del gas. Esto ocurre también para el movimiento de rotación. El resultado general se conoce con el nombre de *teorema de equipartición de la energía*: cada componente traslacional o rotacional del movimiento de una molécula tiene una energía

cinética media de valor $\frac{1}{2}k_B T$. Aplicando este teorema, la energía cinética media de rotación de una molécula de un gas diatómico será

$$E_{c,rot} = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T,$$

y la *energía interna de un gas diatómico*, considerando también el movimiento de traslación, será

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T + Nk_B T = \frac{5}{2}Nk_B T = \frac{5}{2}nRT. \quad (1.5)$$

Para *gases poliatómicos* con moléculas que no poseen simetría de rotación, como la del vapor de agua, hay que tener en cuenta la posibilidad de rotación respecto a un tercer eje. Esto implica que hemos de añadir un término más, de valor $\frac{1}{2}k_B T$, con lo que la energía interna resulta

$$U = \frac{5}{2}Nk_B T + \frac{1}{2}Nk_B T = 3Nk_B T = 3nRT. \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.3.1 Podemos utilizar las expresiones obtenidas de la energía interna para determinar cuánta energía se necesita para calentar un gas ideal. Tomemos, por ejemplo, 100 g de helio a $10^\circ C$ y calculemos la energía necesaria para calentarlo hasta $40^\circ C$.

Sol. El helio es un gas monoatómico con una masa molar $M(\text{He}) = 4 \text{ g/mol}$. Aunque no nos lo pidan, vamos a calcular también la energía interna de 100 g de helio a $10^\circ C$. Por ser monoatómico, su energía interna se puede escribir como

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2} \frac{m}{M(\text{He})} RT = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 10) = 8,85 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Cuando la temperatura del helio cambia, su variación de energía interna es

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2} \frac{m}{M(\text{He})} R\Delta T = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (40 - 10) = 9,35 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Dado que la energía del gas crece al aumentar la temperatura, esta es la energía que debemos proporcionarle para conseguirlo.

1.4. Dilatación térmica de sólidos y líquidos

Según la ley de los gases ideales que hemos estado estudiando, a presión constante el volumen de un gas crece linealmente con la temperatura. Tal aumento de volumen ocurre también para sólidos y líquidos, aunque de forma mucho más modesta. Este fenómeno se llama *dilatación térmica*. Durante la dilatación, el sólido mantiene su forma pero sus dimensiones crecen proporcionalmente. Los líquidos no tienen que mantener ninguna forma y sólo llenan más el recipiente que los contiene.

La dilatación térmica de un sólido se puede describir matemáticamente por el aumento de sus dimensiones lineales. Para muchos sólidos, y en un intervalo de temperaturas cercanas a la temperatura ambiente, el aumento ΔL de su longitud L_0 es proporcional al aumento de temperatura ΔT , de manera que

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad \Rightarrow \quad L = L_0 [1 + \alpha(T - T_0)]. \quad (1.7)$$

La constante de proporcionalidad α se llama *coeficiente de dilatación lineal* y su unidad es K^{-1} . De manera análoga, el incremento ΔV de volumen V_0 de un sólido sigue una ley similar,

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad \Rightarrow \quad V = V_0 [1 + \alpha(T - T_0)], \quad (1.8)$$

siendo β , también medido en K^{-1} , el *coeficiente de dilatación volumétrica*. Se puede demostrar que, para el mismo sólido en las mismas condiciones,

$$\beta = 3\alpha.$$

La fórmula de la dilatación volumétrica de los sólidos sirve también para los líquidos.

La dilatación térmica ha de tenerse en cuenta en el diseño de estructuras de grandes dimensiones, tales como puentes y vías de tren. Las cubiertas de los puentes tienen normalmente juntas de dilatación con huecos que permiten cambios de longitud, evitando que el puente se combe. También se instalan juntas de dilatación entre los segmentos de las vías de tren, pero si la temperatura excede las expectativas, los resultados pueden ser desastrosos.

Ejemplo 1.4.1 Tomemos un material sólido que tiene un coeficiente de dilatación lineal de $5 \cdot 10^{-9} / ^\circ C$. Calculemos el incremento de temperatura necesario para aumentar su volumen en un $10^{-4} \%$.

Sol. El coeficiente de dilatación volumétrica del sólido se relaciona con el lineal mediante

$$\beta = 3\alpha = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 15 \cdot 10^{-9} K^{-1}.$$

El aumento de volumen del sólido es

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T.$$

Despejando el aumento de temperatura,

$$\Delta T = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-9}} \frac{10^{-4}}{100} = 66,7^\circ C.$$

1.5. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$pV = nRT = Nk_B T$ p V n R T N k_B	Ecuación de estado del gas ideal Presión Volumen Número de moles Constante universal de los gases Temperatura en escala absoluta Número de moléculas Constante de Boltzmann	(1.1)
$p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}$ m $\overline{v^2}$	Fórmula de la presión cinética Masa de las moléculas Valor medio del cuadrado de la velocidad de las moléculas	(1.2)
$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$	Velocidad cuadrática media	(1.3)
$U = \frac{3}{2}nRT$ $U = \frac{5}{2}nRT$ $U = 3nRT$	Energía interna gas ideal monoatómico Energía interna gas ideal diatómico Energía interna gas ideal poliatómico	(1.4) (1.5) (1.6)
$\Delta L = L_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$ $\Delta L = L - L_0$ α	Dilatación lineal de sólidos Longitud a la temperatura T menos la longitud a la temperatura T_0 Coeficiente de dilatación lineal	(1.7)
$\Delta V = V_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$ $\Delta V = V - V_0$ β	Dilatación volumétrica en sólidos y líquidos Volumen a la temperatura T menos el volumen a la temperatura T_0 Coeficiente de dilatación volumétrica	(1.8)

1.6. Problemas resueltos

1. Un gas ideal está encerrado en un cilindro provisto de un pistón a la presión ambiente (1 atm). Por medio del pistón disminuimos el volumen del gas hasta una décima parte de su valor inicial. Teniendo en cuenta que la temperatura final del gas es igual a la inicial, determina la lectura de presión manométrica.

Sol. El número de moles y la temperatura son iguales entre el estado inicial 1 y el final 2, de manera que, por la ecuación de estado de los gases ideales,

$$pV = nRT = \text{constante} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2}.$$

La presión inicial es la ambiental, por lo que $p_1 = p_0 = 1 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$. La presión en el estado 2 será

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_0 \frac{V_1}{V_1/10} = 10 p_0.$$

La presión manométrica final estará dada por

$$p_{man,2} = p_2 - p_0 = 10 p_0 - p_0 = 9 p_0 = 9 \cdot 101 \text{ kPa} = 909 \text{ kPa}.$$

2. Un litro de gas ideal tiene una presión y temperatura de 1 atm y -30°C , respectivamente. Calcula la presión de la misma cantidad de gas si su volumen se reduce a medio litro y su temperatura se eleva hasta los 30°C .

Sol. El número de moles se mantiene constante en el proceso, de manera que

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR = \text{constante} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}.$$

Poniendo los datos en la última ecuación, resulta

$$p_2 = 101 \text{ kPa} \frac{10^{-3} \cdot (273,15 + 30)}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (273,15 - 30)} \simeq 252 \text{ kPa}.$$

3. Cierta cantidad de hidrógeno (gas ideal) ocupa 120 cm^3 , tiene una temperatura de 15°C de temperatura y está a 150 kPa de presión. Calcula

su volumen cuando su temperatura es -15°C y su presión vale 300 kPa.

Sol. Dado que el número de moles es constante,

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR = \text{constante} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}.$$

Con los datos del ejercicio,

$$V_2 = 120 \text{ cm}^3 \frac{150 \cdot (273,15 - 15)}{300 \cdot (273,15 + 15)} \simeq 53,8 \text{ cm}^3.$$

4. El gas de N_2 se puede considerar un gas ideal en un rango muy amplio de presiones y temperaturas. Teniendo en cuenta que a 1 atm y 0°C su densidad es de $1,25 \text{ kg/m}^3$, calcula su densidad a 98 kPa y 15°C .

Sol. La relación entre la densidad de una masa m de gas en el estado 2 y la densidad de la misma masa en el estado 1 se puede obtener a partir de su cociente,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m/V_2}{m/V_1} = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2}$$

Usamos ahora la ecuación de estado de los gases ideales para calcular V_1/V_2 , teniendo en cuenta que el número de moles es el mismo en ambos estados (ya que la masa lo es),

$$nR = \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}.$$

Con todo esto,

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = \rho_1 \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = 1,25 \frac{98 \cdot (273,15 + 0)}{101 \cdot (273,15 + 15)} \simeq 1,15 \text{ kg/m}^3.$$

5. Calcula la masa de oxígeno contenida en un recipiente de 3ℓ a una presión manométrica de 300 kPa y a una temperatura de 25°C .

Sol. El número de moles de O_2 en el tanque es

$$n = \frac{pV}{RT}.$$

De aquí, la masa de gas, conociendo su masa molar que en este caso es $M(\text{O}_2) = 32 \text{ g/mol}$, se puede obtener como

$$\begin{aligned} m &= n M(\text{O}_2) = \frac{pV M(\text{O}_2)}{RT} \\ &= \frac{(300 + 101) \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot (273,15 + 25)} \simeq 15,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}. \end{aligned}$$

6. Un recipiente de 50 cm^3 de volumen contiene 5 mg de nitrógeno líquido. Si calentamos el sistema hasta que alcanza 25°C , calcula la presión del gas en el nuevo estado.

Sol. El nitrógeno líquido no es un gas ideal pero, al llegar el tubo a temperatura ambiente, todo el líquido se ha convertido en gas de N_2 , cuya masa molar es $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g/mol}$. El número de moles de este gas en el recipiente es

$$n = \frac{m}{M(\text{N}_2)}.$$

La presión resulta

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{M(\text{N}_2)V} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 25)}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \simeq 8850 \text{ Pa}.$$

7. Calcula la masa molar de un gas ideal sabiendo que, cuando su temperatura es de 20°C y su presión de 1 atm , ocupa $1,5 \text{ litros}$ y su masa es de $2,8 \text{ g}$.

Sol. Tomando $m = n M_m$, donde M_m es la masa molar del gas, de la ecuación de estado de los gases ideales, tenemos

$$\begin{aligned} pV &= nRT = \frac{m}{M_m} RT \\ \Rightarrow M_m &= \frac{mRT}{pV} = \frac{2,8 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 20)}{101 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} \simeq 0,0450 \text{ kg/mol}. \end{aligned}$$

8. Teniendo en cuenta que la masa molar del metano es de 16 g/mol , calcula su densidad a 25°C y 4 atm .

Sol. De la ecuación de los gases ideales,

$$V = \frac{nRT}{p}.$$

La densidad del gas se puede escribir (usando $m = n M_m$) como

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT} = \frac{M_m p}{RT} = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 101 \cdot 10^3}{8,31 \cdot (273,15 + 25)} = 2,61 \text{ kg/m}^3.$$

9. Un recipiente de 2 m^3 de volumen contiene 3 moles de N_2 en equilibrio a 400 kPa de presión. Calcula la velocidad cuadrática media de las

moléculas.

Sol. La velocidad cuadrática viene dada por

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

donde la temperatura $T = \frac{pV}{nR}$ y la masa de una molécula de N_2 es $m = \frac{M}{N_A}$, siendo $M = 28 \text{ g/mol}$ la masa molar de N_2 . Sustituyendo las dos últimas fórmulas en la primera

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3pV}{nM} \frac{k_B N_A}{R}} = \sqrt{\frac{3pV}{nM}},$$

donde hemos usado que $\frac{k_B N_A}{R} = 1$. Sustituyendo los valores

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 2}{3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \simeq 5350 \text{ m/s.}$$

10. Calentamos un depósito de gas que contiene 50 litros de N_2 a 250 K y 200 atm hasta 350 K. Calcula el aumento de la energía interna del gas.

Sol. El número de moles puede extraerse de la ecuación de los gases ideales en su estado inicial,

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}.$$

La variación de energía interna, dado que el gas es diatómico, es

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{5}{2} nR \Delta T = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1 R}{RT_1} (T_2 - T_1) = \frac{5p_1 V_1}{2T_1} (T_2 - T_1) \\ &= \frac{5 \cdot 200 \cdot 101 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 250} \cdot (350 - 250) \simeq 1,01 \cdot 10^6 \text{ J.} \end{aligned}$$

11. Teniendo en cuenta que al incrementar la temperatura de un sólido en 2°C su volumen aumenta en un $10^{-5}\%$, calcula su coeficiente de dilatación volumétrica.

Sol. El aumento relativo de volumen de un sólido se relaciona con el incremento de su temperatura según la expresión

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T.$$

Despejando el coeficiente de dilatación, tenemos

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{\Delta T} = \frac{10^{-5}}{100} \frac{1}{2} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-1}.$$

12. Teniendo en cuenta que la densidad del mercurio a 0°C es de 13600 kg/m^3 y su coeficiente de dilatación volumétrica es de $1,82 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, calcula su densidad a 20°C .

Sol. La densidad de una masa m de mercurio a temperatura T se relaciona con la densidad de la misma masa a temperatura T_0 según

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{m/V}{m/V_0} = \frac{V_0}{V} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{V/V_0}.$$

Para calcular V/V_0 , usamos la ley de dilatación volumétrica:

$$V = V_0(1 + \beta \Delta T) \Rightarrow \frac{V}{V_0} = 1 + \beta \Delta T.$$

Poniendo esto en la ecuación anterior, obtenemos

$$\rho = \frac{\rho_0}{V/V_0} = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta T} = \frac{13600}{1 + 1,82 \cdot 10^{-4} \cdot 20} \simeq 13551 \text{ kg/m}^3.$$

13. Almacenamos aceite en una botella de vidrio de 1ℓ . Teniendo en cuenta que la botella está completamente llena, calcula el aceite que se derrama si se aumenta la temperatura en 20°C . Ten en cuenta que el coeficiente de dilatación volumétrica del aceite es de $0,7 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ y el coeficiente de dilatación lineal del vidrio de $10^{-5}/^\circ\text{C}$.

Sol. El volumen inicial de aceite que está dentro de la botella es $V_0 = 10^{-3} \text{ m}^3$. El volumen final es

$$V_{\text{aceite}} = V_0(1 + \beta \Delta T) = 1 + 0,7 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 1,014 \ell.$$

Por su parte, el interior de la botella de vidrio aumenta como si fuera maciza, es decir,

$$V_{\text{hueco}} = V_0(1 + 3\alpha \Delta T) = 1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 1,00006 \ell.$$

El aceite que se derrama al aumentar la temperatura es, por tanto,

$$V_{\text{derramado}} = V_{\text{aceite}} - V_{\text{hueco}} = 1,014 - 1,00006 = 1,34 \cdot 10^{-2} \ell.$$

Capítulo 2

Calor

Estudiamos los mecanismos más frecuentes de transmisión del calor: conducción, convección y radiación. En el primer caso, la conducción térmica se establece a través de uno o más materiales sometidos a una diferencia de temperaturas, tal como establece la ley de Fourier. En el caso de la radiación, el flujo de calor se produce por una diferencia de temperaturas entre el cuerpo radiante y su entorno, de acuerdo con la ley de radiación de Stefan-Boltzmann. En la última parte del tema vemos que las consecuencias más notorias de la absorción de calor en líquidos o sólidos son el cambio de temperatura y/o de fase.

2.1. El calor como forma de transferencia de energía

La *energía interna* de un cuerpo es la que poseen sus partículas (átomos, moléculas, etc) en un sistema de referencia en que el cuerpo está en reposo. En la energía interna se incluyen la energía cinética del movimiento de las partículas del cuerpo y la energía potencial interna de las partículas (por interacciones entre sus componentes y con otras partículas).

Llamamos *calor* a la transferencia de energía a través de la frontera de un cuerpo debida a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su entorno. Cuando calentamos un cuerpo, le transferimos energía interna poniéndolo en contacto con otro cuerpo que está a una temperatura mayor. Veremos que

también se transfiere calor a un cuerpo cuando éste cambia de estado (de sólido a líquido, por ejemplo).

La energía interna de un sistema se puede cambiar mediante métodos que no implican calor. Por ejemplo, cuando se realiza un trabajo macroscópico sobre él.

El calor, como el trabajo y la energía, se mide en julios en el SI. Históricamente se utiliza también otra unidad, llamada *caloría*, y es tal que $1 \text{ cal} = 4,187 \text{ J}$.

2.2. Algunos mecanismos de transferencia de energía

Vamos a explorar cómo se transfiere energía de un cuerpo a otro por medio de calor cuando están en contacto. Este proceso se llama conducción térmica. Además, estudiaremos otros procesos de transferencia que involucran frecuentemente cambios de temperatura: convección (por transferencia de materia) y radiación electromagnética.

Conducción

En la *conducción térmica*, la transferencia de energía se puede representar a escala microscópica como un intercambio de energía cinética entre partículas, en donde las partículas “frías” ganan energía al colisionar con las partículas “calientes”, que pierden parte de su energía en el proceso. Se necesita, pues, contacto para que haya conducción térmica.

La conducción ocurre sólo si hay una diferencia de temperatura entre dos partes del medio. Consideremos un material de longitud o espesor Δx y sección de área S , como vemos en la figura 2.1. Un extremo o cara del material se mantiene frío a una temperatura baja T_1 y el otro se mantiene caliente a una temperatura alta T_2 .

La transferencia de energía interna o *flujo de calor* ocurre desde el extremo más caliente al extremo más frío del material. Si Q es el calor transferido de un extremo a otro en un intervalo de tiempo Δt , el flujo de calor es la rapidez $P = Q/\Delta t$ con la que se transfiere (es decir, la potencia) y sigue la *ley de conducción térmica* de Fourier

$$P = kS \left| \frac{\Delta T}{\Delta x} \right|,$$

2.2. ALGUNOS MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA 21

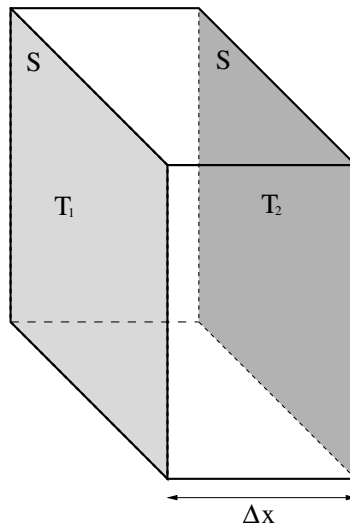


Figura 2.1: Material de sección S y espesor Δx con su cara izquierda a temperatura T_1 y su cara derecha a temperatura T_2 .

donde k es la *conductividad térmica* (una propiedad del material) y $\Delta T/\Delta x$ es el *gradiente de temperatura*. Los materiales que son buenos conductores térmicos tienen altos valores de k , mientras que los buenos aislantes térmicos tienen valores bajos de k . La unidad de conductividad térmica en el SI es $1 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos el caso sencillo de una placa de 5 mm de espesor cuyas caras tienen una diferencia de temperaturas de 50°C . Calculemos la conductividad térmica de la placa sabiendo que transmite 3 cal/s a través de un área de 6 cm^2 .

Sol. En primer lugar, pasemos la potencia que nos dan a unidades del Sistema Internacional:

$$P = 3 \text{ cal/s} = \frac{3 \text{ cal}}{\text{s}} \frac{4,187 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 12,561 \text{ J/s} = 12,561 \text{ W}.$$

Ahora podemos usar la ecuación de conducción:

$$P = kS \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Despejando la conductividad térmica llegamos al resultado buscado

$$k = \frac{P \Delta x}{S \Delta T} = \frac{12,561 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-4} \cdot 50} \simeq 2,09 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}).$$

Una de las aplicaciones de la ley de conductividad térmica es el *aislamiento térmico* de viviendas. En una situación genérica, la pared de una vivienda, por ejemplo, está dividida en distintas capas paralelas de igual sección pero con distintos espesores y conductividades. Usando que el flujo de calor que atraviesa cada una de las capas es el mismo, podemos escribir el flujo de calor a través la pared con N capas como

$$P = S \frac{|\Delta T|}{R}, \quad (2.1)$$

donde se define la *resistencia térmica* R de la pared mediante la expresión

$$R = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{k_i}, \quad (2.2)$$

es decir, se calcula sumando los valores de los cocientes $\Delta x/k$ en cada capa de la pared. La unidad de R en el SI es $1 \text{ (m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K)}/\text{J}$. En las superficies abiertas al aire, se adhiere una capa de aire estancado cuyo grosor depende de la velocidad del viento. Este efecto ha de tenerse en cuenta al calcular el valor R que se quiere conseguir, ya que la pérdida de energía interna de una casa en un día con viento fuerte es mayor que la misma en un día de viento suave.

Ejemplo 2.2.2 *Consideremos un caso práctico: calcular el flujo de calor por unidad de tiempo (potencia) por conducción a través de una pared de una vivienda, de 25 m^2 de área, con y sin aislamiento, cuando el interior está a 22°C y el exterior a 12°C . La pared está hecha de madera contrachapada de espesor 3 cm y conductividad $0,08 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. El aislamiento térmico tiene 8 cm de espesor y conductividad $0,02 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.*

Sol. *Sin el aislamiento, la potencia de conducción a través de la pared está debida solamente a la placa de madera*

$$P = k_m S \frac{\Delta T}{\Delta x_m} = 0,08 \cdot 25 \cdot \frac{22 - 12}{0,03} \simeq 667 \text{ W}.$$

Con el aislamiento, al tener la pared dos capas, primero calculamos el

2.2. ALGUNOS MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA 23

valor R de la pared,

$$R = \frac{\Delta x_m}{k_m} + \frac{\Delta x_a}{k_a} = \frac{0,03}{0,08} + \frac{0,08}{0,02} = 4,375 \text{ (m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K)/J}.$$

La potencia por conducción es

$$P' = S \frac{\Delta T}{R} = 25 \cdot \frac{22 - 12}{4,375} \simeq 57,1 \text{ W}.$$

Convección

La *convección* es el proceso de transferencia de energía interna por el que uno se puede calentar las manos colocándolas cerca de una llama. Las moléculas de aire cercanas a la llama adquieren energía interna, es decir, se calientan y, por la ley de los gases ideales, esta porción de aire se expande. Al expandirse, su densidad se hace menor que la del aire de alrededor y, por tanto, asciende. Mientras lo hace, llega hasta las manos que están cerca y las calienta. La energía transferida por el *movimiento de una sustancia caliente* se dice que ha sido transferida por convección.

Cuando este movimiento, como en el caso de la llama, ocurre por diferencias de densidad, tenemos una *convección natural*. Cuando la sustancia caliente es obligada a moverse por un ventilador o una bomba, como en algunos sistemas de calefacción por aire o agua caliente, el proceso se llama *convección forzada*. Otro ejemplo de convección ocurre cuando una habitación es calentada por un radiador. El radiador calienta el aire de las zonas más bajas de la sala. Este aire se expande y sube hacia el techo por su menor densidad. El aire frío del techo desciende hacia el suelo y así es calentado, estableciéndose lo que se conoce como *corriente de convección*.

Radiación

Un tercer mecanismo de transferencia de energía es la *radiación*, que es el único posible en el vacío. Los campos eléctricos y magnéticos son capaces de generar ondas que se propagan a la velocidad de la luz (en el vacío, esta velocidad tiene un valor muy aproximado a $3 \cdot 10^8$ m/s), constituyendo lo que llamamos radiación electromagnética.

El *espectro electromagnético* está formado por las diferentes formas en que aparecen las ondas electromagnéticas, que podemos caracterizar por su

frecuencia f . Una de las zonas del espectro electromagnético, la *radiación infrarroja*, se genera típicamente por las vibraciones de los átomos o moléculas de los cuerpos. Debido a esta característica, la radiación infrarroja es también fácilmente absorbida por la mayor parte de los materiales y se transforma en energía interna de esos materiales, ya que la absorción agita sus átomos o moléculas y aumenta su temperatura.

La mayoría de los cuerpos emiten radiación electromagnética en la zona infrarroja debido a su temperatura (esto ocurre, por ejemplo, en la emisión de un radiador o de un calefactor eléctrico). No es la única radiación capaz de aumentar la temperatura del cuerpo que la absorba y, de hecho, todas las ondas electromagnéticas pueden causar el incremento de la temperatura de un sistema, pero nos vamos a centrar en ella por ser la más común y eficiente en las aplicaciones térmicas. Veamos cómo cuantificar su emisión y su absorción.

La rapidez con la que un cuerpo que está a una cierta temperatura emite energía (potencia) viene dada por la *ley de Stefan-Boltzmann*,

$$P = \sigma S e T^4,$$

donde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ es la *constante de Stefan-Boltzmann*, S es el área de la superficie del cuerpo, e es la *emisividad* (una cantidad adimensional entre 0 y 1 característica del cuerpo) y T es la temperatura medida en escala absoluta de la superficie del cuerpo.

Cuando un cuerpo irradia según la ley anterior, también absorbe energía. De lo contrario, perdería toda su energía interna y su temperatura llegaría al cero absoluto. La energía que un cuerpo absorbe depende de su entorno, formado por otros cuerpos que también emiten. Si un cuerpo está a una temperatura T y su entorno está a una temperatura T_0 , entonces la *potencia neta* emitida por el cuerpo es

$$P = \sigma S e (T^4 - T_0^4). \quad (2.3)$$

Si el cuerpo está en equilibrio con su entorno, irradia y absorbe energía al mismo ritmo, de tal manera que su temperatura permanece constante. Si, por el contrario, el cuerpo está más caliente que el entorno, irradia más energía de la que absorbe, por lo que su temperatura disminuye. Un *absorbente ideal* es un cuerpo que absorbe todo lo que incide sobre él, por lo que su emisividad es $e = 1$. También es un radiador ideal de energía, y se le llama *cuerpo negro*. Un cuerpo para el que $e = 0$ es un *reflector ideal* y no absorbe nada de lo que incide sobre él.

Ejemplo 2.2.3 *Determinemos la emisividad de un material utilizando la ley de Stefan-Boltzmann. Para ello, necesitamos su superficie (5 m^2), la potencia emitida ($10^4 \text{ J por minuto}$) y las temperaturas del material (30°C) y del ambiente (24°C).*

Sol. *La potencia emitida por radiación es*

$$P = \frac{E}{t} = \frac{10^4}{60} = \frac{500}{3} \text{ W.}$$

A partir de la ley de Stefan-Boltzmann,

$$P = \sigma S e (T^4 - T_0^4) \quad \Rightarrow \quad e = \frac{P}{\sigma S (T^4 - T_0^4)}.$$

Utilizando los datos, tenemos

$$e = \frac{\frac{500}{3}}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot [(273,15 + 30)^4 - (273,15 + 24)^4]} \simeq 0,906.$$

Los tres mecanismos de transferencia de energía interna que hemos estudiado aparecen en un sistema de calefacción por agua caliente. En este sistema, el calor se transfiere de la caldera a los radiadores de las habitaciones por medio del agua que fluye por las tuberías (convección); se difunde luego a través del metal de los radiadores (conducción), de la superficie de éstos al aire cercano a ellos (radiación), y de este aire al resto del aire de la habitación (de nuevo, convección).

2.3. Capacidad calorífica y calor específico

La absorción/cesión de calor por un cuerpo, con independencia del mecanismo que lo ha propiciado (conducción, convección o radiación), tiene como consecuencias posibles cambios en su temperatura, volumen, presión y/o, incluso, de fase.

Vamos a centrarnos ahora en la relación que hay entre la cantidad de calor que absorbe un cuerpo y su aumento de temperatura. Se define la *capacidad calorífica* C de una sustancia como el calor necesario para aumentar 1°C su temperatura. Podemos escribir, para un rango de temperaturas suficiente-

mente pequeño,

$$Q = C \Delta T \quad (2.4)$$

cuando el cuerpo absorbe un calor Q y aumenta su temperatura ΔT . La unidad de capacidad calorífica en el SI es 1 J/K. Esta cantidad depende, para cada sustancia, del rango de temperaturas, de la presión, de la masa y, además, del proceso seguido para cambiar la temperatura (manteniendo el volumen constante, la presión constante u otros posibles).

Debido a la dependencia de C con la masa, se define el *calor específico* c como la capacidad calorífica por unidad de masa. De esta manera, el calor transferido a un cuerpo, de masa m y calor específico c (supuesto independiente de la temperatura), para que sufra una variación de temperatura ΔT se puede escribir

$$Q = mc \Delta T.$$

El agua tiene un calor específico muy alto comparado, por ejemplo, con el aire. Esto significa que un cambio en la temperatura de cierta masa de agua requiere más calor que el mismo cambio en la misma masa de la mayoría de sustancias. Se dice por eso que el agua tiene una gran *inercia térmica*, lo que la hace apropiada para el almacenamiento y transporte de energía interna, por ejemplo en el sistema de calefacción de una casa (donde el agua conduce energía interna desde la caldera hasta los radiadores).

Ejemplo 2.3.1 Sabemos que con el calor Q podemos elevar la temperatura en 50°C de una masa de aluminio, cuyo calor específico es $c_{al} = 902 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Veamos cuál sería el aumento de temperatura de la misma masa de cobre, con calor específico $c_{co} = 390 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, utilizando el mismo calor Q .

Sol. Usando la relación entre el calor absorbido y la variación de temperatura, tenemos

$$\begin{aligned} Q &= m c_{al} \Delta T_{al}, \\ Q &= m c_{co} \Delta T_{co}. \end{aligned}$$

Como el calor absorbido por ambos es el mismo, y también lo es la masa, igualando ambas expresiones obtenemos el aumento de temperatura del

cobre:

$$m c_{al} \Delta T_{al} = m c_{co} \Delta T_{co} \Rightarrow \Delta T_{co} = \frac{c_{al}}{c_{co}} \Delta T_{al} = \frac{902}{390} 50 \simeq 116^\circ C.$$

Una técnica para medir el calor específico de un cuerpo consiste en calentarlo hasta una temperatura T_c , ponerlo en un recipiente con agua a una temperatura menor T_a y esperar a que llegue el equilibrio, midiendo entonces la temperatura final T_{eq} . Esta técnica se llama *calorimetría*, y los dispositivos usados se llaman *calorímetros*. Si el sistema formado por el cuerpo y el agua está *aislado*, la cantidad de energía perdida por el cuerpo debe ser igual a la ganada por el agua. Usando la ecuación $Q = mc\Delta T$, el calor transferido al agua ha sido

$$Q_a = m_a c_a (T_{eq} - T_a),$$

y el calor transferido al cuerpo ha sido

$$Q_c = m_c c_c (T_{eq} - T_c),$$

que es negativo porque el cuerpo se ha enfriado. La suma de estos dos calores ha de ser cero para que ninguna energía entre ni salga del sistema, así que se llega a

$$Q = 0 = m_a c_a (T_{eq} - T_a) + m_c c_c (T_{eq} - T_c),$$

y de aquí, despejando, obtenemos el calor específico del cuerpo,

$$c_c = c_a \frac{-m_a (T_{eq} - T_a)}{m_c (T_{eq} - T_c)}.$$

Para que este cálculo sea correcto, es necesario que la masa de agua sea mucho mayor que la del recipiente que la contiene. En caso contrario, el recipiente también se calienta y este efecto habrá de tenerse en cuenta.

Ejemplo 2.3.2 *Veamos un ejemplo en el que tenemos que tener en cuenta el material del que está hecho el calorímetro. Queremos obtener el calor específico del aluminio c_{al} . Para ello, introducimos 50 g de aluminio a $200^\circ C$ en un calorímetro de cobre de 500 g que contiene 200 g de aceite a $20^\circ C$. Todo el sistema llega a una temperatura final de $34,54^\circ C$. El calor específico del cobre es $c_{co} = 390 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ y del aceite $c_{ac} = 0,38 \text{ cal}/(\text{g}\cdot\text{K})$.*

Sol. Primero, pasamos el calor específico del aceite a unidades del SI:

$$c_{ac} = \frac{0,38 \text{ cal}}{\text{g} \cdot \text{K}} \frac{4,187 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \simeq 1591 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}).$$

En este caso, el recipiente es de cobre y hay que tener en cuenta también cómo absorbe calor y cambia su temperatura. Dado que no se transfiere calor al exterior, si llamamos T a la temperatura de equilibrio del sistema,

$$Q = 0 = m_{co}c_{co}(T - T_{co}) + m_{al}c_{al}(T - T_{al}) + m_{ac}c_{ac}(T - T_{ac}).$$

Despejando c_{al} , tenemos

$$c_{al} = -\frac{m_{co}c_{co}(T - T_{co}) + m_{ac}c_{ac}(T - T_{ac})}{m_{al}(T - T_{al})} \simeq 902 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}).$$

2.4. Calor latente

En los *cambios de fase* sufridos por una sustancia se transfiere calor pero no hay variación de temperatura (si el proceso se hace de forma suficientemente lenta). Esto ocurre, por ejemplo, en el cambio de sólido a líquido, en el de líquido a gas, y en el cambio de estructura cristalina de un sólido. En general, en estos casos la energía potencial intermolecular de la sustancia varía en la medida en que se transfiere el calor, resultando en un cambio de energía interna sin necesidad de afectar a la temperatura del cuerpo (dado que el cambio de fase se produce a una temperatura constante).

El calor Q necesario para cambiar la fase de una sustancia pura de masa m es

$$Q = mL, \tag{2.5}$$

donde L se denomina *calor latente*. El *calor latente de fusión* L_f es el empleado cuando el cambio de fase es de sólido a líquido. Si el cambio es de líquido a sólido (solidificación), el calor latente es el de fusión, pero con signo negativo, indicando que el sistema transfiere calor al medio. El *calor latente de vaporización* L_v es el que entra en juego cuando el cambio de fase es de líquido a gas. Si el cambio es de gas a líquido (condensación), el calor latente es el mismo que el de vaporización, pero con signo negativo.

Veamos el caso de un cambio de líquido a gas. Las moléculas de los líquidos están cercanas entre sí y las fuerzas entre ellas son mucho más intensas que

las que hay entre las moléculas de los gases, muy alejadas unas de otras. Necesitamos realizar trabajo en el líquido contra estas fuerzas moleculares para poder separarlas. La energía por unidad de masa necesaria para lograr esta separación es el calor latente de vaporización.

Por su parte, la transferencia de energía a un sólido causa un aumento de la amplitud de vibración de las moléculas respecto a sus posiciones de equilibrio hasta que los enlaces entre moléculas se rompen y éstas se mueven a nuevas posiciones de equilibrio, con menor intensidad de interacción entre ellas, características del estado líquido. La energía por unidad de masa necesaria para realizar este cambio de configuración es el calor latente de fusión.

En general, el calor latente de vaporización es mayor que el de fusión para una sustancia dada. Esto es debido a que las distancias moleculares en un gas son mucho mayores que en líquidos y sólidos. En la fusión hay que transformar enlaces de estado sólido en enlaces de estado líquido, ligeramente menos intensos. Pero en la vaporización hay que romper los enlaces de estado líquido y llegar a una situación en que las moléculas, básicamente, no estén ligadas.

Ejemplo 2.4.1 *En general, cuando una sustancia absorbe o cede calor se calienta o enfría y también cambia de fase. Esto ocurre, por ejemplo, cuando 100 g de vapor de agua a 100 °C se condensan y luego se enfrían hasta 15 °C. Vamos a calcular el calor que cede el sistema al medio. Para ello, debemos saber que el calor específico del agua es $c = 4187 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ y su calor latente de vaporización $L_v = 283 \text{ J}/\text{kg}$.*

Sol. *El calor absorbido (cedido) por el sistema tiene dos contribuciones: el absorbido (cedido) en el cambio de estado de gas a líquido y el absorbido (cedido) en el aumento (disminución) de temperatura del líquido. Por tanto,*

$$\begin{aligned} Q &= mL_c + mc \Delta T = -mL_v + mc \Delta T \\ &= -0,1 \cdot 283 + 0,1 \cdot 4187 \cdot (15 - 100) \simeq -35600 \text{ J}. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior, se ha usado $L_c = -L_v$. El calor absorbido ha salido negativo. Esto quiere decir que no se transfiere calor al sistema sino que es el sistema quien transfiere calor al exterior. El calor transmitido

al medio es

$$Q_{sist} = -Q \simeq 35600 \text{ J.}$$

2.5. Tabla resumen

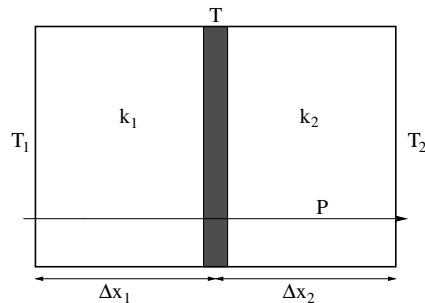
Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$P = S \frac{ \Delta T }{R}$ P S ΔT	Ley de la conducción térmica Flujo de calor por unidad de tiempo Área de la sección Diferencia de temperaturas	(2.1)
$R = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{k_i}$ N Δx_i k_i	Resistencia térmica Número de capas Espesor de la capa i -ésima Conductividad térmica de la capa i -ésima	(2.2)
$P = \sigma S e (T^4 - T_0^4)$ P σ e T T_0	Ley de la radiación Potencia emitida Constante de Stefan-Boltzmann Emisividad Temperatura (en Kelvin) del cuerpo Temperatura (en Kelvin) del entorno	(2.3)
$Q = C \Delta T$ Q ΔT $C = mc$ m c	Calor y cambio de temperatura Calor absorbido Variación de temperatura Capacidad calorífica Masa del cuerpo Calor específico	(2.4)
$Q = mL$ Q m L	Calor y cambio de fase Calor absorbido Masa del cuerpo Calor latente	(2.5)

2.6. Problemas resueltos

1. Tenemos dos placas de sección $S = 100 \text{ cm}^2$ pegadas, siendo las temperaturas de las caras libres $T_1 = 50^\circ\text{C}$ y $T_2 = 10^\circ\text{C}$, respectivamente. Además, los espesores y conductividades térmicas respectivas son $\Delta x_1 = 1 \text{ mm}$, $k_1 = 0,1 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ y $\Delta x_2 = 2 \text{ mm}$, $k_2 = 0,2 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$.

- a) Calcula la temperatura de la zona de contacto entre las placas.
 b) Determina el flujo de energía a través de las placas.

Sol. La situación se muestra en el dibujo, en el que se ve una sección transversal de las dos placas. El flujo de calor P se dirige desde la cara libre de la primera placa, que está a temperatura T_1 , hacia la cara libre de la segunda placa, a temperatura menor T_2 . El empalme entre las placas tiene temperatura T .



Conviene pasar las conductividades a unidades del SI:

$$k_1 = 0,1 \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \frac{4,187 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 41,87 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}),$$

$$k_2 = 0,2 \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \frac{4,187 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 83,74 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}).$$

- a) Para calcular la temperatura T en el empalme, usamos que no se pierde potencia al fluir la energía de la primera placa a la segunda. La potencia P_1 a través de la primera placa (con una diferencia de temperaturas $T_1 - T$) ha de ser, por tanto, igual a la potencia a través de la segunda placa (con una diferencia de temperaturas

$T - T_2$). Como ambas placas tienen, además, la misma sección S , tenemos

$$P_1 = P_2 \Rightarrow k_1 S \frac{T_1 - T}{\Delta x_1} = k_2 S \frac{T - T_2}{\Delta x_2}.$$

Observemos que la relación anterior es cierta con independencia de si las temperaturas están expresadas en $^{\circ}\text{C}$ ó K , por lo que la siguiente ecuación también lo será. Despejando con cuidado T , se obtiene

$$\left(\frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2} \right) T = \frac{k_1}{\Delta x_1} T_1 + \frac{k_2}{\Delta x_2} T_2 \Rightarrow T = \frac{\frac{k_1}{\Delta x_1} T_1 + \frac{k_2}{\Delta x_2} T_2}{\frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2}}.$$

Usando los datos numéricos del ejercicio, llegamos a

$$T = \frac{\frac{41,87}{10^{-3}} 50 + \frac{83,74}{2 \cdot 10^{-3}} 10}{\frac{41,87}{10^{-3}} + \frac{83,74}{2 \cdot 10^{-3}}} = 30^{\circ}\text{C}.$$

- b) La potencia P a través de las placas se puede calcular sólo con la primera, sólo con la segunda o con ambas, pues $P = P_1 = P_2$. Usamos la primera:

$$P = k_1 S \frac{T_1 - T}{\Delta x_1} = 41,87 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{50 - 30}{10^{-3}} = 8374 \text{ W}.$$

2. Una pared está formada por dos capas de madera, cada una de espesor 5 cm y conductividad térmica $0,15 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, separadas por una capa de aislante de espesor 1 cm y conductividad térmica $0,05 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Si la pared tiene 10 cm^2 de área, calcula el flujo de calor (potencia) a través de la pared cuando entre los extremos de ésta hay una diferencia de temperaturas de 15°C .

Sol. El flujo de calor viene dado por:

$$P = S \frac{\Delta T}{2 \frac{\Delta x_m}{\kappa_m} + \frac{\Delta x_a}{\kappa_a}} = 10 \cdot 10^{-4} \frac{15}{2 \frac{0,05}{0,15} + \frac{0,01}{0,05}} \simeq 0,0173 \text{ W}.$$

3. Una cabaña tiene un tejado de dimensiones de $10 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ formado por dos capas: una de madera de pino de 3 cm de espesor y conductividad térmica de $0,2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ y otra de tejas de 5 mm de espesor y conductividad térmica $0,8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

- a) Calcula la potencia por conducción a través del tejado si la temperatura interior de la cabaña es de 15°C y la exterior es de -15°C .
- b) Aislamos el tejado con una nueva capa de 1 cm de espesor y una conductividad térmica de $0,05\text{ W/m}\cdot\text{K}$. Determina qué porcentaje de la potencia se ha reducido.

Sol.

- a) Calculamos primero el valor R del tejado y, con él, el flujo de calor:

$$R = \frac{\Delta x_m}{k_m} + \frac{\Delta x_a}{k_a} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{0,2} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,8} \simeq 0,156 \text{ (m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K)/J}.$$

$$P = S \frac{\Delta T}{R} \simeq 10 \cdot 8 \cdot \frac{15 - (-15)}{0,156} \simeq 15400 \text{ W}.$$

- b) Cuando se coloca el aislamiento, los nuevos valores son

$$R' = \frac{\Delta x_m}{k_m} + \frac{\Delta x_a}{k_a} + \frac{\Delta x_{ais}}{k_{ais}} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{0,2} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,8} + \frac{1 \cdot 10^{-2}}{0,05} \simeq 0,356 \text{ (m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K)/J}.$$

$$P' = S \frac{\Delta T}{R'} \simeq 10 \cdot 8 \cdot \frac{15 - (-15)}{0,356} \simeq 6740 \text{ W}.$$

El flujo de calor se ha reducido en aproximadamente

$$\frac{15400 - 6740}{15400} = 0,562 \text{ (es decir, un } 56,2\% \text{)}.$$

4. La pared del salón de una vivienda tiene una ventana en su parte central. La pared tiene 4 m de altura y 6 m de anchura, mientras que la ventana mide 1,5 m de altura y 2 m de anchura. La pared está hecha de una capa de ladrillo ($0,63\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ de conductividad térmica y 30 cm de espesor) y otra de fibra de vidrio ($0,042\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; 3 cm). El espesor del vidrio de la ventana es de 2 cm y su conductividad térmica $1,1\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Teniendo en cuenta que la temperatura interior de la vivienda es de 22°C y la exterior es de -5°C , calcula el flujo de calor a través de la ventana (sin incluir el resto de la pared), el flujo de calor a través del resto de la pared (sin incluir la ventana) y el flujo de calor total hacia el exterior.

Sol. La ventana sólo tiene una capa de vidrio, de modo que el flujo de calor a través de ella es

$$P_v = k_v S_v \frac{\Delta T}{\Delta x_v} = 1,1 \cdot (1,5 \cdot 2) \cdot \frac{22 - (-5)}{0,02} = 4455 \text{ W.}$$

El resto de la pared tiene una capa de ladrillo y otra de aislante. Su R es

$$R = \frac{\Delta x_{lad}}{k_{lad}} + \frac{\Delta x_{ais}}{k_{ais}} = \frac{0,3}{0,63} + \frac{0,03}{0,042} \simeq 1,19 \text{ (m}^2 \cdot \text{K)/W.}$$

El flujo de calor a través de esta parte de la pared es

$$P_r = S_r \frac{\Delta T}{R} \simeq (4 \cdot 6 - 1,5 \cdot 2) \cdot \frac{22 - (-5)}{1,19} \simeq 476 \text{ W.}$$

El flujo de calor P a través de toda la pared es la suma de los dos anteriores

$$P = P_v + P_r \simeq 4455 + 476 = 4931 \text{ W.}$$

5. Una cabaña cúbica, de 5 m de lado, consta de cuatro paredes, un tejado y un suelo, todos de madera. La madera, de conductividad térmica $0,15 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, tiene un espesor de 20 cm. Teniendo en cuenta que el exterior de la cabaña está a -10°C y el interior a 20°C , calcula el espesor de un revestimiento de conductividad térmica $0,05 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ si queremos reducir la potencia que sale de la cabaña a la mitad.

Sol. Calculemos primero la potencia P_0 sin revestimiento:

$$P_0 = \kappa_0 S \left| \frac{\Delta T}{\Delta x_0} \right|,$$

donde $S = 25 \times 6 \text{ m}^2$ es la superficie total, κ_0 es la conductividad de la madera, $\Delta T = 30^\circ\text{C}$ y $\Delta x_0 = 20 \text{ cm}$. La potencia con revestimiento resulta

$$P = S \left| \frac{\Delta T}{R} \right|, \quad R = \frac{\Delta x_0}{\kappa_0} + \frac{\Delta x}{\kappa},$$

donde Δx y κ son el espesor y conductividad térmica del revestimiento, respectivamente. Como nos dicen que

$$P = \frac{1}{2} P_0,$$

tenemos la siguiente ecuación para Δx :

$$S \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x_0}{\kappa_0} + \frac{\Delta x}{\kappa}} = \frac{1}{2} \kappa_0 S \frac{\Delta T}{\Delta x_0} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x_0}{\kappa_0} \kappa = \frac{20}{0,15} 0,05 \simeq 6,67 \text{ cm.}$$

¡El resultado es independiente de S y ΔT !

6. Estima la energía que pierde una persona por radiación en cinco minutos. Para ello, supón que tiene 2 m^2 de piel a 36°C con una emisividad de $0,9$ y que su entorno está a 25°C .

Sol. Usamos la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia neta emitida es

$$\begin{aligned} P &= \sigma S e (T^4 - T_0^4) \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0,9 \cdot [(273,15 + 36)^4 - (273,15 + 25)^4] \simeq 126 \text{ W.} \end{aligned}$$

La pérdida de energía en 5 minutos es

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = P t \simeq 126 \cdot 5 \cdot 60 \simeq 3,77 \times 10^4 \text{ J.}$$

7. Calcula la temperatura del filamento de una bombilla sabiendo que emite 4 W de luz, tiene una superficie de $0,5 \text{ mm}^2$ y una emisividad de $0,96$.

Sol. A partir de la ley de Stefan-Boltzmann,

$$\begin{aligned} P = \sigma S e T^4 \Rightarrow T &= \left(\frac{P}{\sigma S e} \right)^{1/4} = \left(\frac{4}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,96} \right)^{1/4} \\ &\simeq 3480 \text{ K.} \end{aligned}$$

El filamento de una bombilla debe tener un punto de fusión suficientemente alto, como por ejemplo el del tungsteno que es de 3683 K .

8. El agua de un recipiente absorbe $5 \cdot 10^9 \text{ J}$ de energía. Teniendo en cuenta que la densidad del agua es de 10^3 kg/m^3 , su calor específico es $4187 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ y su coeficiente de dilatación volumétrica es $207 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, calcula el aumento de volumen del agua.

Sol. El cambio en la temperatura del agua se puede obtener a partir del calor que absorbe:

$$Q = mc \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{Q}{\rho V_0 c}.$$

En la última ecuación, se ha usado que $\rho = m/V_0$, donde V_0 es el volumen inicial de agua. El cambio de volumen del agua, por la ley de dilatación térmica, es

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T = V_0 \beta \frac{Q}{\rho V_0 c} = \frac{Q \beta}{\rho c} = \frac{5 \cdot 10^9 \cdot 207 \cdot 10^{-6}}{1000 \cdot 4187} \simeq 0,247 \text{ m}^3.$$

9. Introducimos 100 g de metal a 100 °C en 250 g de agua a 5 °C. Teniendo en cuenta que el calor específico del agua es 4187 J/(kg · K) y que la temperatura final del agua y el metal es de 20 °C, calcula el calor específico del metal.

Sol. Consideramos que agua y metal están aislados del exterior. Por tanto, si T_a es la temperatura inicial del agua, T_m es la temperatura inicial del metal y T es la temperatura final de ambos, tendremos

$$Q = 0 = m_a c_a (T - T_a) + m_m c_m (T - T_m)$$

Despejando el calor específico del metal,

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T - T_a)}{m_m (T - T_m)} = \frac{-0,25 \cdot 4187 \cdot (20 - 5)}{0,1 \cdot (20 - 100)} \simeq 1960 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}.$$

10. Echamos cierta cantidad de hielo a 0 °C en 1 ℓ de agua a 90 °C. La mezcla, que permanece aislada del exterior, alcanza una temperatura de equilibrio de 50 °C. Teniendo en cuenta que la densidad del agua es de 10³ kg/m³, el calor específico del agua es 4187 J/(kg · K) y el calor latente de fusión del hielo es 3,3 × 10⁵ J/kg, calcula la masa de hielo.

Sol. Inicialmente, tenemos una masa de agua $m_a = \rho_a V_a = 10^3$ kg. Dado que no se transfiere calor al exterior,

$$Q = 0 = m_a c_a (T - T_a) + m_h c_a (T - T_h) + m_h L_f.$$

Nótese que toda la masa de hielo m_h se transforma en agua a una temperatura $T_h = 0$ °C, de manera que el aumento de temperatura de esta masa se produce con el calor específico del agua, como hemos escrito. Despejando la masa de hielo,

$$m_h = \frac{-m_a c_a (T - T_a)}{c_a (T - T_h) + L_f} = \frac{-1 \cdot 4187 \cdot (50 - 90)}{4187 \cdot (50 - 0) + 3,3 \cdot 10^5} \simeq 0,311 \text{ kg}.$$

Capítulo 3

Termodinámica

En este capítulo terminamos el estudio de los sistemas termodinámicos. Para ello, comenzamos definiendo la condición de equilibrio térmico y enunciando el principio cero de la Termodinámica. Tras introducir el concepto de trabajo, formulamos el primer principio de la Termodinámica para lo que necesitaremos los conceptos de energía interna y de calor definidos en los capítulos anteriores. El primer principio los usaremos para calcular las capacidades caloríficas de distintos procesos en gases ideales, así como para estudiar los procesos adiabático cuasiestáticos. Finalmente, abordamos el estudio de las máquinas térmicas, incluyendo la de Carnot. En esta última parte, presentaremos varios enunciados del segundo principio de la Termodinámica.

3.1. Contacto térmico y equilibrio térmico

Dos cuerpos están en *contacto térmico* si pueden intercambiar energía debido a diferencias de temperatura entre ellos. En el tema anterior vimos ejemplos de este tipo de intercambios de energía.

El *equilibrio térmico* es una situación en la que dos objetos no intercambian energía si se ponen en contacto. La temperatura se define como la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otro. Así, dos cuerpos están en equilibrio térmico si están a la misma temperatura.

El *principio cero* de la Termodinámica asegura que si ponemos en contacto

térmico dos cuerpos, éstos alcanzan el equilibrio térmico.

En Termodinámica, se describe el *estado macroscópico* de un sistema mediante variables como la presión, el volumen, la temperatura y la energía interna. Estas cantidades reciben el nombre de *variables de estado* porque en cualquier configuración del sistema se puede encontrar su valor. Para ello, es necesario que el sistema esté en equilibrio interno, es decir, que cada parte del sistema esté en equilibrio con el resto. Por ejemplo, en un gas hace falta que cada parte del gas esté a la misma presión y temperatura.

En general, la Termodinámica estudia los estados de equilibrio de un sistema y cómo se pasa de uno a otro. El paso de un estado de equilibrio a otro se llama *proceso termodinámico*. En un proceso, las variables de estado de un sistema pueden cambiar, pero este cambio es independiente del proceso mismo, y tiene en cuenta sólo los estados inicial y final. A menudo, los estados de un sistema se representan mediante puntos en un diagrama pV (o en diagramas pT , TV , etc) y los procesos como trayectorias en estos diagramas.

Una segunda categoría de variables en Termodinámica es la de *variables de transferencia*. Estas variables son nulas a menos que ocurra un proceso en que se transfiera energía a través de la frontera del sistema. Por tanto, no están asociadas a un estado dado del sistema, sino a un cambio. Ejemplos de variables de transferencia son el calor y el trabajo.

3.2. Trabajo de deformación

El trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} sobre una partícula que se desplaza entre los puntos A y B a lo largo de la trayectoria C se define como

$$W(\mathbf{F}, C) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde $d\mathbf{r}$ es el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria C . Por tanto, excepto en el caso particular en que la fuerza \mathbf{F} sea conservativa, el trabajo depende explícitamente de la trayectoria a lo largo de la cual cambia la posición de la partícula.

Consideremos, por su uso frecuente en Termodinámica, el caso del trabajo realizado sobre un sistema deformable (un gas, por ejemplo). Para verlo, suponemos un gas contenido en un cilindro equipado con un pistón móvil como el de la figura 3.1.

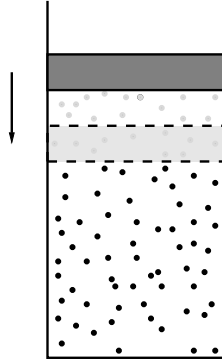


Figura 3.1: Esquema de un cilindro con pistón móvil que contiene un gas.

En equilibrio, el gas ocupa un volumen V y ejerce una presión p sobre las paredes del recipiente. Si el pistón tiene una sección transversal de área S , la fuerza ejercida por el gas sobre él es $F = pS$. Supongamos que el pistón comprime el gas *cuasiestáticamente*, es decir, con suficiente lentitud para permitir que el gas esté en equilibrio en todo momento. Si el pistón es empujado mediante una fuerza $\mathbf{F} = -F \mathbf{j}$ hacia abajo, el desplazamiento infinitesimal es $d\mathbf{r} = dy \mathbf{j}$, de modo que el trabajo infinitesimal, definido como $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F dy = -pS dy = -p dV.$$

Para calcular el trabajo total realizado sobre el gas, hay que integrar la expresión anterior entre el volumen inicial V_1 y el volumen final V_2 ,

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (3.1)$$

Necesitamos conocer cómo varía p con V para calcular la integral. Esto es un reflejo de que el trabajo depende de los detalles del proceso y no sólo de los estados inicial y final, pues es una variable de transferencia.

Ejemplo 3.2.1 Cuando la presión se mantiene constante (proceso isobárico), es fácil calcular el trabajo mediante la expresión anterior, pues podemos sacar p de la integral, resultando

$$W = -p(V_2 - V_1).$$

Usemos este resultado para calcular el trabajo realizado sobre un cubo metálico de 5 cm de arista y $12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ de coeficiente de dilatación lineal, cuando lo calentamos a una presión constante de 1 atm desde $15^\circ C$ hasta $150^\circ C$.

Sol. Para calcular el trabajo W necesitamos la variación de volumen $V_2 - V_1$. Usando la ley de dilatación térmica con $\beta = 3\alpha$ y V_1 el volumen inicial, llegamos a

$$V_2 - V_1 = V_1 \beta \Delta T = (5 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot (150 - 15) \simeq 6,08 \cdot 10^{-7} m^3.$$

Ahora, el trabajo resulta

$$W = -p \Delta V \simeq -101 \cdot 10^3 \cdot 6,08 \cdot 10^{-7} \simeq -0,0614 J.$$

Es decir, el exterior realiza trabajo negativo sobre el cubo (el trabajo realizado por el cubo es, entonces, $W_{sist} = -W \simeq 0,0614 J$).

3.3. Procesos termodinámicos

En general, la variación de la energía de un sistema es igual a la suma de todas las transferencias de energía que ocurren a través de la frontera del sistema. La primera ley de la Termodinámica es un caso especial de la afirmación anterior, que incluye variaciones de la energía interna del sistema y transferencias de energía por calor y trabajo. Esta ley se puede aplicar a muchos procesos y proporciona un enlace entre las visiones microscópica y macroscópica.

Consideremos el cambio de un sistema entre un estado inicial, que supondremos caracterizado por las variables de estado (p_i, V_i, T_i) , y otro estado final (p_f, V_f, T_f) . Durante este cambio, se realiza transferencia de energía al sistema mediante calor Q y trabajo W . Se verifica:

- *Primer/a ley/principio de la Termodinámica:* La cantidad $Q + W$ es independiente de la trayectoria seguida por un proceso termodinámico, y coincide con la variación de la energía interna del sistema, es decir,

$$\Delta U = Q + W. \quad (3.2)$$

Si el sistema experimenta un *cambio de estado infinitesimal* en el que se le aplica un calor dQ y se realiza sobre él un trabajo dW , su energía interna

sufrirá una variación dU . Podemos escribir la primera ley en versión infinitesimal como

$$dU = dQ + dW.$$

Hay que hacer un comentario sobre esta ecuación. En ella aparece la variable de estado U , de manera que dU tiene el significado de cambio de pequeña magnitud, pero dQ y dW no implican el cambio de ninguna variable de estado, sino transferencias infinitesimales. Por ello se dice a veces que dQ y dW son *diferenciales inexactas*. No usaremos esta terminología en este curso por no ser estrictamente necesaria: ya hemos dejado claro que el calor y el trabajo no son variables de estado y ya sabemos que no tiene ningún sentido escribir cosas como ΔQ ni ΔW .

Se puede considerar la primera ley de la Termodinámica como una ecuación de conservación de la energía. Veamos algunos casos:

- Consideremos primero un *sistema aislado*, es decir, uno que no interacciona con su entorno. En este caso, el calor transmitido al sistema es cero y el trabajo realizado sobre él también. Como consecuencia, $Q + W = 0$ y $\Delta U = 0$.
- Otro caso es el de un *ciclo*, que es un proceso que empieza y acaba en el mismo estado. Como la energía interna es una variable de estado, en un ciclo ha de ser $\Delta U = 0$, por lo que $Q = -W$. En un diagrama pV , un ciclo aparece como una curva cerrada.
- Un *proceso adiabático* es uno en el que no se transfiere calor al sistema, de manera que $Q = 0$ y $\Delta U = W$. Un proceso así se puede conseguir, por ejemplo, aislando térmicamente las paredes del sistema.
- Un *proceso isobárico* es uno que ocurre a presión constante en todo momento, como en el ejemplo 3.3.1.
- Un *proceso isocórico* ocurre a volumen constante. En este caso, el trabajo sobre el sistema ha de ser nulo, $W = 0$, de modo que $\Delta U = Q$.
- Un proceso que ocurre a temperatura constante se llama *proceso isotérmico*. En el caso de un gas ideal, como la energía interna depende sólo de la temperatura, un proceso isotérmico implica que $\Delta U = 0$, por lo que $Q = -W$. Este proceso no es necesariamente un ciclo.

Ejemplo 3.3.1 Retomando el ejemplo 3.2.1, calculemos la variación de energía interna del cubo de hierro. Para ello, admitamos que el bloque pesa 2 kg y que su calor específico vale $445 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Sol. Para calcular ΔU sólo necesitamos conocer Q , el calor absorbido por el bloque, pues el trabajo realizado sobre el bloque, W , ya lo habíamos obtenido. Usando los resultados del tema anterior,

$$Q = C \Delta T = mc \Delta T = 2 \cdot 445 \cdot (150 - 15) \simeq 1,20 \times 10^5 \text{ J}.$$

Así, la variación de energía interna del cubo es

$$\Delta U = Q + W = 1,20 \times 10^5 - 0,0614 \simeq 1,20 \times 10^5 \text{ J}.$$

El resultado ilustra la razón por la que, en la mayoría de situaciones, podemos despreciar la contribución del trabajo de deformación en la variación de energía interna de sólidos y líquidos.

3.4. Capacidades caloríficas de los gases ideales

Nos preguntamos cómo calcular el calor para un proceso de gas ideal con un cambio dado de temperatura. En el tema anterior vimos que el calor absorbido por una sustancia se puede escribir $Q = C \Delta T$, donde C es la capacidad calorífica. En el caso de un gas ideal, es muy útil definir las capacidades caloríficas de un par de procesos especiales: el isocórico y el isobárico. En un proceso isocórico, el calor será

$$Q_{(V=cte)} = C_V \Delta T, \quad (3.3)$$

donde C_V es la *capacidad calorífica del gas a volumen constante*. De forma análoga, en un proceso isobárico,

$$Q_{(p=cte)} = C_p \Delta T, \quad (3.4)$$

siendo C_p la *capacidad calorífica del gas a presión constante*. Calculemos C_V y C_p para un gas ideal.

Consideremos primero el proceso a volumen constante y, para empezar, supongamos que el gas es monoatómico. Ya estudiamos la energía interna de

un gas monoatómico y vimos que $U = \frac{3}{2}nRT$. Su variación es

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR \Delta T.$$

Si este gas realiza un proceso isocórico, su volumen no varía, de manera que $W_{(V=cte)} = 0$. De aquí, el calor a volumen constante $Q_{(V=cte)}$ debe cumplir

$$\frac{3}{2}nR \Delta T = C_V \Delta T,$$

con lo que la *capacidad calorífica a volumen constante* de un gas ideal monoatómico es

$$C_V = \frac{3}{2}nR. \quad (3.5)$$

De manera análoga, para un gas diatómico,

$$C_V = \frac{5}{2}nR, \quad (3.6)$$

y, para un gas poliatómico,

$$C_V = 3nR. \quad (3.7)$$

Pasemos ahora a un proceso a presión constante p_0 . En este caso, como vimos en el ejemplo 3.2.1, el trabajo es

$$W_{(p=cte)} = - \int p_0 dV = -p_0 \Delta V.$$

Usando la ley de los gases ideales en la forma $p_0V = nRT$, como p_0 es constante podemos hacer una variación en ambos lados de la igualdad y obtener $p_0 \Delta V = nR \Delta T$. De aquí,

$$W_{(p=cte)} = -nR \Delta T.$$

Si tenemos en cuenta que la variación de energía interna para un gas monoatómico es $\Delta U = \frac{3}{2}nR \Delta T$ y que el calor es $Q_{(p=cte)} = C_p \Delta T$, la primera ley de la Termodinámica da lugar a

$$\frac{3}{2}nR \Delta T = C_p \Delta T - nR \Delta T,$$

con lo que la *capacidad calorífica a presión constante* de un gas ideal monoatómico es

$$C_p = C_V + nR = \frac{5}{2}nR.$$

Igualmente, para un gas diatómico,

$$C_p = C_V + nR = \frac{7}{2} nR,$$

y, para un gas poliatómico,

$$C_p = C_V + nR = 4nR.$$

El cociente entre capacidades caloríficas de un gas ideal es una cantidad adimensional γ que se denomina *coeficiente adiabático* del gas (veremos por qué se llama así en el siguiente apartado). Para un gas monoatómico,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} \simeq 1,67. \quad (3.8)$$

Para un gas diatómico,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,40. \quad (3.9)$$

Para un gas poliatómico,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{4}{3} \simeq 1,33. \quad (3.10)$$

Los valores obtenidos para C_V , C_p y γ están en excelente acuerdo con los datos experimentales de gases monoatómicos, pero difieren de ellos en el caso de gases más complejos. Usaremos las expresiones obtenidas a pesar de estas diferencias.

Finalmente, en el caso de *sólidos* y *líquidos*, cuando se calientan a presión constante el trabajo realizado sobre ellos es muy pequeño, debido a que el cambio de volumen lo es. En consecuencia, para sólidos y líquidos podemos tomar $C_p \simeq C_V$.

Ejemplo 3.4.1 *Un recipiente contiene $0,5 \text{ m}^3$ de un gas ideal monoatómico a 25°C y 1 atm . El sistema se calienta a volumen constante hasta alcanzar una temperatura de 35°C . Determinemos el calor absorbido por el gas, el trabajo realizado sobre él y su variación de su energía interna.*

Sol. *Dado que el proceso es a volumen constante, el trabajo realizado sobre el gas es cero. Por tanto,*

$$\Delta U = Q + W = Q = C_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T.$$

En la última igualdad, hemos usado que el gas es monoatómico, por lo que $C_V = (3/2)nR$. Nos hace falta el número de moles, que obtenemos de la ecuación de los gases ideales aplicada al estado inicial,

$$nR = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Con esto,

$$\Delta U = Q = \frac{3}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = \frac{3 \cdot 101 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot (273,15 + 25)} \cdot (35 - 25) \simeq 2540 \text{ J}.$$

3.5. Procesos adiabáticos de los gases ideales

Supongamos que un gas ideal experimenta un proceso adiabático, por lo que $Q = 0$ y $\Delta U = W$. En su forma infinitesimal, la ecuación anterior se escribe $dU = dW$.

La energía interna es una variable de estado, por lo que su variación no depende del proceso sino sólo de los estados inicial y final. No obstante, para calcular la variación de energía interna de un gas ideal, conviene tomar el proceso isocórico que produce la misma variación de temperatura, pues como $W = 0$ y $Q_V = C_V \Delta T$, tenemos

$$\Delta U = C_V \Delta T, \quad (3.11)$$

o, en su forma infinitesimal, $dU = C_V dT$.

Por su parte, el trabajo infinitesimal en cualquier proceso es $dW = -pdV$. Usándola con la ecuación infinitesimal del proceso adiabático $dU = dW$ se llega a

$$C_V dT + p dV = 0.$$

Si combinamos la ecuación anterior con la ley de los gases ideales $pV = nRT$, llegaremos a

$$C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0.$$

Integrando, tenemos que en un *proceso adiabático y cuasiestático de un gas ideal* entre un estado inicial 1 y un estado final 2, se cumple la ecuación

$$p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma, \quad (3.12)$$

o, usando de nuevo la ecuación del gas ideal, en términos de la temperatura y el volumen,

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}. \quad (3.13)$$

Notemos que, al haber usado la ecuación del gas ideal, en la fórmula anterior las temperaturas deben expresarse en Kelvin.

De estas expresiones (3.12) y (3.13) podemos obtener algunas conclusiones. Primero, si el gas realiza una compresión adiabática, el volumen decrece, así que la temperatura crece y, por tanto, lo hace la energía interna. El trabajo es positivo en este caso. Segundo, si el gas realiza una expansión adiabática, el volumen crece y la temperatura y la energía interna decrecen, de modo que el trabajo es negativo, lo que es lo mismo que decir que el gas realiza trabajo en una expansión adiabática sin calentar el exterior, algo que es muy útil en las aplicaciones.

La curva de un proceso adiabático en un diagrama pV es similar a la de un proceso isotérmico, pero tiene un descenso más pronunciado debido a que su ecuación es $pV^\gamma = \text{constante}$, con $\gamma > 1$, en lugar de la isotérmica $pV = \text{constante}$.

Ejemplo 3.5.1 *Un gas ideal monoatómico se comprime adiabática y cuasiestáticamente desde un volumen inicial de 1 l hasta un volumen final de 0,1 l. Calculemos la temperatura final sabiendo que la inicial vale 40 °C.*

Sol. *La temperatura final T_2 la podemos obtener usando la ecuación (3.13), pues conocemos la temperatura inicial T_1 , los volúmenes inicial V_1 y final V_2 y el coeficiente adiabático $\gamma = 5/3$:*

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 \simeq \left(\frac{1}{0,1}\right)^{\frac{2}{3}} (273,15 + 40) \simeq 1450 \text{ K} \simeq 1180 \text{ °C}.$$

3.6. Máquinas térmicas

La primera ley de la Termodinámica es una aplicación de la conservación de la energía. Expresa que el cambio de energía interna de un sistema puede ocurrir por aplicar calor sobre el sistema, por realizar trabajo sobre él, o por ambos, de manera que el calor y el trabajo tienen el mismo resultado. Pero en las aplicaciones hay una diferencia fundamental entre calor y trabajo que no se vislumbra en la primera ley. Veamos esta diferencia.

Una *máquina térmica* es un aparato que adquiere energía al transferírsele calor y, operando cíclicamente, es capaz de transformar parte de esta energía y transferirla en forma de trabajo. Las máquinas térmicas utilizan *baños térmicos*, que son sistemas con una capacidad calorífica enorme, de manera que su temperatura no varía cuando se ponen en contacto con la sustancia de trabajo de las máquinas. Un recipiente bien grande y lleno de agua puede funcionar como baño térmico en muchas ocasiones.

Toda máquina térmica tiene cierta *sustancia de trabajo* que realiza un proceso cíclico. El proceso es tal que (1) la sustancia de trabajo absorbe cierta energía por transferencia de un calor Q_a al ponerla en contacto con un baño térmico de alta temperatura T_a , (2) la máquina realiza un trabajo W , y (3) la sustancia expulsa el resto de la energía previamente ganada al transferir un calor Q_b a un baño térmico de baja temperatura T_b . La figura 3.2 que vemos a continuación muestra un esquema de este funcionamiento. En estas cantidades, se considera siempre el valor absoluto de calores y trabajos, ignorando el signo negativo que deberíamos escribir cuando los realiza el sistema.

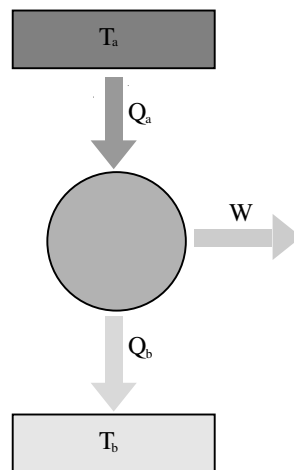


Figura 3.2: Esquema de máquina térmica que trabaja entre un foco térmico caliente a temperatura T_a y otro frío a T_b . En cada ciclo, la máquina absorbe un calor Q_a del foco caliente, cede un calor Q_b al foco frío y realiza un trabajo W .

Por ejemplo, en una máquina de vapor, la sustancia de trabajo es agua. En una caldera, el agua absorbe calor de la combustión de un carburante y

se convierte en vapor. Este vapor realiza trabajo por expansión al empujar un émbolo. Después, el vapor se enfría y condensa. El agua líquida se hace regresar a la caldera y el ciclo se repite.

Si observamos la figura 3.2, notaremos que se cumple la igualdad $Q_a = W + Q_b$. De aquí, el *trabajo neto* realizado por la máquina en cada ciclo es

$$W = Q_a - Q_b.$$

Se define la *eficiencia o rendimiento* e de una máquina térmica como el cociente entre el trabajo neto y el calor absorbido del baño caliente, es decir,

$$e = \frac{W}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_b}{Q_a} = 1 - \frac{Q_b}{Q_a}. \quad (3.14)$$

Se puede interpretar la eficiencia de una máquina térmica como el cociente entre lo que produce (el trabajo) y lo que absorbe (el calor del baño térmico caliente). En la práctica, las máquinas térmicas producen como trabajo sólo una fracción de la energía que absorben como calor, de manera que su eficiencia es siempre menor del 100 %. Por ejemplo, los motores de gasolina suelen tener eficiencias del 20 % y los diesel del 40 %. La ecuación de la eficiencia muestra que un valor del 100 % sólo sería posible si la sustancia de trabajo no transfiriese calor al baño térmico frío, es decir, si $Q_b = 0$, con lo que $W = Q_a$. Esto no ocurre nunca, como se indica en el siguiente enunciado:

- *Segunda/o ley/principio de la Termodinámica (enunciado de Kelvin-Planck)*: Es imposible construir una máquina térmica que, operando en un ciclo, no produzca otro efecto más que la realización de una cantidad de trabajo a partir de la entrada de la misma cantidad de energía por calor desde un baño.

Ejemplo 3.6.1 *Calculemos la eficiencia de una máquina térmica que recibe 1 kJ de calor del baño caliente y transfiere 500 J de calor al baño frío.*

Sol. *Usando la fórmula (3.14), la eficiencia es*

$$e = \frac{W}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_b}{Q_a} = \frac{1 - 0,5}{1} = 0,5.$$

También podemos calcular el trabajo que realiza la máquina en un ciclo

es

$$W = Q_a - Q_b = 1000 - 500 = 500 \text{ J},$$

y con éste el trabajo en un número de ciclos, por ejemplo en 10 resulta

$$W_{10} = 10 W = 10 \cdot 500 = 5 \text{ kJ}.$$

3.7. Bombas térmicas y frigoríficos

El papel de una máquina térmica es procesar la energía extraída del baño caliente para realizar trabajo útil, de tal manera que el flujo de energía va en el sentido natural: del baño caliente al baño frío. Podemos pensar si es posible construir una máquina en la que el flujo de energía vaya en sentido opuesto, dirigiéndose del baño frío al baño caliente. Obviamente, como no es el sentido natural hará falta alimentar energéticamente la máquina para que haga esto. Las máquinas que se comportan de este modo se llaman *bombas térmicas* o *frigoríficos*. Una de ellas es el aparato de aire acondicionado, que extrae calor del interior frío de una casa y lo transfiere al exterior caliente.

En la figura 3.3 vemos un esquema energético de un frigorífico o una bomba térmica. La máquina extrae un calor Q_b de un baño a baja temperatura T_b y transfiere un calor Q_a a un baño a alta temperatura T_a . Esto sólo se puede lograr si se realiza un trabajo W sobre la máquina.

No ocurre nunca que un frigorífico o una bomba térmica funcionen sin aplicar un trabajo, y así lo establece el siguiente enunciado, totalmente equivalente al de Kelvin-Planck:

- *Segunda/o ley/principio de la Termodinámica (enunciado de Clausius):* Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea la transferencia de energía por calor, desde un objeto hasta otro a mayor temperatura, sin la entrada en la máquina de energía por trabajo.

Los frigoríficos usan como sustancia de trabajo un fluido refrigerante tal como el R15, que ha reemplazado al Freón por sus efectos perjudiciales para el medio ambiente. Este fluido refrigerante tiene una temperatura de vaporización cercana a la ambiental cuando está sometido a presiones altas, pero a bajas presiones su temperatura de vaporización es inferior a 0°C .

El fluido refrigerante en estado líquido y a baja presión entra en los tubos de enfriamiento del interior del frigorífico y absorbe calor de los alimentos mientras se evapora. El gas fluye entonces hacia un compresor, donde su

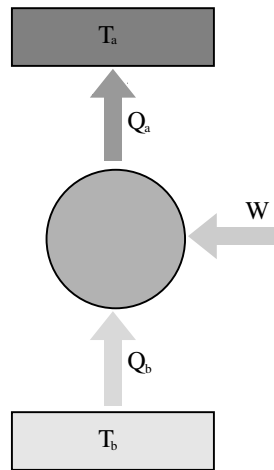


Figura 3.3: Esquema de máquina frigorífica que trabaja entre un foco térmico caliente a temperatura T_a y otro frío a T_b . En cada ciclo, la máquina absorbe un calor Q_b del foco frío, cede un calor Q_a al foco caliente y absorbe un trabajo W .

presión se eleva por medio de un pistón. Este gas a alta presión circula entonces hacia los tubos de condensación exteriores, situados en la parte de atrás del frigorífico y expuestos al aire de la cocina. Allí, el gas se condensa transfiriendo calor al aire. Finalmente, el líquido a alta presión pasa a través de una válvula de expansión y su presión se reduce hasta la del inicio del ciclo para volver a entrar en los tubos de enfriamiento.

Las *bombas térmicas* se usan para calentar casas y edificios. Una bomba térmica contiene dos juegos de tubos metálicos que pueden intercambiar calor con el entorno: un juego en el exterior del edificio, en contacto con el aire, y el otro en el interior. En el modo de calefacción, el fluido que circula por los tubos exteriores absorbe calor de la atmósfera y lo libera en el interior del edificio desde los tubos interiores. El fluido está frío y a baja presión cuando está en los tubos exteriores, donde absorbe calor del aire. El resultante fluido caliente se comprime entonces y entra en los tubos interiores como fluido caliente y de alta presión, y libera energía en el aire interior. Como vemos, el funcionamiento es muy similar al del frigorífico, pero con los tubos intercambiados.

Un *aparato de aire acondicionado* es simplemente una bomba térmica con los tubos exteriores e interiores con los papeles intercambiados, de modo que

opera en modo de enfriamiento igual que un frigorífico. El fluido circulante en los tubos interiores de la casa absorbe calor y, después de ser comprimido, transfiere calor al medio a través de los tubos exteriores.

La efectividad de una bomba térmica está descrita en términos del *coeficiente de operación* (COP). En el modo de calefacción, el COP es el cociente entre el calor Q_a transferido al baño térmico caliente y el trabajo W necesario para que opere, es decir,

$$\text{COP (modo de calefacción)} = \frac{Q_a}{W}. \quad (3.15)$$

Dado que se suele cumplir que Q_a es mayor que W , el coeficiente de operación suele ser mayor que 1. De hecho, si la temperatura exterior es más alta que unos -4°C , el valor del COP para una bomba térmica es del orden de 4; esto implica que la cantidad de calor transferida al edificio es unas 4 veces mayor que el trabajo realizado por el motor de la bomba. Sin embargo, si la temperatura exterior es más baja, el COP desciende porque se hace más difícil extraer calor del aire. Para temperaturas exteriores por debajo de unos -9°C , el COP puede ser incluso menor que 1, lo que indica que el uso de bombas térmicas no es lo más apropiado en climas con temperaturas tan bajas.

En el modo de enfriamiento, el COP hace referencia a su uso, y por tanto se define como el cociente entre el calor Q_b extraído del baño frío y el trabajo W necesario para que funcione,

$$\text{COP (modo de enfriamiento)} = \frac{Q_b}{W}, \quad (3.16)$$

que es del orden de 5 en un frigorífico.

Ejemplo 3.7.1 Calculemos el calor Q_b extraído del baño frío en un ciclo por un frigorífico que tiene un COP de 5 sabiendo que en cada ciclo necesita 100 J de energía en forma de trabajo.

Sol. A partir del COP de enfriamiento del frigorífico y el trabajo W , podemos obtener el calor Q_b :

$$\text{COP}_{enf} = \frac{Q_b}{W} \Rightarrow Q_b = \text{COP}_{enf} W = 5 \cdot 100 = 500 \text{ J.}$$

3.8. Máquina de Carnot

Vamos a estudiar la máquina térmica teórica que, operando entre dos focos térmicos, es la más eficiente posible. Para ello, antes hemos de entender el significado de procesos reversibles e irreversibles. Supongamos que un sistema experimenta cierto proceso caracterizado por una trayectoria dada en un diagrama pV . Si es posible devolver al sistema a sus condiciones iniciales mediante exactamente la misma trayectoria en el diagrama pV pero recorrida en sentido inverso, sin producir ningún cambio sobre el entorno (resto del universo), entonces se trata de un *proceso reversible*. En caso contrario, se trata de un *proceso irreversible*. Un ejemplo: cuando dos cuerpos a diferentes temperaturas entran en contacto, el flujo de calor va desde el cuerpo más caliente al más frío, no al revés. Este proceso es irreversible, en general, pues ocurre de manera natural sólo en un sentido y es necesario hacer trabajo o inyectar energía en forma de calor para invertirlo.

En la naturaleza, todos los procesos son irreversibles, pero algunos son *casi* reversibles. Una condición necesaria para que esto ocurra, aunque no suficiente, es que el proceso sea cuasiestático: proceso muy lento, de manera que el sistema esté siempre muy cerca de un estado de equilibrio. Por ejemplo, consideremos la expansión de un gas en un recipiente que tiene un pistón y unas paredes térmicamente aisladas pero que su base permite el contacto con un baño térmico a temperatura dada. Si el gas se comprime muy lentamente y el pistón no tiene fricción con el recipiente, en principio el proceso es tal que el sistema a cada paso está muy cerca del equilibrio, dado que además la temperatura del gas es siempre la del baño térmico. Es un proceso casi reversible porque puede invertirse separando el pistón con la misma lentitud con la que se empujó. En general, un proceso casi reversible no puede presentar efectos disipadores que conviertan energía mecánica en energía interna, como el rozamiento o la turbulencia, ya que estas conversiones no se pueden revertir.

La *máquina de Carnot* opera en un ciclo ideal reversible entre dos baños térmicos, que se llama *ciclo de Carnot*. Se cumple:

- *Teorema de Carnot*: Ninguna máquina térmica real que opere entre dos baños térmicos puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que opere entre los dos mismos baños.

Para describir el ciclo de Carnot que tiene lugar entre las temperaturas T_1 (alta) y T_2 (baja), supondremos que la sustancia de trabajo es un gas

ideal contenido en un recipiente provisto de un pistón en su parte superior. Las paredes del recipiente y el pistón son aislantes térmicos, pero la base del recipiente permite poner en contacto el gas con un baño térmico. El ciclo de Carnot está formado por los cuatro procesos reversibles de la figura 3.4.

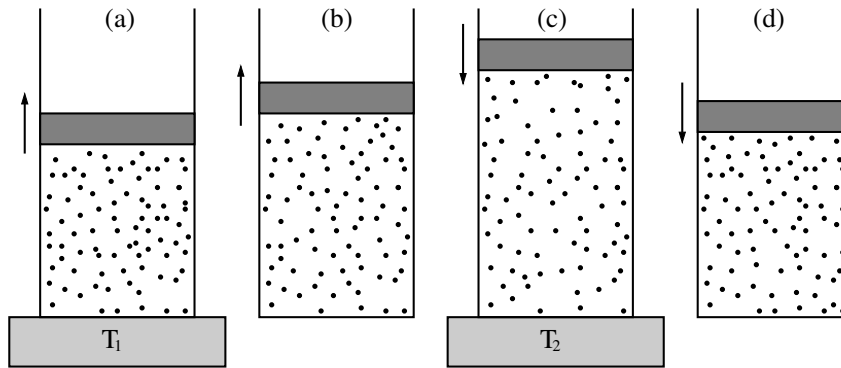


Figura 3.4: Ciclo de Carnot de un gas ideal: (a) expansión isoterma a la temperatura T_1 , (b) expansión adiabática, (c) compresión isoterma a la temperatura T_2 y (d) compresión adiabática.

1. *Expansión isotérmica a alta temperatura.* Ponemos la base del recipiente en contacto con el baño térmico a temperatura alta T_1 , lo que mantiene el gas a esta temperatura. El gas se expande desde un volumen V_1 a un volumen mayor V_2 . Durante la expansión, el gas absorbe un calor $|Q_1|$ del baño y lo convierte en trabajo que realiza sobre el pistón.
2. *Expansión adiabática.* La base del recipiente se separa del baño y se aísla térmicamente. El gas continúa su expansión de manera adiabática, aumentando su volumen de V_2 a V_3 y disminuyendo su temperatura de T_1 a T_2 , momento en que paramos el pistón.
3. *Compresión isotérmica a baja temperatura.* Ponemos la base del recipiente en contacto con el baño térmico a temperatura baja T_2 . Comenzamos a empujar el pistón, comprimiendo el gas isotérmicamente desde un volumen V_3 hasta un volumen menor V_4 . Durante este proceso, el gas transmite un calor $|Q_2|$ al baño a partir del trabajo realizado por el pistón.

4. *Compresión adiabática.* La base del recipiente se separa del baño y se aísla térmicamente. Continuamos la compresión del gas de manera adiabática, desde un volumen V_4 hasta el volumen inicial V_1 . La temperatura del gas en este proceso aumenta de T_2 a T_1 . Se completa así el ciclo.

Habíamos definido la eficiencia e de una máquina térmica como el cociente entre el trabajo neto y el calor absorbido del baño caliente, es decir,

$$e = \frac{W}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}.$$

En la segunda igualdad de la ecuación anterior hemos usado que en un ciclo la energía interna del gas no cambia, por lo que $W = |Q_1| - |Q_2|$. Se puede demostrar que, en un ciclo de Carnot, $|Q_2|/|Q_1| = T_2/T_1$, donde las temperaturas han de medirse en Kelvin. De aquí, la *eficiencia de una máquina de Carnot* es

$$e_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (3.17)$$

y, por tanto, todas las máquinas de Carnot que operen entre las mismas temperaturas tienen la misma eficiencia. Además, también se puede demostrar que esta eficiencia es independiente de la sustancia de trabajo de la máquina.

Una máquina de Carnot que funcione *a la inversa* constituye la bomba térmica más efectiva posible, y determina el máximo coeficiente de operación (COP) para una combinación dada de temperaturas. Este valor máximo de COP en modo de calefacción es

$$\text{COP (modo de calefacción)}_{carnot} = \frac{|Q_1|}{W} = \frac{|Q_1|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad (3.18)$$

y en modo de enfriamiento,

$$\text{COP (modo de enfriamiento)}_{carnot} = \frac{|Q_2|}{W} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (3.19)$$

Como vemos, a medida que la diferencia de temperaturas entre los dos baños se aproxima a cero, el COP teórico máximo se aproxima a infinito. En la práctica, la baja temperatura de los tubos de enfriamiento y la alta temperatura del compresor limitan el COP máximo a valores del orden de 10.

Podemos representar también el ciclo de Carnot en un diagrama pV , compuesto por dos isotérmicas y dos adiabáticas, como en la figura 3.5. El sentido de recorrido del ciclo determina si se trata de una máquina térmica (sentido horario) o un frigorífico o bomba térmica (sentido antihorario).

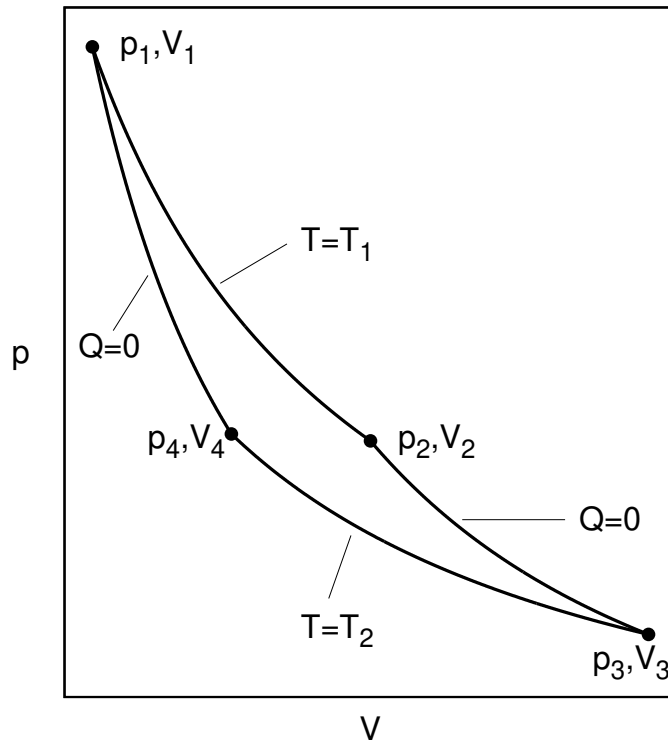


Figura 3.5: Ciclo de Carnot en el diagrama pV .

Ejemplo 3.8.1 Calculemos el rendimiento de una máquina de Carnot que trabaja con un foco caliente a 50°C y un foco frío a 25°C .

Sol. Usando la fórmula (3.17)

$$e_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \simeq 1 - \frac{273,15 + 25}{273,15 + 50} \simeq 0,0774.$$

Si mantenemos la misma temperatura para foco frío y queremos duplicar el rendimiento anterior, necesitamos una fuente caliente con una tempe-

ratura T'_1 igual a

$$1 - \frac{T_2}{T'_1} = 2 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \Rightarrow T'_1 = \frac{T_2}{2 \frac{T_2}{T_1} - 1} \simeq \frac{273,15 + 25}{2 \frac{273,15 + 25}{273,15 + 50} - 1} \simeq 353 \text{ K} \simeq 79,6^\circ \text{C}.$$

3.9. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$ p V V_1 V_2	Trabajo de deformación sobre el gas Presión del gas Volumen del gas Volumen en el estado 1 Volumen en el estado 2	(3.1)
$\Delta U = Q + W$ ΔU Q	Primer principio de la Termodinámica Variación de energía interna Calor absorbido	(3.2)
$Q_{(V=cte)} = C_V \Delta T$ C_V ΔT $C_V = (3/2)nR$ $C_V = (5/2)nR$ $C_V = 3nR$	Calor absorbido en proceso isócoro Capacidad calorífica a volumen constante Variación de temperatura Gas ideal monoatómico Gas ideal diatómico Gas ideal poliatómico	(3.3) (3.5) (3.6) (3.7)
$Q_{(p=cte)} = C_p \Delta T$ C_p $C_p = C_V + nR$	Calor absorbido en proceso isobárico Capacidad calorífica a presión constante Gases ideales	(3.4)
$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ $\gamma = 5/3$ $\gamma = 7/5$ $\gamma = 4/3$	Coefficiente adiabático Gas ideal monoatómico Gas ideal diatómico Gas ideal poliatómico	 (3.8) (3.9) (3.10)
$\Delta U = C_V \Delta T$ $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$	Proceso adiabático cuasiestático	(3.11) (3.12) (3.13)
$e = \frac{W}{Q_a}$ W Q_a	Eficiencia de una máquina térmica Trabajo hecho por la máquina en cada ciclo Calor absorbido en cada ciclo	(3.14)
$COP = \frac{Q_a}{W}$ Q_a	Coefficiente de operación máquina térmica Calor cedido a la fuente caliente	(3.15)

W	Trabajo sobre la máquina	
$\text{COP} = \frac{Q_b}{W}$	COP enfriamiento	(3.16)
Q_b	Calor absorbido del foco frío	
W	Trabajo sobre la máquina	
$e_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$	Eficiencia máquina de Carnot	(3.17)
T_1	Temperatura de la fuente caliente	
T_2	Temperatura de la fuente fría	
$\text{COP} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$	COP Carnot calefacción	(3.18)
$\text{COP} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$	COP Carnot enfriamiento	(3.19)

3.10. Problemas resueltos

1. A la presión atmosférica, 5 m^3 de aire se calienta debido a la radiación solar y al contacto con el suelo, de modo que su temperatura aumenta desde 300 K a 330 K . Calcula:

- El calor absorbido por el gas.
- El aumento de la energía interna del aire.
- El volumen que ocupa el aire en el estado final.
- El trabajo realizado sobre el aire.
- Comprueba que se cumple el primer principio de la termodinámica.

Sol. Nos hará falta el número de moles de aire, que podemos calcular con la ecuación de los gases ideales para el estado inicial 1:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \simeq \frac{101 \cdot 10^3 \cdot 5}{8,31 \cdot 300} \simeq 203 \text{ mol.}$$

- a) La capacidad calorífica a presión constante del aire, considerado gas ideal diatómico, es $C_p = C_V + nR = (5/2)nR + nR = (7/2)nR$. Con esto, el calor absorbido por el aire a presión constante resulta

$$Q = C_p \Delta T \simeq \frac{7}{2} \cdot 203 \cdot 8,31 \cdot (330 - 300) \simeq 177 \text{ kJ.}$$

- b) El cambio de energía interna de un gas ideal diatómico, en cualquier proceso, es

$$\Delta U = C_V \Delta T \simeq \frac{5}{2} \cdot 203 \cdot 8,31 \cdot (330 - 300) \simeq 126 \text{ kJ.}$$

- c) El volumen final puede calcularse con la ecuación de los gases ideales. Dado que la presión y el número de moles se mantienen constantes en este proceso,

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 5 \frac{330}{300} = 5,5 \text{ m}^3.$$

d) Con el resultado anterior, el trabajo realizado sobre el gas es

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -p (V_2 - V_1) = -101 \cdot 10^3 \cdot (5,5 - 5) = -50,5 \text{ kJ.}$$

e) Con los resultados de los apartados (a) y (d) anteriores,

$$Q + W \simeq 177 \text{ kJ} - 50,5 \text{ kJ} \simeq 126 \times \text{kJ.}$$

Esto coincide con el cambio de energía interna calculado en el apartado (b).

2. En el estado inicial, 0,5 mol de un gas ideal monoatómico ocupa 5 ℓ a una temperatura de 300 K. Luego, el gas triplica su temperatura manteniendo su volumen constante. Acto seguido, el gas duplica su volumen manteniendo su presión constante. Calcula:

- El trabajo realizado por el gas en cada proceso y el trabajo total.
- El calor absorbido por el gas en cada proceso y el calor total.
- La variación de la energía interna del gas.

Sol. Necesitaremos la presión inicial del gas, que es

$$p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} \simeq \frac{0,5 \cdot 8,31 \cdot 300}{5 \cdot 10^{-3}} \simeq 249 \text{ kPa.}$$

a) Durante el primer proceso, a volumen constante, el trabajo es cero porque no hay variación de volumen, de modo que $W_1 = 0$. La presión tras este primer proceso puede obtenerse de la ecuación de los gases con número de moles y volumen constantes,

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 3p_1 \simeq 748 \text{ kPa.}$$

El segundo proceso es a presión constante. El trabajo en este proceso, que es también el trabajo total, resulta

$$\begin{aligned} W &= W_2 = - \int_{V_1}^{V_2} p_2 dV = -p_2 (V_2 - V_1) \\ &\simeq -748 \cdot 10^3 (2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) \simeq -3,74 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

El trabajo realizado por el gas es, pues, $W_{gas} = -W \simeq 3,74 \text{ kJ}$.

- b) Dado que el gas ideal es monoatómico, el calor en el primer proceso (a volumen constante) está dado por

$$Q_1 = C_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T \simeq \frac{3}{2} \cdot 0,5 \cdot 8,31 \cdot (900 - 300) \simeq 3,74 \text{ kJ.}$$

Para calcular el calor en el segundo proceso, necesitaremos la temperatura final. Este segundo proceso es a presión (y número de moles) constante, de manera que

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = 2T_2 = 1800 \text{ K.}$$

Con esto,

$$Q_2 = C_p \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \simeq \frac{5}{2} \cdot 0,5 \cdot 8,31 \cdot (1800 - 900) \simeq 9,35 \text{ kJ.}$$

El calor total absorbido por el gas es

$$Q = Q_1 + Q_2 \simeq 13,1 \text{ kJ.}$$

- c) La variación de la energía interna del gas es

$$\Delta U = W + Q \simeq 9,35 \text{ kJ.}$$

También se puede calcular así:

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 0,5 \cdot 8,31 \cdot (1800 - 300) \simeq 9,35 \text{ kJ.}$$

3. Cuando el volumen de un gas ideal es de 50 cm^3 , su presión es de 3 atm. Si este mismo gas duplica su volumen a temperatura constante, calcula el trabajo hecho sobre el mismo, el trabajo que absorbe y la variación de su energía interna.

Sol. En un gas ideal, la energía interna depende solo de la temperatura. Por eso, en un proceso isotérmico de un gas ideal, $\Delta U = 0$. De aquí, el calor aplicado y el trabajo realizado sobre el gas están relacionados según

$$\Delta U = 0 = Q + W \Rightarrow Q = -W.$$

Para determinar el trabajo, hemos de calcular la siguiente integral definida:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Como el proceso es a temperatura constante, se escribe la presión en términos de la temperatura y volumen usando la ecuación de los gases ideales, con lo que

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Volviendo a utilizar la ecuación de los gases ideales, $nRT = p_1 V_1$, tenemos

$$W = -p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -3 \cdot 101 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \ln 2 \simeq -10,5 \text{ J}.$$

Y, de aquí, $Q = -W \simeq 10,5 \text{ J}$.

4. Un cilindro provisto de un pistón contiene 0,5 mol de helio a la presión atmosférica, 101 kPa. Manteniendo la temperatura en 310 K, el pistón se mueve hasta que la presión del gas alcanza los 80 kPa. Determina el trabajo realizado por el gas durante la expansión.

Sol. El trabajo sobre el gas en un proceso isotérmico es

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV \\ &= -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \end{aligned}$$

Para calcularlo, necesitaremos el cociente de volúmenes V_2/V_1 . Dado que la temperatura y el número de moles se mantienen constantes durante la expansión, de la ley de los gases obtenemos

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Introduciendo esto en la expresión del trabajo,

$$\begin{aligned} W &= -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -nRT \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \\ &= -0,5 \cdot 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \left(\frac{101}{80} \right) \simeq -300 \text{ J}. \end{aligned}$$

El trabajo realizado por el gas es, por tanto, $W_{gas} = -W \simeq 300 \text{ J}$.

5. Calcula el calor necesario para duplicar el volumen de 1 mol de gas ideal si mantiene su temperatura en 300 K.

Sol. En la expansión isotérmica de un gas ideal, $\Delta U = 0$. Por tanto,

$$Q = -W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Dado que $V_2 = 2V_1$, resulta

$$Q = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 1 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \ln 2 \simeq 1730 \text{ J}.$$

6. Un mol de gas ideal se mantiene en contacto con un baño térmico a 400 K. Calcula su volumen sabiendo que ha absorbido 100 J y que su volumen inicial era de 0,005 m³.

Sol.

Dado que el proceso es isotérmico y el sistema es un gas ideal, se cumple $\Delta U = 0$. De aquí,

$$Q = -W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

El calor es un dato, así que se despeja de la ecuación anterior el volumen final V_2

$$\frac{Q}{nRT} = \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \Rightarrow e^{Q/nRT} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow V_2 = V_1 e^{Q/nRT}.$$

Con los datos del problema,

$$V_2 = V_1 e^{Q/nRT} = 0,005 e^{100/(1 \cdot 8,31 \cdot 400)} \simeq 0,0515 \text{ m}^3.$$

7. Una mezcla de gases se comprime de forma adiabática y cuasiestática, desde un volumen inicial de 500 cm³ hasta un volumen final de 50 cm³. Teniendo en cuenta que el coeficiente adiabático es $\gamma = 1,37$ y que la temperatura inicial de la mezcla es de 50°C, calcula la temperatura final.

Sol. Dado que tenemos datos de temperatura y volumen, podemos

escribir la ecuación del proceso adiabático como $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, de modo que

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = (273,15 + 50) \cdot \left(\frac{500}{50} \right)^{1,37-1} \simeq 758 \text{ K.}$$

8. Mientras se expanden adiabática y cuasiestáticamente, 10 g de gas de hidrógeno H_2 realizan 10^3 J de trabajo. Calcula la variación de temperatura del gas.

Sol. Dado que la masa molar del H_2 es $M_m = 2 \text{ g/mol}$, el número de moles de este gas en el sistema que se expande es

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{10}{2} = 5 \text{ mol.}$$

En un proceso adiabático, se cumple que $Q = 0$. Por tanto, $\Delta U = W$. Pero el dato que tenemos es el trabajo que realiza el gas, que es $W_{gas} = -W$. Como consecuencia,

$$W_{gas} = -\Delta U.$$

Ahora, dado que se tiene un gas diatómico como H_2 , llegamos a

$$\begin{aligned} W_{gas} = -\Delta U &= -\frac{5}{2} nR \Delta T \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{-2W_{gas}}{5nR} = \frac{-2 \cdot 10^3}{5 \cdot 5 \cdot 8,31} \simeq -9,63 \text{ K.} \end{aligned}$$

Un gas realiza trabajo y disminuye su temperatura en una expansión adiabática.

9. Dos moles de oxígeno O_2 se expande adiabática y cuasiestáticamente, desde 300 K de temperatura y 1 atm de presión, hasta triplicar su volumen. Calcula su presión final y el trabajo que realiza.

Sol. Para calcular la presión final, podemos usar la ecuación del proceso adiabático $pV^\gamma = \text{constante}$, con $\gamma = C_p/C_V = 7/5 = 1,4$ dado que el oxígeno es diatómico:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 101 \text{ kPa} \cdot \left(\frac{V_1}{3V_1} \right)^{1,4} \simeq 21,7 \text{ kPa.}$$

La temperatura final será

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left(\frac{V_1}{3V_1} \right)^{0,4} \simeq 193 \text{ K.}$$

El trabajo se puede obtener del cambio de energía interna, dado que el calor, en un proceso adiabático, es cero,

$$W = \Delta U = C_V \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \simeq \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 8,31 \cdot (193 - 300) \simeq -4430 \text{ J.}$$

Por tanto, el trabajo realizado por el gas es

$$W_{gas} \simeq 4430 \text{ J.}$$

10. Se tienen 0,5 moles de gas ideal monoatómico. Inicialmente, el gas tiene una temperatura $T_i = 300 \text{ K}$ y un volumen inicial desconocido V_i . Realiza entonces los siguientes pasos. Primero, sufre un proceso isocórico hasta que su temperatura llega hasta 900 K . Seguidamente, realiza una expansión isotérmica hasta que su volumen inicial se duplica. Determina el calor total transferido al gas y el trabajo total realizado sobre el gas.

Sol. Calculemos el calor absorbido por el gas y el trabajo que realiza en ambos procesos. El primero es a volumen constante:

$$Q_1 = C_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T_1 \simeq \frac{3}{2} 0,5 \cdot 8,31 \cdot (900 - 300) \simeq 3,74 \text{ kJ,}$$

$$W_1 = 0 \text{ J.}$$

El segundo proceso es isotermo:

$$\Delta U_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = -W_2 = \int_{V_i}^{V_f} p dV = nRT_2 \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$\simeq \frac{0,5 \cdot 8,31}{900} \ln 2 \simeq 2,59 \text{ kJ.}$$

Así, el calor total transferido al gas es

$$Q = Q_1 + Q_2 \simeq 6,33 \text{ kJ.}$$

El trabajo realizado sobre el gas es

$$W = -W_1 - W_2 \simeq 2,59 \text{ kJ.}$$

11. Tenemos 100 cm^3 de aire a la presión atmosférica y a 310 K de temperatura dentro de un recipiente.
- Lo comprimimos adiabática y cuasiestáticamente hasta reducir su volumen a la mitad. Calcula el cambio de energía interna del aire.
 - Luego, ponemos el aire comprimido en contacto con un baño térmico a 310 K , sin cambiar su volumen. Calcula el calor absorbido por el aire y su energía interna final.

Sol. Necesitaremos el número de moles de aire en el sistema, que podemos calcular a partir de los datos del estado inicial,

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{101 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{8,31 \cdot 310} \simeq 3,92 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

- La temperatura a la que llega el aire tras la compresión adiabática, usando que el coeficiente adiabático del aire, tomado como gas ideal diatómico, es $\gamma = C_p/C_V = 7/5 = 1,4$ resulta, usando $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$,

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 310 \cdot \left(\frac{100}{50} \right)^{0,4} \simeq 438 \text{ K.}$$

El cambio de energía interna en la compresión es

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} &= C_V \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \\ &\simeq \frac{5}{2} \cdot 3,92 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot (438 - 310) \simeq 8,07 \text{ J.} \end{aligned}$$

- El segundo proceso es isocórico. Dado que el volumen es constante, el trabajo en este proceso es cero, de manera que

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} = C_V \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \\ &= -\Delta U_{12} \simeq -8,07 \text{ J.} \end{aligned}$$

Es decir, el gas desprende calor hacia el exterior en este proceso mientras reduce su temperatura a volumen constante.

Debido a los dos procesos anteriores, la energía interna del gas U_3 es la misma que tenía inicialmente U_1 (pues la temperatura final es igual a la inicial). Así,

$$U_3 = U_1 = C_V T_1 = \frac{5}{2} n R T_1 \simeq \frac{5}{2} \cdot 3,29 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 310 \simeq 33,3 \text{ J.}$$

12. Disponemos de un frigorífico con un COP de 4 que está consumiendo 5 W. Esta potencia la está empleando en enfriar y congelar 100 g de agua a 20°C que hemos colocado en la parte del congelador. Estima el tiempo que tardará el frigorífico en congelar el agua a 0°C , teniendo en cuenta que el calor específico del agua es $c = 4187 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ y que el calor latente de fusión es $L_f = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J}/\text{kg}$.

Sol. El calor necesario para enfriar el agua hasta los 0°C es

$$Q_1 = mc \Delta T,$$

donde asumimos que, cuando el agua está a punto de congelar, está en “equilibrio” a 0°C . Esto no es cierto, pues está dentro de un congelador a menor temperatura, aunque resulta una buena aproximación en general. Además, cuando el agua se congela, absorbe el siguiente calor:

$$Q_2 = m L_s = -m L_f,$$

donde m es la masa de agua y L_s el calor de solidificación. En total, el agua absorbe:

$$Q = Q_1 + Q_2 \simeq 0,1 \cdot 4187 \cdot (0 - 20) - 0,1 \cdot 3,34 \cdot 10^5 \simeq -42,0 \text{ kJ},$$

que al ser negativo implica que es el frigorífico el que absorbe calor. Si Q_b es dicho calor, tenemos

$$Q_b = -Q \simeq 42,0 \text{ kJ.}$$

A partir del COP de enfriamiento del frigorífico, podemos obtener el trabajo que éste tiene que realizar para hacerlo:

$$COP_{enf} = \frac{Q_b}{W} \Rightarrow W = \frac{Q_b}{COP_{enf}} \simeq \frac{42,0 \cdot 10^3}{4} \simeq 10,5 \text{ kJ.}$$

Si toda la potencia del frigorífico se emplea en realizar este trabajo, tendremos

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow t = \frac{W}{P} \simeq \frac{10,5 \cdot 10^3}{5} \simeq 2,10 \cdot 10^3 \text{ s.}$$

13. Una máquina térmica realiza un ciclo de Carnot utilizando 10 moles de gas ideal monoatómico como sustancia de trabajo. Un ciclo de la máquina está formado por cuatro procesos: $A \rightarrow B$ expansión isoterma a temperatura T_1 hasta duplicar su volumen, $B \rightarrow C$ expansión adiabática hasta duplicar su volumen, $C \rightarrow D$ compresión isoterma a la temperatura T_2 y $D \rightarrow A$ compresión adiabática. En el estado A , la presión del gas es 101 kPa y ocupa 1 m^3 .

- (a) Calcula las temperaturas T_1 y T_2 .
 (b) Calcula el rendimiento de la máquina.

Sol.

- (a) Usando la ecuación de los gases ideales

$$T_1 = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{101 \cdot 10^3 \cdot 1}{10 \cdot 8,31} \simeq 1220 \text{ K.}$$

Para calcular T_2 , consideramos el proceso $B \rightarrow C$:

$$T_2 V_C^{\gamma-1} = T_1 V_B^{\gamma-1}$$

donde $V_C = 2V_B$ y $\gamma = \frac{5}{3}$. Así,

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{2^{\frac{2}{3}}} \simeq 766 \text{ K.}$$

- (b) Usando los resultados del apartado anterior, el rendimiento de la máquina de Carnot es

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - 2^{-\frac{2}{3}} \simeq 0,370.$$

14. Una casa está refrigerada con una máquina que aproximaremos por una máquina de Carnot inversa. Determina la potencia consumida por la máquina si ésta extrae, en una hora, 10^5 J de calor del interior de la casa, a 26°C , estando el exterior a 36°C .

Sol. La máquina de Carnot es el dispositivo (ideal) más eficiente para refrigerar o calentar una vivienda. Si el aire acondicionado es una

máquina de Carnot inversa, su COP de enfriamiento se puede calcular con sólo las temperaturas interior y exterior de la casa:

$$COP_{enf} = \frac{Q_b}{W} = \frac{Q_b}{Q_a - Q_b} = \frac{T_b}{T_a - T_b} \simeq \frac{273,15 + 26}{36 - 26} \simeq 29,9.$$

A partir de este valor, y con el dato de calor extraído de la vivienda en una hora, podemos calcular el trabajo que realiza la máquina de Carnot cada hora,

$$COP_{enf} = \frac{Q_b}{W} \Rightarrow W = \frac{Q_b}{COP_{enf}} \simeq \frac{10^5}{29,9} \simeq 3340 \text{ J/hora.}$$

La potencia de la máquina es

$$P \simeq 3340 \frac{\text{J}}{\text{hora}} \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ s}} \simeq 0,929 \text{ W.}$$

Capítulo 4

Ondas

Iniciamos con este tema el estudio de las ondas. Como ejemplo de onda transversal, estudiamos la propagación de una perturbación por una cuerda tensa. Presentamos la ecuación de ondas y estudiamos en detalle las soluciones armónicas. Como ejemplo de onda longitudinal, estudiamos el sonido. En este último caso, prestamos especial interés a tres propiedades: la onda de desplazamiento de las moléculas, la onda de presión acústica y la onda de variación de la densidad. Finalmente, estudiamos los fenómenos de superposición e interferencia de ondas armónicas.

4.1. Propagación de una perturbación

Consideremos un medio homogéneo y fijémonos en un punto cualquiera de éste, que llamaremos *foco*, en el cual realizamos una perturbación de las propiedades del medio. La perturbación se va propagando al resto de los puntos con un retraso que depende de la distancia. Esta *propagación de una perturbación*, en la que no hay transporte neto de materia pero sí de energía, es lo que llamamos *onda*.

Un ejemplo de onda es el de la figura 4.1. Un muelle en posición vertical comienza a oscilar y hay una cuerda conectada a él. La oscilación se propaga por la cuerda hasta que cada punto de ella realiza el mismo tipo de movimiento. Pero los puntos materiales de la cuerda no se han transportado en horizontal: se limitan a oscilar en torno a su posición de equilibrio

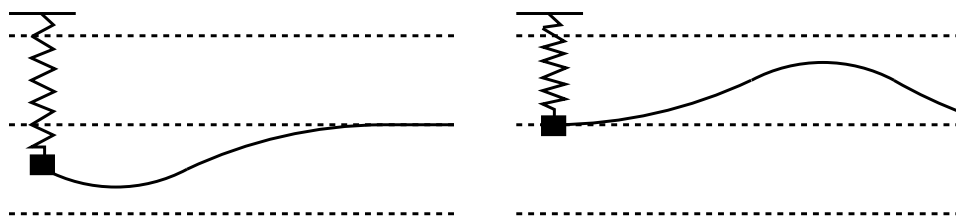


Figura 4.1: Propagación de una onda en una cuerda.

verticalmente.

Todos los puntos de un medio homogéneo e isótropo a los que la perturbación transportada por una onda llega en un cierto instante de tiempo tienen el mismo estado o valor de la perturbación. El conjunto o lugar geométrico de estos puntos forma en el espacio una superficie que se llama *frente de onda* (en el caso particular de una cuerda, el frente de ondas es un punto; en el caso particular de una onda sobre la superficie del agua, el frente de onda es una curva). La forma de estos frentes es también una manera de clasificar las ondas, ya que podemos distinguir entre ondas planas, circulares, cilíndricas, esféricas, etc.

Además, las ondas se pueden también clasificar atendiendo a la relación entre la dirección en que se propaga la energía y la dirección de vibración de la perturbación. Según esto, las ondas pueden ser *longitudinales*, si la vibración y la propagación son paralelas, o *transversales*, si ambas direcciones son perpendiculares.

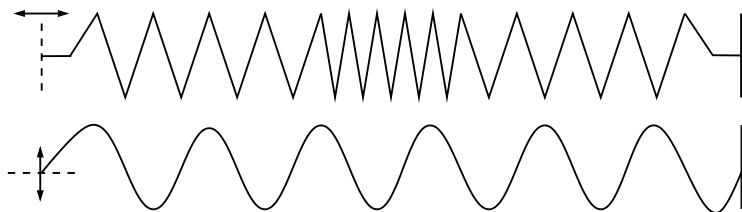


Figura 4.2: Ejemplo de onda longitudinal en un muelle (arriba) y ejemplo de onda transversal en una cuerda (abajo).

Las ondas en las que, al propagarse, los puntos del medio vibran elásticamente, se llaman *ondas mecánicas*, como las ondas en el agua, en una cuerda, el sonido o las ondas sísmicas. Para que una onda mecánica transversal se propague en un medio, hace falta que éste soporte esfuerzos cortantes.

Ésta es la razón por la que en los gases prácticamente no se propagan ondas mecánicas transversales de tamaño macroscópico, y en los líquidos las únicas de ellas que se propagan son superficiales (usando los esfuerzos debidos a la tensión superficial). Las ondas en la superficie del agua del mar, así como las sísmicas, son tanto longitudinales como transversales.

4.2. Ondas en una cuerda tensa

Consideremos una cuerda tensa en posición horizontal en equilibrio. Colocamos el eje x a lo largo de la cuerda y el origen en su extremo izquierdo, de manera que y será la altura de cada punto de la cuerda respecto a su posición de equilibrio $y = 0$. Está claro que y es una función que depende del punto x y del tiempo t , es decir $y = y(x, t)$. La propagación del estado de perturbación y a lo largo de la cuerda constituye una onda unidimensional, que tomaremos sin amortiguamiento.

Supongamos que, en el instante inicial $t = 0$, generamos una perturbación $y(x, 0) = f(x)$ en los puntos de la cuerda. A medida que pasa el tiempo, la perturbación se propaga sin amortiguarse a velocidad constante v hacia la derecha, según se ve en la figura 4.3. El objetivo, conocida $y(x, 0)$, es dar la función dependiente del tiempo $y(x, t)$.

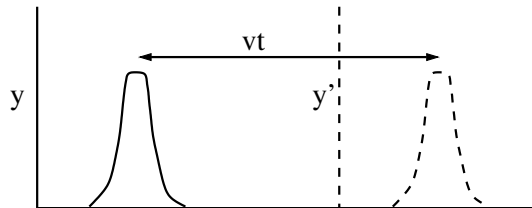


Figura 4.3: Propagación de la perturbación $f(x)$ generada inicialmente (línea sólida) hasta el tiempo t (línea a trazos).

Para ello, como vemos en la figura 4.3, tomamos dos sistemas de referencia: el original xy y uno auxiliar $x'y'$ tal que su origen se mueve a la misma velocidad v que la perturbación. Esto significa que, respecto al sistema de referencia $x'y'$, la perturbación no se mueve y siempre tiene la forma $y' = f(x')$. Pero, como vemos en la figura, las alturas desde ambos sistemas de referencia coinciden, así que $y' = y$, y las distancias horizontales respecto a ambos orígenes están relacionadas mediante $x' = x - vt$. En consecuencia, llegamos

a una ecuación para la propagación en el sentido del eje x positivo, que es

$$y(x, t) = f(x - vt),$$

siendo $f(x)$ la perturbación en $t = 0$. De la misma forma, si la onda se propaga en el sentido del eje x negativo,

$$y(x, t) = f(x + vt),$$

sin más que cambiar el signo de la velocidad.

Ambas funciones son solución de la *ecuación de ondas unidimensional*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Podemos ahora definir, de forma muy general, una onda como todo fenómeno físico que se propaga obedeciendo esta ecuación. La cantidad v^2 que multiplica al término de derivada espacial determina la *velocidad de propagación* o *velocidad de fase* v de la onda. La velocidad de propagación depende del medio que utilice la onda para viajar. Por ejemplo, en el caso de una *cuerda tensa*, podemos escribir

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/\ell}}, \quad (4.1)$$

donde F es la tensión de la cuerda y m/ℓ es su masa por unidad de longitud.

Ejemplo 4.2.1 *La fórmula anterior también la podemos utilizar para calcular la tensión F . Por ejemplo, sabemos que los cables principales que soportan el Puente de George Washington en Nueva York tiene una densidad lineal de masa de 4100 kg/m y que la velocidad de propagación de las ondas transversales por ellos es de 250 m/s. Calculemos la tensión a la que están sometidos los cables.*

Sol. *Despejando la tensión F de la ecuación (4.1), tenemos*

$$F = \frac{m}{\ell} v^2 = 4100 \cdot 250^2 \simeq 256 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

De todas las posibles funciones $f(x)$ que determinan una onda unidimensional mediante la expresión $y(x, t) = f(x - vt)$ (propagación a lo largo del eje x positivo) o la análoga $y(x, t) = f(x + vt)$ (propagación a lo largo del eje x negativo), las más importantes son las *funciones armónicas*, en las que

f es un seno o un coseno. Esto es así, primero, porque expresan el ejemplo físico de una cuerda tensa que ha sido perturbada en un extremo mediante un movimiento armónico simple, pero sobre todo porque *todas las soluciones de la ecuación de onda se pueden escribir mediante una suma de ondas armónicas*. Por eso, podemos centrarnos en el estudio de este tipo de movimiento ondulatorio.

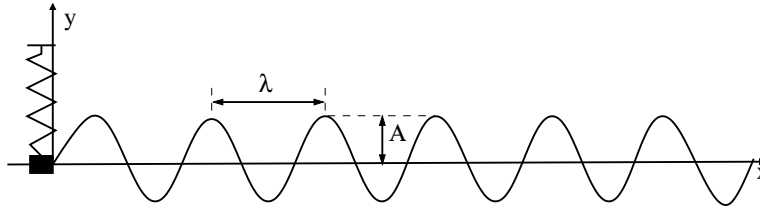


Figura 4.4: Onda armónica en una cuerda con amplitud A y longitud de onda λ .

Una *onda armónica* unidimensional es aquella tal que, en el estado inicial, se escribe

$$y(x, 0) = A \sin(kx + \phi_0).$$

Como vemos en la figura 4.4, A es la *amplitud* de la perturbación (en las mismas unidades que y), ϕ_0 es la *fase inicial en el origen* (en radianes), y k es el *número de onda* (en rad/m), que determina el periodo espacial de la perturbación λ (distancia en metros entre dos máximos o dos mínimos) según

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.2)$$

El periodo espacial λ se conoce con el nombre de *longitud de onda*.

Si ahora introducimos la propagación de la perturbación a lo largo del eje x positivo (por ejemplo), tendremos que cambiar x por $x - vt$, resultando la onda armónica

$$y(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \phi_0] = A \sin(kx - \omega t + \phi_0). \quad (4.3)$$

La cantidad

$$\omega = kv. \quad (4.4)$$

se llama *frecuencia angular* (en rad/s) y proporciona el *periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4.5)$$

que es el tiempo que transcurre desde que un punto dado alcanza un máximo de la perturbación hasta que el mismo punto alcanza otro máximo. La inversa del periodo se llama *frecuencia*,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (4.6)$$

La unidad de frecuencia en el SI es el hercio o hertz, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. La frecuencia indica el número de oscilaciones que realiza la perturbación en un punto por cada segundo. Finalmente, conviene recordar que todo el argumento de la función trigonométrica en la expresión de la onda (en este caso, el argumento del seno es $kx - \omega t + \phi_0$) se llama *fase* de la onda.

Ejemplo 4.2.2 Consideremos una onda armónica que se propaga por una cuerda cuya tensión es $F = 1 \text{ N}$ y que tiene una masa por unidad de longitud igual a $m/\ell = 0,01 \text{ kg/m}$. Determinemos la ecuación de la onda armónica sabiendo que su amplitud es $A = 10 \text{ cm}$ y que un punto de la cuerda tarda 1 s en completar una oscilación. Además, en el instante inicial, el punto de coordenadas $x = 0 \text{ cm}$ tiene un desplazamiento $y = 10 \text{ cm}$.

Sol. Si prestamos atención a la fórmula (4.3), para determinar la onda armónica, debemos conocer la amplitud A , el número de onda k , la frecuencia angular ω y la fase ϕ_0 . Sabemos la amplitud, $A = 10 \text{ cm}$, pero nos quedan por determinar las otras tres magnitudes. El tiempo que tarda un punto de la cuerda en completar una oscilación es el periodo $T = 1 \text{ s}$, que lo podemos utilizar para calcular ω mediante la fórmula (4.6):

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}.$$

Para conocer el número de onda, no podemos usar la relación (4.2), pues desconocemos la longitud de onda, sino que debemos hacer uso de la ecuación (4.4), para lo que necesitamos calcular previamente la velocidad de propagación v mediante la fórmula (4.1):

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/\ell}} = \sqrt{\frac{1}{0,01}} = 10 \text{ m/s}.$$

Así,

$$\omega = kv \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/m.}$$

Finalmente, la fase ϕ_0 la podemos obtener a partir de la información del valor de la perturbación inicial en el origen. Como $y(0,0) = 10 \text{ cm} = A$, tenemos:

$$y(0,0) = A \quad \Rightarrow \quad A \sin(0-0+\phi_0) = A \quad \Rightarrow \quad \sin(\phi_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Con todo esto,

$$y(x,t) = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x - 2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}x - 2\pi t\right),$$

donde hemos usado en la última igualdad la relación trigonométrica $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

4.3. Ondas de sonido

El sonido está constituido por *ondas mecánicas longitudinales* que se originan en focos situados en los medios materiales (sólidos, líquidos y gases) y se propagan a través de ellos. Si el foco es puntual, las ondas producidas en medios homogéneos serán esféricas. Sin embargo, a distancia grande del foco, las ondas esféricas se comportan en volúmenes pequeños como *ondas planas*.

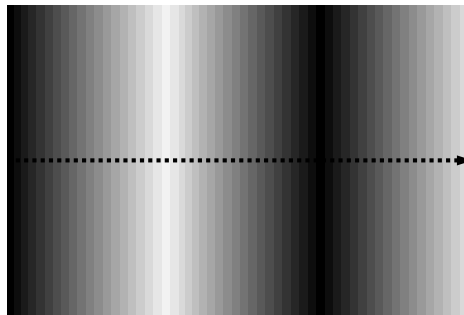


Figura 4.5: Representación de una onda de sonido plana. Los distintos tonos indican distintos valores de la amplitud y la flecha la dirección de propagación.

En la figura 4.5 tenemos una imagen de una onda de sonido en un instante

de tiempo fijo. La fuente de la onda ha sido la vibración del diafragma de un altavoz, que ha provocado pulsos sucesivos en el aire que está en contacto con él. La onda de sonido consta de zonas alternas de baja densidad y alta densidad, que vemos como zonas claras y oscuras. Estas zonas viajan hacia la derecha en la figura, alejándose del foco. Sin embargo, el aire como un todo no se propaga: las posiciones (medias) de las moléculas simplemente oscilan hacia adelante y hacia atrás. La fuerza elástica que provoca la oscilación proviene de la presión del aire, que trata de mantener la densidad uniforme, oponiéndose a la deformación que supone una zona de alta o baja densidad.

En una onda de sonido, por tanto, hay tres cantidades que oscilan: la densidad del medio, su presión y la posición de las partículas del medio. La onda de densidad y la onda de presión están en fase, pero ambas están desfasadas $\pi/2$ rad respecto de la onda de desplazamiento. Las variaciones típicas de estas propiedades en las ondas de sonido son muy pequeñas: en el aire, aunque la onda de sonido sea muy intensa, los desplazamientos medios de las moléculas son del orden de una décima de milímetro, y las sobrepresiones son del orden del 1 % de la presión normal.

No todas las ondas mecánicas longitudinales son audibles, es decir, no todas excitan el nervio auditivo humano. La zona audible va desde una frecuencia de 20 Hz hasta una frecuencia de 20000 Hz, y las ondas en esta zona se denominan *ondas sonoras*. Fuera de estos límites, las ondas elásticas longitudinales se siguen llamando sonido aunque no sean audibles por el hombre. Si la frecuencia es inferior a 20 Hz, tenemos *infrasonidos* y, si es superior a 20000 Hz, tenemos *ultrasonidos*.

La variación de la presión respecto a la que corresponde al medio sin perturbar se denomina *presión acústica*. Si la presión en un punto del medio es p y la presión del medio no perturbado es p_0 , la presión acústica en ese punto es $\Delta p = p - p_0$. De manera análoga, la *variación de densidad* respecto a la densidad sin perturbar será $\Delta \rho = \rho - \rho_0$. Por último, llamaremos Δx al *desplazamiento* medio de las moléculas del medio respecto a su punto de equilibrio.

La propagación de una *onda de sonido en un fluido* depende de la densidad del fluido sin perturbar, ρ_0 , y de su *módulo de compresibilidad* κ . Supongamos un material de volumen V sometido a una presión uniforme en su superficie. Debido a esta presión, el material disminuye su volumen conservando su forma. La disminución relativa de volumen del material ($-\Delta V/V$) por unidad de variación de presión Δp se llama coeficiente de compresibili-

dad, y su inversa es el módulo de compresibilidad

$$\kappa = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V},$$

que se mide en pascuales en el SI. Esta cantidad determina lo compresible (κ pequeños) o incompresible (κ grandes) que es un material y, por tanto, cómo se comporta frente a perturbaciones elásticas.

La velocidad con la que se propaga una onda mecánica armónica plana en un fluido es

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}, \quad (4.7)$$

y se llama *velocidad del sonido en el fluido*.

Cuando el sonido se propaga por un gas podemos suponer que los procesos inducidos son *adiabáticos*. Además, en ese caso, el módulo de compresibilidad del gas crece linealmente con la temperatura. Como consecuencia, si v_0 es la velocidad del sonido en el gas a una temperatura T_0 (medida en Kelvin), la velocidad del sonido en el mismo gas a una temperatura T es

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (4.8)$$

Ejemplo 4.3.1 Con la fórmula (4.8) podemos hacernos una idea de la influencia de la temperatura en la propagación de una onda. Supongamos, por ejemplo, que una onda sonora tarda 3 s en propagarse a través del aire entre dos puntos. El aire está a 20°C y la velocidad del sonido para dicha temperatura es de 340 m/s. Veamos cuánto tardaría el sonido en viajar entre esos mismos dos puntos si el aire estuviera a 0°C.

Sol. Conviene, en primer lugar, calcular la distancia entre estos dos puntos. Si d es dicha distancia, v es la velocidad del sonido a 20°C y $t = 3$ s, tenemos:

$$d = vt = 340 \cdot 3 = 1020 \text{ m/s}.$$

El nuevo tiempo t' a 0°C es

$$t' = \frac{d}{v'},$$

donde v' es la velocidad del sonido a 0°C :

$$v' = v \sqrt{\frac{T'}{T}} = 340 \cdot \sqrt{\frac{0 + 273,15}{20 + 273,15}} \simeq 328 \text{ m/s.}$$

Así,

$$t' \simeq \frac{1020}{328} \simeq 3,11 \text{ s.}$$

Puede parecer, a simple vista, que la deferencia de tiempos no es muy significativa. Sin embargo, puede ser relevante cuando se diseñan edificios o espacios con unas propiedades acústicas específicas.

Si la onda de desplazamiento de un sonido en un fluido es una *onda armónica plana* como

$$\Delta x(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0), \quad (4.9)$$

con *amplitud de desplazamiento* A , número de onda k y frecuencia angular $\omega = kv$, entonces la onda de presión acústica se puede obtener a partir de ella mediante

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &= -\kappa \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = -\kappa Ak \cos(kx - \omega t + \phi_0) \\ &= \kappa Ak \sin(kx - \omega t + \phi_0 - \pi/2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Analizando los argumentos, vemos que la onda acústica está retrasada respecto a la de desplazamiento en $\pi/2$ rad, tal como habíamos comentado antes. La presión acústica máxima o *amplitud de presión acústica* resulta

$$\Delta p_{max} = \kappa Ak.$$

De la misma forma, la onda de variación de densidad se calcula haciendo

$$\begin{aligned} \Delta \rho(x, t) &= -\rho_0 \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = -\rho_0 Ak \cos(kx - \omega t + \phi_0) \\ &= \rho_0 Ak \sin(kx - \omega t + \phi_0 - \pi/2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

que está en fase con la presión acústica y tiene una amplitud dada por $\rho_0 Ak$. Como la variación de densidad es $\Delta \rho = \rho - \rho_0$, podemos despejar ρ y encontrar los valores máximo y mínimo de la densidad del fluido cuando es atravesado por una onda armónica plana de sonido, que estarán dados por

$$\begin{aligned} \rho_{max} &= \rho_0(1 + Ak), \\ \rho_{min} &= \rho_0(1 - Ak). \end{aligned}$$

Pasemos ahora a la *propagación del sonido en materiales sólidos*. Las ecuaciones que siguen las ondas de sonido en una *varilla sólida* son completamente similares a las del caso de los fluidos, pero cambiando la velocidad del sonido por

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}, \quad (4.12)$$

donde E es el *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*, que representa la fuerza longitudinal por unidad de sección que hay que aplicar a la varilla para producir en ella un alargamiento igual a la longitud inicial de la misma (su unidad en el SI es 1 Pa).

Ejemplo 4.3.2 Como hemos visto, a partir de la onda de desplazamiento, el módulo de compresibilidad y la densidad del aire sin perturbar, podemos obtener la onda de presión y densidad. También es cierto lo anterior si partimos de cualquier onda. Por ejemplo, consideremos la onda sonora de variación de densidad en el aire dada por $\Delta\rho(x, t) = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \cdot \sin(2\pi x - 680\pi t)$ y determinemos las ondas sonoras de desplazamiento y presión acústica. Para obtener la onda de desplazamiento necesitaremos un dato adicional, por ejemplo, la densidad sin perturbar $\rho_0 = 1,28 \text{ kg/m}^3$.

Sol. Consideremos primero la onda de presión acústica. La amplitud de la onda de densidad es

$$\Delta\rho_{max} = \rho_0 A k$$

y la de la presión

$$\Delta p_{max} = \kappa A k = \frac{\kappa}{\rho_0} \Delta\rho_{max},$$

donde κ viene dada por

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \Rightarrow \kappa = \rho_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2.$$

Así,

$$\Delta p_{max} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \Delta\rho_{max} = \left(\frac{680}{2}\right)^2 3,5 \cdot 10^{-4} \simeq 40,5 \text{ Pa}$$

y la onda de presión acústica resulta

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{max} \sin(2\pi x - 680\pi t) \simeq 40,5 \text{ Pa} \cdot \sin(2\pi x - 680\pi t).$$

Observemos que, para calcular Δp_{max} a partir de $\Delta \rho_{max}$, sólo necesitamos κ/ρ_0 que se puede calcular a partir de $v = \omega/k$. Esto no es así para la onda de desplazamiento, para la cual necesitamos κ ó ρ_0 (pues $v = \omega/k$ es conocida). Usando ρ_0 , la amplitud A viene dada por

$$\Delta \rho_{max} = \rho_0 A k \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\Delta \rho_{max}}{\rho_0 k} = \frac{3,5 \cdot 10^{-4}}{1,28 \cdot 2\pi} \simeq 4,35 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Así, la onda de desplazamiento resulta

$$\Delta x(x, t) = A \sin(2\pi x - 680\pi t + \frac{\pi}{2}) \simeq 4,35 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \sin(2\pi x - 680\pi t + \frac{\pi}{2}).$$

Hemos tenido en cuenta que la fase de la onda de desplazamiento es $\pi/2$ mayor que la de densidad.

4.4. Superposición e interferencia

Veamos lo que sucede cuando dos ondas coinciden durante un tiempo en la misma región del espacio. Por ejemplo, cuando la música llega a nuestros oídos desde varios sitios, cuando dos ondas de agua chocan, etc. En estos casos se cumple el *principio de superposición lineal*, que dice que cuando dos ondas coinciden simultáneamente en el mismo punto, la onda resultante es la *suma algebraica* de las ondas individuales. La superposición de ondas armónicas suele llamarse *interferencia*. El principio de superposición se muestra gráficamente en la figura 4.6.

Un caso sencillo es la superposición de dos ondas armónicas de la misma amplitud y frecuencia en una cuerda con cierto desfase entre ellas, que vemos en la figura 4.7.

La expresión matemática de estas dos ondas es

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin(kx - \omega t), \\ y_2 &= A \sin(kx - \omega t + \phi_0). \end{aligned}$$

La onda resultante es la suma $y = y_1 + y_2$. Usando la relación trigonométrica

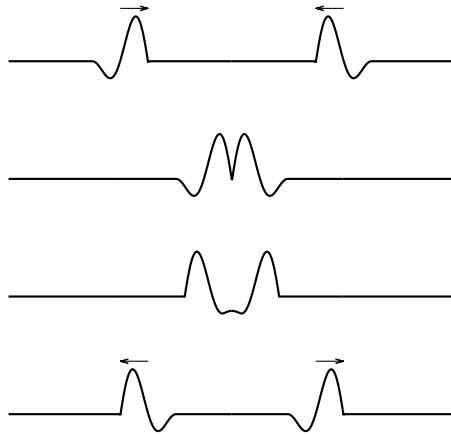


Figura 4.6: Proceso de interferencia de dos ondas.

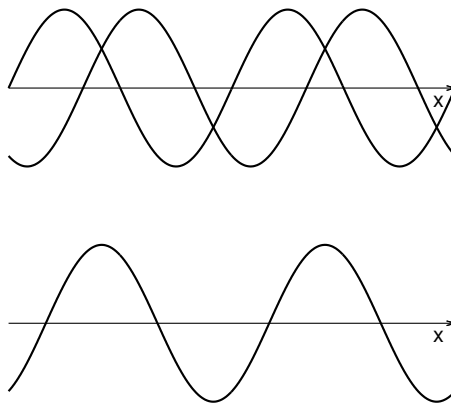


Figura 4.7: Superposición de dos ondas armónicas. Arriba se representan las dos ondas por separado y abajo la onda resultante de la superposición.

$\sin a + \sin b = 2 \cos [(a - b)/2] \sin [(a + b)/2]$, resulta

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right). \quad (4.13)$$

Por tanto, la onda resultante es otra onda armónica con la misma frecuencia, desfasada en $\phi_0/2$ respecto de las dos ondas originales, y cuya amplitud es

$$A_{tot} = 2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right).$$

Si $\phi_0 = 2n\pi$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces la amplitud total alcanzará su valor máximo $A_{tot} = \pm 2A$, y la interferencia se llamará *constructiva*. Por su parte, si $\phi_0 = (2n + 1)\pi$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces la amplitud total alcanzará su valor mínimo $A_{tot} = 0$, y la interferencia se llamará *destruktiva*.

Ejemplo 4.4.1 Consideremos la superposición de dos ondas armónicas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud $A = 1 \text{ cm}$, que se mueven en el mismo sentido, pero que con una diferencia de fase de $\pi/2 \text{ rad}$. Determinemos la amplitud de la onda resultante.

Sol. Las dos ondas armónicas a lo largo de la cuerda pueden escribirse como

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t + \pi/2) \end{aligned}$$

Usando la fórmula trigonométrica $\sin a + \sin b = 2 \sin(a + b)/2 \cos(a - b)/2$, la interferencia de ambas ondas es

$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

La amplitud de interferencia es

$$A_{tot} = \left|2A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \simeq 0,0141 \text{ m}.$$

4.5. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$v = \sqrt{\frac{F}{m/\ell}}$ F m ℓ	Velocidad de propagación de la onda en la cuerda Tensión de la cuerda Masa de la cuerda Longitud de la cuerda	(4.1)
$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$ y x t A k ω ϕ_0	Onda armónica que se propaga hacia la derecha Perturbación Coordenada espacial Coordenada temporal Amplitud Número de ondas Frecuencia angular Fase inicial	(4.3)
$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $v = \frac{k}{\omega}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$	Longitud de onda Velocidad de propagación Periodo de la onda Frecuencia de la onda	(4.2) (4.4) (4.5) (4.6)
$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}$ κ ρ_0	Velocidad del sonido en un fluido Módulo de compresibilidad Densidad del fluido sin perturbar	(4.7)
$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ E	Velocidad del sonido en sólidos Módulo de Young	(4.12)
$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$ v_0 T	Velocidad como función de la temperatura Velocidad a la temperatura T_0 (en Kelvin) Temperatura (en Kelvin)	(4.8)

$\Delta x(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$	Onda de desplazamiento	(4.9)
$\Delta p(x, t) = -\kappa \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$	Presión acústica	(4.10)
$\Delta \rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$	Onda de densidad	(4.11)
$y = y_1 + y_2$ $= 2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right)$ $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$ $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$	Interferencia de dos ondas armónicas	(4.13)

4.6. Problemas resueltos

1. Un teatro cerrado tiene una longitud de 200 m. Desde el escenario se emite sonido que se dirige hacia la pared opuesta. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido es de 340 m/s, calcula el tiempo que tardamos en escuchar el eco de un sonido emitido desde el escenario.

Sol. La distancia que ha de recorrer el sonido hasta la pared posterior desde el escenario y de vuelta a nosotros es

$$d = 2 \cdot 200 = 400 \text{ m.}$$

El tiempo que tarda el sonido en recorrer esa distancia es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{400}{340} \simeq 1,18 \text{ s.}$$

2. Una onda armónica transversal se desplaza a lo largo de una cuerda. La onda tiene amplitud de 1 cm, una longitud de onda de 5 cm y una frecuencia de 10 Hz. Además, se sabe que en el instante inicial el desplazamiento del punto en origen de coordenadas ($x = 0$) es de 0,5 cm. Calcula la velocidad de propagación de la onda y obtén la función de onda en la cuerda.

Sol. Para calcular la velocidad de propagación, hacemos:

$$\omega = kv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = 0,05 \cdot 10 = 0,5 \text{ m/s.}$$

Para la función de onda, necesitamos el número de onda y la frecuencia angular,

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \text{ rad/s,} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,05} = 40\pi \text{ rad/m.} \end{aligned}$$

Con lo anterior y el dato de la amplitud, la onda armónica es

$$y(x, t) = 1 \text{ cm} \cdot \sin(40\pi x - 20\pi t + \phi_0)$$

Para calcular la fase inicial en el origen, tenemos la siguiente condición:

$$y(0, 0) = 0,5 \text{ cm} = 1 \text{ cm} \cdot \sin \phi_0 \quad \Rightarrow \quad \sin \phi_0 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Finalmente,

$$y(x, t) = 1 \text{ cm} \cdot \sin \left(40\pi x - 20\pi t + \frac{\pi}{6} \right).$$

3. Una onda transversal armónica se propaga inicialmente por una cuerda tensa con una velocidad de 5 m/s. Teniendo en cuenta que la amplitud es 0,5 cm y el número de onda de 20π rad/m, determina la función de onda y la velocidad de vibración de los puntos de la cuerda.

Sol. La onda tiene una forma inicial armónica, dada por

$$f(x) = A \sin(kx) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(200\pi x)$$

Hemos tomado nula la fase en el origen porque no nos dan datos de la perturbación en un punto y un tiempo dados, así que podemos tomar $\phi_0 = 0$ eligiendo el momento en que empieza a contar el tiempo. La frecuencia angular de la onda es

$$\omega = kv = 20\pi \cdot 5 = 100\pi \text{ rad/s}.$$

Con esto, la función de onda que se propaga hacia el eje x positivo resulta

$$\begin{aligned} y(x, t) &= f(x - vt) = A \sin(kx - \omega t) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \sin(20\pi x - 100\pi t). \end{aligned}$$

La velocidad de vibración es aquella con la que oscila cada punto de la cuerda:

$$\begin{aligned} v_{vib}(x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = -100\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(20\pi x - 100\pi t) \\ &= -0,5\pi \text{ m/s} \cdot \cos(20\pi x - 100\pi t). \end{aligned}$$

4. Considera una onda armónica con periodo 2 ms y velocidad de propagación 400 m/s. Calcula:
- La separación espacial entre dos puntos que, en el mismo instante de tiempo, tengan una diferencia de fase de 30° .
 - La diferencia de fase entre dos puntos separados por, en el mismo instante de tiempo, estén separados media longitud de onda.

- c) La diferencia de fase de un mismo punto en dos instantes de tiempo separados 0,5 ms.

Sol. El ejercicio involucra la fase de una onda armónica, de modo que lo primero que hay que hacer es determinarla. En nuestro caso, tenemos una frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-3}} = 1000\pi \text{ rad/s.}$$

y un número de onda

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{1000\pi}{400} = \frac{5}{2}\pi \text{ rad/m.}$$

Por tanto, la onda armónica es

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0) = A \sin\left(\frac{5}{2}\pi x - 1000\pi t + \phi_0\right).$$

La fase de la onda armónica es la función que determina el ángulo cuyo seno o coseno aparece en $y(x, t)$, es decir,

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0 = \frac{5}{2}\pi x - 1000\pi t + \phi_0.$$

- a) La diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 en el mismo instante de tiempo $t_1 = t_2 = t$ se escribe

$$\begin{aligned} \phi_2 - \phi_1 &= (kx_2 - \omega t + \phi_0) - (kx_1 - \omega t + \phi_0) \\ &= k(x_2 - x_1) = \frac{5}{2}\pi \Delta x. \end{aligned}$$

Así, si la diferencia de fase es de 30° , o sea,

$$\phi_2 - \phi_1 = 30^\circ = 30 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad,}$$

entonces

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2}\pi \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{\pi/6}{5\pi/2} = \frac{1}{15} \simeq 6,67 \text{ cm.}$$

b) Si la distancia entre dos puntos con $t_1 = t_2 = t$ es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \lambda/2 = \frac{\pi}{k},$$

su diferencia de fase es, de acuerdo con la ecuación deducida anteriormente

$$\phi_2 - \phi_1 = k(x_2 - x_1) = k \Delta x = k \frac{\pi}{k} = \pi \text{ rad.}$$

El resultado ilustra que la longitud de onda es el periodo espacial de una onda armónica.

c) Si tenemos un mismo punto $x_1 = x_2 = x$ en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 tales que

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s,}$$

entonces la diferencia de fase es

$$\begin{aligned} \phi_2 - \phi_1 &= (kx - \omega t_2 + \phi_0) - (kx - \omega t_1 + \phi_0) = -\omega(t_2 - t_1) \\ &= -\omega \Delta t = -1000\pi \Delta t = -1000\pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \\ &= -0,5\pi \text{ rad.} \end{aligned}$$

5. Una onda armónica se propaga por una cuerda de 30 m de longitud, 3 kg de peso y una tensión de 100 N. Calcula:

- La velocidad de propagación de la onda.
- Si la distancia entre dos puntos con amplitud máxima es de 1 m, calcula la longitud de onda y la frecuencia.
- Determina la amplitud de la onda sabiendo que la altura de la cuerda es de 1 cm cuando su fase vale $\frac{\pi}{6}$.

Sol.

(a) La velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/\ell}} = \sqrt{\frac{100}{3/30}} = \sqrt{1000} \simeq 31,6 \text{ m/s.}$$

(b) La longitud de onda λ es la distancia que nos dan

$$\lambda = 1 \text{ m}$$

y la frecuencia f la sacamos de λ y v :

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \sqrt{1000} \simeq 31,6 \text{ Hz.}$$

(c) Tenemos

$$1 = A \sin\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

por lo que la amplitud A vale

$$A = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2 \text{ cm.}$$

6. Considera la función de onda $\Delta x(x, t) = 1 \mu\text{m} \cdot \sin(0,5x - \omega t)$ que describe el desplazamiento de las moléculas de una onda sonora armónica con velocidad de propagación 340 m/s. Calcula la velocidad máxima de vibración de las moléculas.

Sol. La frecuencia angular de la onda es

$$\omega = kv = 0,5 \cdot 340 = 170 \text{ rad/s.}$$

La función de onda de desplazamiento es, por tanto,

$$\Delta x(x, t) = 1 \mu\text{m} \cdot \sin(0,5x - 170t).$$

La velocidad de vibración es

$$\begin{aligned} v_{vib}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta x = -1 \mu\text{m} \cdot 170 \cdot \cos(0,5x - 170t) \\ &= -0,17 \text{ mm/s} \cdot \cos(0,5x - 170t). \end{aligned}$$

La velocidad máxima de vibración es la amplitud de la velocidad de vibración (obviando el signo negativo),

$$v_{vib,max} = 0,17 \text{ mm/s.}$$

De manera alternativa, se puede calcular la velocidad máxima de vibración recordando la fórmula de teoría

$$v_{vib,max} = A\omega = 1 \mu\text{m} \cdot 170 = 0,17 \text{ mm/s.}$$

Las ondas de sonido son ondas longitudinales. Por tanto, las moléculas del aire vibran al pasar la onda en la misma dirección en la que la onda se propaga que, en el ejercicio, es el eje x .

7. La función de onda sonora de desplazamiento a lo largo del eje x de las moléculas del aire viene dada por $\Delta x(x, t) = 5 \mu\text{m} \cdot \sin(0,1x - 60t + \pi/5)$. Teniendo en cuenta que densidad del aire sin perturbar es $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$, determina la función de onda de variación de densidad y los valores máximo y mínimo de la densidad en el aire.

Sol. La función de onda de variación de densidad se puede calcular a partir de la de desplazamiento mediante

$$\begin{aligned} \Delta\rho(x, t) &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta x = -1,3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 \cdot \cos\left(0,1x - 60t + \frac{\pi}{5}\right) \\ &= -6,5 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3 \cdot \cos\left(0,1x - 60t + \frac{\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

La amplitud de la onda de variación de densidad es

$$\Delta\rho_{max} = 6,5 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3.$$

El valor máximo de la densidad del aire se obtiene de esta amplitud y del valor de la densidad del aire sin perturbar:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{max} = \rho_0 + \Delta\rho_{max} = 1,3 + 6,5 \times 10^{-7} = 1,3000065 \text{ kg/m}^3.$$

Para el valor mínimo, de manera análoga,

$$\rho_{min} = \rho_0 - \Delta\rho_{max} = 1,3 - 6,5 \times 10^{-7} = 1,29999935 \text{ kg/m}^3.$$

8. En condiciones en las que el aire tiene una densidad sin perturbar $\rho_0 = 1,28 \text{ kg/m}^3$ y una presión sin perturbar $p_0 = 101325 \text{ Pa}$, se propaga una onda armónica de desplazamiento de ecuación $\Delta x(x, t) = 0,5 \text{ mm} \cdot \sin(0,3x - 80t)$. Determina la ecuación de la onda de presión y, a partir de ella, los valores máximo y mínimo de la presión del aire, así como la presión en $x = 10 \text{ cm}$, $t = 10 \text{ s}$.

Sol. Necesitaremos el módulo de compresibilidad del aire, que podemos calcular, usando que $\omega = kv$, a partir de su relación con la velocidad del sonido:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \rho_0 v^2 = \rho_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1,28 \cdot \left(\frac{80}{0,3}\right)^2 \simeq 9,10 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

La función de onda de presión acústica resulta

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &= -\kappa \frac{\partial}{\partial x} \Delta x \simeq -9,10 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 \cdot \cos(0,3x - 80t) \\ &\simeq -13,7 \text{ Pa} \cdot \cos(0,3x - 80t), \end{aligned}$$

La amplitud de presión acústica resulta $\Delta p_{max} \simeq 13,7$ Pa. Los valores máximo y mínimo de la presión del aire a consecuencia de la onda serán

$$\begin{aligned} p_{max} &= p_0 + \Delta p_{max} \simeq 101325 + 13,7 = 101338,7 \text{ Pa,} \\ p_{min} &= p_0 - \Delta p_{max} \simeq 101325 - 13,7 = 101311,3 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

La presión en el punto $x = 10$ cm en el instante $t = 10$ s es

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \Delta p(30 \text{ cm}, 12 \text{ s}) \simeq 101325 - 13,7 \cdot \cos(0,3 \cdot 0,1 - 80 \cdot 10) \\ &\simeq 101330,8 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

9. Una onda sonora armónica plana se propaga por el aire, de densidad sin perturbar igual a $1,28 \text{ kg/m}^3$. La onda tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de 340 m/s . Además, sabemos que la amplitud de presión de la onda acústica es de 50 Pa . Escribe la función de onda de presión acústica y, a partir de ella, la onda de variación de densidad.

Sol. La frecuencia angular de la onda es

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 500 = 1000\pi \text{ rad/s}$$

y su número de onda

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{1000\pi}{340} = \frac{50\pi}{17} \text{ rad/m.}$$

Con esos datos y el de amplitud de presión acústica, la función de onda de la onda de presión acústica se puede escribir

$$\Delta p = 50 \text{ Pa} \cdot \sin\left(\frac{50\pi}{17} x - 1000\pi t\right).$$

Por una parte, las funciones de onda de variación de densidad y de presión acústica se relacionan con la onda de desplazamiento mediante las expresiones

$$\Delta \rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta x(x, t); \quad \Delta p(x, t) = -\kappa \frac{\partial}{\partial x} \Delta x(x, t).$$

Dividiendo la primera por la segunda, se llega a

$$\frac{\Delta \rho(x, t)}{\Delta p(x, t)} = \frac{\rho_0}{\kappa} \Rightarrow \Delta \rho(x, t) = \frac{\rho_0}{\kappa} \Delta p(x, t).$$

Por otra parte, el módulo de compresibilidad se relaciona con la velocidad del sonido mediante

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \Rightarrow \kappa = \rho_0 v^2.$$

Usando estos dos resultados de forma conjunta,

$$\Delta\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{\kappa} \Delta p(x, t) = \frac{\rho_0}{\rho_0 v^2} \Delta p(x, t) = \frac{1}{v^2} \Delta p(x, t).$$

Así, con los datos y resultados anteriores,

$$\begin{aligned} \Delta\rho(x, t) &= \frac{1}{v^2} \Delta p(x, t) = \frac{1}{340^2} \cdot 50 \cdot \sin\left(\frac{50\pi}{17}x - 1000\pi t\right) \\ &\simeq 4,33 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \cdot \sin\left(\frac{50\pi}{17}x - 1000\pi t\right). \end{aligned}$$

10. Halla la función de onda de desplazamiento a partir de la siguiente función de onda de presión acústica $\Delta p(x, t) = 15 \text{ Pa} \cdot \sin(2\pi x - 1500\pi t)$. Ten en cuenta que la densidad del aire sin perturbar es $\rho_0 = 1,28 \text{ kg/m}^3$.

Sol. Necesitaremos el módulo de compresibilidad del aire:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \Rightarrow \kappa = \rho_0 v^2 = \rho_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1,28 \cdot \left(\frac{1500\pi}{2\pi}\right)^2 \simeq 7,30 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

De la relación entre la función de onda de desplazamiento y la de presión acústica en una onda de sonido armónica, llegamos a

$$\Delta p(x, t) = -\kappa \frac{\partial}{\partial x} \Delta x(x, t) \Rightarrow \Delta x(x, t) = \frac{-1}{\kappa} \int dx \Delta p(x, t).$$

Con los datos del ejercicio,

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &\simeq \frac{-1}{7,30 \cdot 10^4} \int dx 15 \cdot \sin(2\pi x - 1500\pi t) \\ &= \frac{-1}{7,30 \cdot 10^5} \frac{-15 \cdot \cos(2\pi x - 1500\pi t)}{2\pi} \\ &\simeq 2,18 \mu\text{m} \cdot \cos(2\pi x - 1500\pi t). \end{aligned}$$

11. En un punto P incide sonido procedente de dos fuentes sonoras que oscilan en fase con la misma amplitud $A = 0,2 \text{ mm}$ y frecuencia $f = 60 \text{ Hz}$. Teniendo en cuenta que el punto P está a 3 m de una fuente y $3,3 \text{ m}$ de la otra, calcula la diferencia de fase de las ondas, supuestas armónicas, procedentes de cada fuente en el punto P , así como la amplitud total de desplazamiento en P .

Sol. Las funciones de onda de desplazamiento de cada una de las ondas en el punto P son:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= A \sin(kx_1 - \omega t), \\ \Delta x_2 &= A \sin(kx_2 - \omega t),\end{aligned}$$

donde hemos supuesto que la fase inicial en el origen de ambas es cero y hemos usado variables espaciales para cada onda, pues tienen orígenes distintos. Así, la diferencia de fase entre las ondas en P es

$$\phi_2 - \phi_1 = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1)$$

Necesitamos el número de onda, que resulta

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned}\phi_2 - \phi_1 &= k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi f}{v}(x_2 - x_1) \\ &= \frac{2\pi \cdot 60}{340}(3,3 - 3) \simeq 0,333 \text{ rad} \simeq 19,1^\circ.\end{aligned}$$

La interferencia de las ondas en P es la suma de ambas ondas en dicho punto:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t) \\ &= 2A \sin\left(\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t\right) \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right).\end{aligned}$$

Usando el resultado sobre la diferencia de fase, la amplitud total en P resulta

$$\begin{aligned}A_{tot} &= \left| 2A \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right) \right| = \left| 2A \cos\left(\frac{2\pi f(x_2 - x_1)}{2v}\right) \right| \\ &= \left| 2A \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \right| \simeq |2 \cdot 0,2 \text{ mm} \cdot \cos 9,53^\circ| \simeq 0,394 \text{ mm}.\end{aligned}$$

12. Desde un punto P se escucha música de dos altavoces separados una cierta distancia. Hacemos que por ambos altavoces se generen sendas ondas armónica de desplazamiento, de igual amplitud A y longitud de onda λ . Teniendo en cuenta que la distancia del primer altavoz a P supera a la distancia del segunda altavoz a P en $\lambda/2$, calcula la amplitud total en P cuando:

- a) Los altavoces están en fase.
 b) Los altavoces tienen un desfase de π rad.

Sol.

- a) Si los altavoces están en fase, las ondas sonoras de desplazamiento en P son

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= A \sin(kx_1 - \omega t), \\ \Delta x_2 &= A \sin(kx_2 - \omega t),\end{aligned}$$

donde $x_2 = x_1 + \lambda/2$ y hemos elegido la fase inicial en la posición de cada altavoz como cero. La interferencia en P es

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t) \\ &= 2A \sin\left[\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t\right] \cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right].\end{aligned}$$

La amplitud total en P es, dado que $x_2 - x_1 = \lambda/2$,

$$\begin{aligned}A_{tot} &= \left|2A \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right)\right| = \left|2A \cos\left(\frac{k\lambda}{4}\right)\right| \\ &= \left|2A \cos\left(\frac{2\pi\lambda}{4\lambda}\right)\right| = \left|2A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0.\end{aligned}$$

- b) Si los altavoces están desfasados en π rad,

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= A \sin(kx_1 - \omega t) \\ \Delta x_2 &= A \sin(kx_2 - \omega t + \pi)\end{aligned}$$

y la interferencia es

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t + \pi) \\ &= 2A \sin\left(\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1) + \pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x_2 - x_1 = \lambda/2$, la amplitud total en P es

$$\begin{aligned} A_{tot} &= \left| 2A \cos \left(\frac{k(x_2 - x_1) + \pi}{2} \right) \right| = \left| 2A \cos \left(\frac{k\lambda}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right| \\ &= \left| 2A \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| = 2A. \end{aligned}$$

13. Sabemos que en el punto medio entre dos altavoces interfieren sendas ondas sonoras de forma constructiva. Además, ambas ondas son armónicas con la misma longitud de onda $\lambda = 1$ m. Calcula la distancia más próxima a un punto donde se produzca una interferencia destructiva.

Sol. Supongamos que los altavoces están a distancia d entre sí. Las ondas de desplazamiento desde cada altavoz son

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= A \sin(kx - \omega t), \\ \Delta x_2 &= A \sin(kx + \omega t), \end{aligned}$$

donde hemos tomado el eje X sobre la recta que une los dos altavoces, siendo el origen uno de ellos (el de subíndice 1) y hemos tenido en cuenta que las ondas tienen sentidos de propagación contrarios. La interferencia resulta

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t),$$

por lo que la amplitud de interferencia es

$$A_{tot}(x) = |2A \sin(kx)|.$$

Si la interferencia es constructiva a media distancia entre los altavoces, es decir, con $x = d/2$, se ha de tener

$$A_{tot}(d/2) = \left| 2A \sin \left(\frac{kd}{2} \right) \right| = 2A$$

Esto se obtiene si

$$\sin \left(\frac{kd}{2} \right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{kd}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad kd = (2n + 1)\pi.$$

donde n es un número entero.

Si nos acercamos al primer altavoz una distancia Δx , tendremos $x = d/2 - \Delta x$. La amplitud de interferencia en ese punto es

$$A_{tot}(d/2 - \Delta x) = \left| 2A \sin \left(\frac{kd}{2} - k\Delta x \right) \right|.$$

Para que la interferencia sea destructiva,

$$A_{tot}(d/2 - \Delta x) = 0 \Rightarrow \frac{kd}{2} - k\Delta x = n\pi.$$

Dado que teníamos que $kd = (2n + 1)\pi$, la ecuación anterior resulta

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = n\pi \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m.}$$

El resultado sería el mismo si nos hubiéramos acercado al otro altavoz. Así, la distancia del centro de los altavoces a los dos puntos más cercanos donde se produce interferencia destructiva es 0,25 m.

Capítulo 5

Acústica

Con este tema completamos nuestro estudio de las ondas. En primer lugar, definimos la intensidad y proporcionamos expresiones para ella en los casos de ondas armónicas y esféricas. En segundo lugar, introducimos el concepto de impedancia acústica, lo que nos permite enunciar las leyes de transmisión y reflexión de una onda sonora al cambiar de medio. Finalmente, estudiamos el nivel sonoro y la sensación auditiva.

5.1. Intensidad de una onda de sonido armónica

En una onda mecánica (como las ondas de sonido) no hay flujo neto de materia; lo que se propaga es el estado del movimiento y, por tanto, la energía. Para estudiar el flujo de energía se define la *intensidad* I de la onda como la cantidad de energía que pasa, en la unidad de tiempo, por la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda. La unidad de intensidad de la onda en el SI es 1 W/m^2 .

Supongamos que el medio es la zona cilíndrica de la figura 5.1. Consideremos cuánta energía de las partículas del medio ha atravesado la superficie circular pintada a la derecha, de área S , en un intervalo de tiempo Δt . En ese tiempo, sólo la perturbación de las partículas situadas a una distancia menor que $v \Delta t$ ha podido llegar a la superficie de la derecha, donde v es la velocidad de fase de la onda. El número de estas partículas es igual al

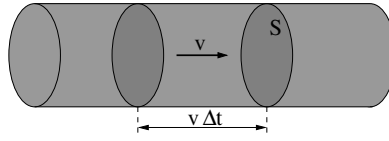


Figura 5.1: Medio cilíndrico por el que se propaga una onda con velocidad v .

número n de partículas por unidad de volumen del medio multiplicado por el volumen entre las superficies circulares pintadas en la figura, esto es,

$$N = n(Sv \Delta t).$$

Si cada una de estas partículas tiene una energía E_{part} que puede ser transportada, la energía total que atraviesa la superficie circular de la derecha es

$$E = NE_{part} = n(Sv \Delta t)E_{part}.$$

La intensidad de la onda es esta energía dividida por el área S de la superficie circular y por el intervalo de tiempo Δt en que hemos calculado el flujo de energía, es decir,

$$I = nvE_{part}.$$

Para continuar, supongamos que estamos en el caso de una *onda armónica*. Cada partícula realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y su energía es

$$E_{part} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2.$$

Con esto, la intensidad resulta

$$I = \frac{1}{2} nm\omega^2 A^2 v.$$

Como n es el número de partículas del medio por unidad de volumen y m es la masa de cada partícula, el producto nm es igual a la densidad de masa ρ_0 del medio sin perturbar (en ausencia de sonido). Llegamos así al resultado

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v. \quad (5.1)$$

Ejemplo 5.1.1 Calculemos la intensidad sonora cerca de un altavoz, admitiendo que el sonido producido lo podemos aproximar por una onda armónica. Las moléculas oscilan con una amplitud de 10^{-2} mm y una frecuencia de 1 kHz. Tomemos la densidad del aire sin perturbar $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$ y la velocidad del sonido $v = 340 \text{ m/s}$.

Sol. Para usar la fórmula (5.1) de la intensidad, calculemos primero la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^3 = 2000\pi \text{ rad/s}.$$

Así,

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot (2000\pi)^2 \cdot 10^{-10} \cdot 340 \simeq 0,872 \text{ W/m}^2.$$

En la práctica, es muy común que exista un foco de perturbación a partir del cual la onda se propaga en todas las direcciones. Si el medio es isótropo, los frentes de onda son entonces superficies esféricas con centro en el foco, y las ondas generadas se llaman *ondas esféricas*. En ausencia de amortiguamiento, cada frente de onda recibe la misma energía y, por tanto, también la misma potencia P , que es la energía recibida por unidad de tiempo,

$$P = \frac{E}{t}.$$

Dado que la intensidad de la onda es la energía recibida en cada frente por unidad de tiempo y por unidad de superficie, es también la potencia por unidad de superficie,

$$I = \frac{P}{S}.$$

Como la potencia P es igual en todos los frentes de onda (si no hay amortiguamiento), resulta que la intensidad en un frente a distancia r del foco es

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad (5.2)$$

de manera que va decreciendo con la distancia al cuadrado en las ondas esféricas. Hemos visto antes que la intensidad era proporcional al cuadrado de la amplitud A de la onda, así que esto implica que la propia amplitud en una onda esférica ha de decrecer con la distancia al foco en la forma $A(r) = \text{constante}/r$.

Ejemplo 5.1.2 La fórmula (5.2) la podemos usar también para calcular la potencia de una onda esférica, conocida la intensidad a una distancia conocida del foco. Supongamos, por ejemplo, un foco puntual emitiendo ondas sonoras de modo que, a 10 m de distancia, la intensidad del sonido es de $2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$. Calculemos la potencia P que emite el foco, así como la intensidad a 20 m del foco.

Sol. Usando el resultado (5.2) con los datos proporcionados:

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \simeq 2,51 \text{ W}.$$

Con este valor conocido de P podemos calcular la intensidad en cualquier otro punto del espacio, aunque no es necesario calcular de forma explícita su valor. Para un punto que está a $r_2 = 20 \text{ m}$ del foco, la intensidad es

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1 = \frac{10^2}{20^2} 2 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2.$$

En la segunda igualdad hemos usado que $P = 4\pi r_1^2 I_1$. De forma alternativa, podríamos haber sustituido el valor de P , ya calculado, y el de r_2 tras la primera igualdad.

5.2. Impedancia acústica y transmisión del sonido

Hemos visto que la *intensidad* de las ondas sonoras armónicas está dada por

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v,$$

donde A es la amplitud de la onda de desplazamiento. Para un fluido, donde la velocidad del sonido es $v = \sqrt{\kappa/\rho_0}$, esto se puede escribir como

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \sqrt{\rho_0 \kappa},$$

y para una varilla sólida, con $v = \sqrt{E/\rho_0}$, tenemos

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \sqrt{\rho_0 E}.$$

El sonido, como todo movimiento oscilatorio, es absorbido por el medio, que transforma la energía perdida por la onda en energía interna a través de calor, disminuyendo la intensidad sonora. En general, la absorción crece con la frecuencia y decrece con la densidad del medio. Así, los gases absorben el sonido más que los líquidos, y éstos más que los sólidos. Vamos a ignorar en lo que sigue esta absorción.

Veamos cómo escribir la intensidad del sonido de otra forma, más compacta y útil para analizar el comportamiento del sonido al cambiar de medio. Para ello, nos centramos en la propagación en un medio fluido, aunque el resultado será válido también para sólidos. Vimos en el tema anterior que una onda sonora armónica plana de desplazamiento se escribía como

$$\Delta x(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0).$$

La velocidad de vibración de las partículas del medio debido a esta onda es

$$v_{vib}(x, t) = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t + \phi_0),$$

cuya amplitud es

$$v_{vib,max} = A\omega.$$

Por otro lado, como la velocidad del sonido en el fluido es $v = \sqrt{\kappa/\rho_0}$, podemos despejar κ y obtener

$$\kappa = \rho_0 v^2.$$

También vimos en el tema anterior que la amplitud de la onda de presión acústica estaba dada por

$$\Delta p_{max} = \kappa A k.$$

Con las expresiones anteriores para κ y $v_{vib,max}$, llegamos a

$$\Delta p_{max} = \kappa A k = A \rho_0 v^2 k = A \rho_0 v \omega = \rho_0 v v_{vib,max}.$$

Al producto $\rho_0 v$ se le llama *impedancia acústica* del medio $Z = \rho_0 v$, y su unidad SI es $1 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$. Usando la impedancia, la expresión de la amplitud de presión acústica se escribe

$$\Delta p_{max} = Z v_{vib,max}.$$

Esto es muy similar a la fórmula de la ley de Ohm¹ de los circuitos eléctricos: Δp_{max} juega el papel de diferencia de potencial, $v_{vib,max}$ hace de corriente eléctrica, y Z sería la resistencia. Además, la impedancia Z incluye toda la información del medio, mientras que la propiedades de la onda están incluida en $v_{vib,max}$.

Finalmente, con las amplitudes de velocidad de vibración y presión acústica y la impedancia, podemos dar la intensidad de las ondas sonoras planas como

$$I = \frac{1}{2} v_{vib,max} \Delta p_{max} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_{max})^2}{Z} = \frac{1}{2} Z v_{vib,max}^2. \quad (5.3)$$

Ejemplo 5.2.1 Podemos volver a resolver la cuestión planteada en el ejemplo 5.1.1, pero ahora usando la fórmula (5.3) para la intensidad sonora.

Sol. Por una parte, la densidad del aire sin perturbar y la velocidad del sonido en el aire nos permiten calcular la impedancia:

$$Z = \rho_0 v = 1,3 \cdot 340 = 442 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}).$$

Por otra parte, a partir de la amplitud de la onda de desplazamiento y de la frecuencia de la onda, calculamos la velocidad de vibración máxima:

$$v_{vib,max} = A\omega = 2\pi Af = 2\pi \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 = 0,02\pi \simeq 0,0628 \text{ m/s}.$$

Finalmente, usando la ecuación (5.3), la intensidad sonora resulta

$$I = \frac{1}{2} Z v_{vib,max}^2 \simeq \frac{1}{2} 442 \cdot (0,0628)^2 \simeq 0,872 \text{ W/m}^2.$$

La impedancia acústica juega un papel muy importante en la *reflexión y transmisión del sonido* entre dos medios. Imaginemos que una onda de sonido llega a la superficie de separación entre dos medios diferentes (el aire y el agua o el aire y una pared). Parte de la energía de la onda que incide en la superficie se refleja hacia el medio desde el que vino y otra parte se transmite a través de la superficie y pasa al segundo medio.

¹Como veremos en capítulos siguientes, la ley de Ohm establece una relación lineal entre la diferencia de potencial V entre los extremos de una resistencia de valor R y la intensidad I que la atraviesa: $V = RI$.

Para que haya una buena transmisión es necesario que las impedancias de los medios contiguos sean parecidas, mientras que cuando son muy diferentes la mayor parte de la energía es devuelta por reflexión. De hecho, el *factor de transmisión*, es decir, la intensidad de la onda transmitida I_t del medio 1 al medio 2 dividida por la intensidad de la onda incidente I_i , se puede escribir como

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4r}{(r+1)^2}, \quad (5.4)$$

siendo $r = Z_2/Z_1$ el cociente de impedancias. Por ejemplo, cuando una onda sonora procedente del aire entra en el agua, $r = 3630$ y el factor de transmisión resulta $I_t/I_i \simeq 0,001$, por lo que sólo del orden del 0,1 % de la energía incidente procedente del aire entra en el agua. El otro 99,9 % es reflejado de nuevo hacia el aire, lo que viene expresado mediante el *factor de reflexión*

$$\frac{I_r}{I_i} = 1 - \frac{I_t}{I_i} = \frac{(r-1)^2}{(r+1)^2}. \quad (5.5)$$

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la impedancia acústica.

Material	Z (kg/(m ² · s))
Acero	$4,6 \cdot 10^7$
Hormigón	$7 \cdot 10^6$
Ladrillo	$5 \cdot 10^6$
Agua (20 °C)	$1,5 \cdot 10^6$
Madera	$4 \cdot 10^5$
Aire (20 °C)	408

Ejemplo 5.2.2 Calculemos la intensidad sonora que se transmite a la pared de una vivienda, con impedancia de 10^6 kg/(m² · s), en la que hay música con una intensidad de $5 \cdot 10^{-3}$ W/m². Para ello, tomemos la impedancia del aire como 400 kg/(m² · s).

Sol. El cociente de impedancias acústicas de la pared y el aire es

$$r = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{10^6}{400} = 2500.$$

Así, la intensidad que se transmite a través de la superficie de la pared

es

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{I_i} &= \frac{4r}{(r+1)^2} = \frac{4 \cdot 2500}{(2500+1)^2} \simeq 1,50 \cdot 10^{-3} \\ \Rightarrow I_t &\simeq 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \simeq 7,99 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2. \end{aligned}$$

5.3. Nivel sonoro y sensación auditiva

Para crear una escala que mida el nivel de intensidad del sonido es necesario tomar un valor que sirva de referencia. Este valor es

$$I_o = 10^{-12} \text{ W/m}^2, \quad (5.6)$$

que corresponde al umbral mínimo audible de una persona media para un sonido de 1000 Hz. Para esa misma persona, el umbral máximo audible a esa frecuencia es de 1 W/m^2 . Así, si queremos establecer una escala de sonidos audibles para una persona basada en el cociente I/I_o , esta escala variaría entre 1 y 10^{12} . No es práctico usar representaciones gráficas de escalas tan enormes.

Para tener una escala más tratable, se considera una variación menor mediante el uso de logaritmos en base 10. Se define el *nivel sonoro* o *nivel de intensidad del sonido* L como

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_o} \right), \quad (5.7)$$

cuya unidad es el *decibelio* (dB), y que varía para los sonidos audibles entre 0 y 120 dB. En el caso de ondas sonoras armónicas, esta expresión puede escribirse fácilmente también en función de la amplitud de desplazamiento o de la amplitud de presión acústica si es necesario.

Ejemplo 5.3.1 Reconsideremos el ejemplo 5.1.2 y calculemos el nivel sonoro a 10 m y a 20 m del foco puntual.

Sol. A 10 m del foco la intensidad de la onda es de $I_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$, por lo que el nivel sonoro es

$$L_1 = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} \right) = 10 \cdot (9 - \log 2) \simeq 93,0 \text{ dB}.$$

Para obtener L_2 , el nivel sonoro a 20 m, podemos proceder como antes

utilizando la intensidad a esta distancia I_2 . Sin embargo, lo haremos de otra forma. Como I_1 e I_2 tienen la misma potencia asociada P , se cumple

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1.$$

Así, utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} L_2 &= 10 \log \left(\frac{I_2}{I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{r_1^2 I_1}{r_2^2 I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_o} \right) + 10 \log \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \\ &= L_1 + 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = L_1 + 20 \log \left(\frac{1}{2} \right) = L_1 - 20 \log 2 \\ &\simeq 87,0 \text{ dB}. \end{aligned}$$

A diferencia de la intensidad física del sonido dada por L , la sensación fisiológica que nos produce una onda sonora es subjetiva. Llamamos *intensidad fisiológica* F a la sensación que nos permite decir si un sonido es más o menos fuerte que otro.

La intensidad fisiológica depende, claro está, de la intensidad física, pero también de la frecuencia del sonido percibido. El mínimo de intensidad sonora capaz de producir sensación auditiva se denomina *umbral mínimo de audición*, es función de la frecuencia y su valor mínimo aparece para 4000 Hz, frecuencia a la cual el oído presenta sensibilidad máxima. Aumentando la intensidad sonora se llega a producir una sensación auditiva dolorosa, y se denomina *umbral máximo de audición* o *umbral de sensación dolorosa* a la mínima intensidad capaz de producirla, que es también función de la frecuencia.

En la figura 5.2 se muestran las *curvas de Fletcher y Munson*, en las que todos los puntos de la misma curva se perciben con la misma sensación auditiva, por lo que todos los puntos de la misma línea azul de la figura tienen el mismo valor de la intensidad fisiológica aunque tengan valor diferente de L .

La unidad de sensación fisiológica se denomina *fonio* y el nivel de sensación auditiva se establece mediante la expresión

$$F = K \log \left(\frac{I}{I_o} \right). \quad (5.8)$$

Para una frecuencia de 1000 Hz, el valor de la constante en esa expresión es $K = 10$, de manera que, a esa frecuencia, el número de fonios y el de

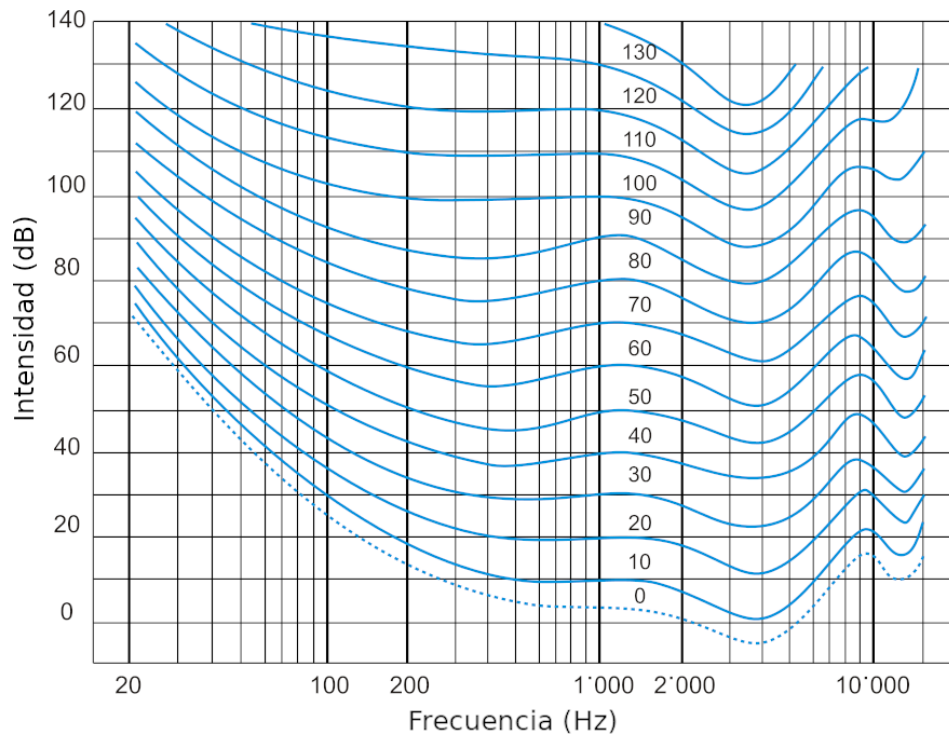


Figura 5.2: Curvas de Fletcher y Munson.

decibelios coinciden. Para otras frecuencias, el valor de K se puede extraer aproximadamente de las curvas de Fletcher y Munson. Por ejemplo, un sonido con $L = 20$ dB tiene $F = 20$ fonios a una frecuencia de 1000 Hz, pero un sonido de $L = 20$ dB tiene aproximadamente $F = 10$ fonios a una frecuencia de 300 Hz, por lo que la sensación sonora es menor en el segundo caso aunque la intensidad física del sonido sea la misma en ambos.

5.4. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v$ ρ_0 ω A v	Intensidad de una onda de sonido armónica Densidad de masa del medio sin perturbar Frecuencia angular de la onda Amplitud de la onda Velocidad de la onda	(5.1)
$I = \frac{P}{4\pi r^2}$ P r	Intensidad de una onda esférica Potencia emitida por el foco Distancia al foco	(5.2)
$I = \frac{1}{2} Z v_{vib,max}^2$ $Z = \rho_0 v$ $v_{vib,max} = A\omega$	Intensidad de una onda de sonido armónica Impedancia acústica Velocidad máxima de vibración de las partículas del medio	(5.3)
$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4r}{(r+1)^2}$ I_t I_i $r = Z_2/Z_1$	Ley de transmisión Intensidad de la onda transmitida Intensidad de la onda incidente Cociente de impedancias	(5.4)
$\frac{I_r}{I_i} = 1 - \frac{I_t}{I_i} = \frac{(r-1)^2}{(r+1)^2}$	Ley de reflexión	(5.5)
$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_o} \right)$	Nivel sonoro	(5.7)
$I_o = 10^{-12} \text{ W/m}^2$	Umbral sonoro (mínimo)	(5.6)
$F = K \log \left(\frac{I}{I_o} \right)$ K	Nivel de sensación auditiva Constante dada por las curvas de Fletcher y Munson	(5.8)

5.5. Problemas resueltos

1. Una onda sonora armónica se propaga por un fluido con una impedancia acústica de $350 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$. Calcula la amplitud de la onda de presión acústica sabiendo que la amplitud de la onda de desplazamiento es $3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ y que la frecuencia es de 1 kHz .

Sol. Dado que tenemos la impedancia acústica, conviene usar la fórmula

$$\Delta p_{max} = Z v_{vib,max}, \quad (5.9)$$

que nos relaciona la amplitud de la onda de presión con la velocidad de vibración máxima de las moléculas del fluido. Necesitamos esta última cantidad, que podemos obtener así:

$$v_{vib,max} = \omega A = 2\pi f A = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \simeq 0,188 \text{ m/s}.$$

Poniendo este resultado en la primera de nuestras ecuaciones, tenemos

$$\Delta p_{max} = Z v_{vib,max} \simeq 350 \cdot 0,188 \simeq 66,0 \text{ Pa}.$$

2. Una onda sonora se propaga en un fluido con una impedancia acústica de $500 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$. La velocidad de la onda en este medio es de 360 m/s y la amplitud de la onda de presión acústica es de 43 Pa . Calcula

- a) La densidad ρ_0 , del fluido sin perturbar.
- b) La velocidad máxima de vibración de las moléculas del fluido, $v_{vib,max}$.

Sol.

- a) La densidad del fluido sin perturbar se puede obtener a partir de la impedancia acústica y la velocidad de la onda:

$$Z = \rho_0 v \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{Z}{v} = \frac{500}{360} \simeq 1,39 \text{ kg/m}^3.$$

- b) La velocidad máxima de vibración resulta

$$\Delta p_{max} = Z v_{vib,max} \quad \Rightarrow \quad v_{vib,max} = \frac{\Delta p_{max}}{Z} = \frac{43}{500} = 0,086 \text{ m/s}.$$

3. Una onda sonora armónica se propaga a lo largo de una varilla produciendo una velocidad máxima de vibración de las partículas de la varilla de 5 mm/s y una intensidad sonora de 150 W/m². Teniendo en cuenta que la varilla tiene una sección circular de radio 10 mm, calcula:
- La amplitud de la onda de presión acústica.
 - La impedancia acústica.
 - La potencia sonora.

Sol.

- a) Usando la relación entre intensidad del sonido, amplitud de velocidad de vibración y amplitud de presión acústica, tenemos

$$I = \frac{1}{2} v_{vib,max} \Delta p_{max} \Rightarrow \Delta p_{max} = \frac{2I}{v_{vib,max}} = \frac{2 \cdot 150}{5 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

- b) Para la impedancia acústica, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta p_{max} &= Z v_{vib,max} \\ \Rightarrow Z &= \frac{\Delta p_{max}}{v_{vib,max}} = \frac{6 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}). \end{aligned}$$

- c) La potencia se calcula por su relación con la intensidad:

$$I = \frac{P}{S} \Rightarrow P = IS = I(\pi r^2) = 150 \cdot \pi \cdot (0,01)^2 \simeq 4,71 \cdot 10^{-2} \text{ W.}$$

4. Admitamos que un altavoz emite una onda sonora armónica con una frecuencia de 4 kHz, lo que produce una vibración de las moléculas del aire de amplitud 10 μm. Teniendo en cuenta que la densidad del aire sin perturbar es 1,29 kg/m³, la velocidad del sonido en el aire es $v = 340$ m/s y que la membrana vibrante del altavoz tiene un área de 100 cm², calcula
- La impedancia acústica del aire.
 - La amplitud de la onda de presión acústica.
 - La intensidad sonora.
 - La potencia del sonido.

Sol.

a) La impedancia acústica del aire es

$$Z = \rho_0 v = 1,29 \cdot 340 \simeq 439 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}).$$

b) La amplitud de presión acústica está relacionada con la de desplazamiento mediante

$$\begin{aligned} \Delta p_{max} &= \kappa A k = \rho_0 v^2 A \frac{\omega}{v} = 2\pi f \rho_0 v A \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 1,29 \cdot 340 \cdot 10^{-5} \simeq 112 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

c) La intensidad del sonido puede calcularse con la expresión

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_{max})^2}{Z} \simeq \frac{112^2}{2 \cdot 439} \simeq 28,5 \text{ W}/\text{m}^2.$$

d) Utilizando la relación entre la potencia del sonido y el área del diafragma,

$$I = \frac{P}{S} \Rightarrow P = IS \simeq 28,5 \cdot 100 \cdot 10^{-4} = 0,285 \text{ W}.$$

5. Una fuente de 5 W de potencia genera una onda sonora armónica que se propaga a 5000 m/s por una barra de 10 cm² de sección. Teniendo en cuenta que la barra tiene una densidad de 2500 kg/m³, calcula la amplitud de la onda de presión acústica.

Sol. La intensidad de la onda puede calcularse a partir de la potencia y el área de la barra:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{5}{10 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^3 \text{ W}/\text{m}^2.$$

La impedancia acústica de la barra vale

$$Z = \rho_0 v = 2500 \cdot 5000 = 1,25 \cdot 10^7 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}).$$

Usando la relación entre intensidad de la onda y amplitud de presión acústica, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_{max})^2}{Z} \\ \Rightarrow \Delta p_{max} &= \sqrt{2IZ} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^7} \simeq 3,54 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

6. Una onda sonora de intensidad I_i se propaga por una varilla, con impedancia Z_1 y densidad ρ_1 , hasta que incide en la frontera de separación con otra varilla, de igual grosor pero impedancia Z_2 y densidad ρ_2 . En este momento, la mitad de la intensidad de la onda se transmite y la otra mitad se refleja. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido en la primera varilla es el doble de la velocidad del sonido en la segunda, calcula los cocientes Z_2/Z_1 y ρ_2/ρ_1 .

Sol. El cociente entre la intensidad de sonido reflejada y la incidente en la superficie de separación de dos medios es

$$\frac{I_r}{I_i} = 1 - \frac{I_t}{I_i} = \frac{(r-1)^2}{(r+1)^2},$$

donde $r = Z_2/Z_1$ es el cociente de impedancias acústicas. En nuestro caso, $I_r/I_i = 1/2$, por lo que

$$\frac{1}{2} = \frac{(r-1)^2}{(r+1)^2} \Rightarrow \frac{r-1}{r+1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r_{\pm} = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2} \mp 1},$$

con

$$r_+ \simeq 5,83; \quad r_- \simeq 0,172.$$

Obtenemos dos valores posibles del cociente de impedancias. Ambos son físicamente posibles. A partir de la definición de impedancia acústica, tenemos

$$r = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} = \frac{\rho_2}{2\rho_1} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2r.$$

Como tenemos dos posibles valores de r , también tenemos sendos valores del cociente de densidades:

$$\begin{aligned} r_+ \simeq 5,83 &\rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2r_+ \simeq 11,7; \\ r_- \simeq 0,172 &\rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2r_- \simeq 0,343. \end{aligned}$$

7. Durante la demolición de un edificio, se produce una detonación controlada. Un observador a una distancia de 300 m de la explosión capta una intensidad de $0,10 \text{ W/m}^2$. Determina:

- (a) El nivel sonoro que capta un segundo observador a 50 m de la explosión.

- (b) La distancia a la explosión a la que debe colocarse el segundo observador para captar 10 dB más que el primero.

Sol.

- (a) La potencia P del sonido viene dado por

$$I_{300} = \frac{P}{4\pi d_1^2} \Rightarrow P = 4\pi d_1^2 I_{300},$$

donde $d_1 = 300$ m e $I_{300} = 0,10$ W/m². El nivel sonoro L_{50} a 50 m será

$$L_{50} = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{50}}{I_o} \right),$$

donde $I_o = 10^{-12}$ W/m² es la intensidad umbral e

$$I_{50} = \frac{P}{4\pi d_2^2},$$

con $d_2 = 50$ m. Así, usando la expresión de P anterior,

$$L_{50} = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{300} d_1^2}{I_o d_2^2} \right) \simeq 10 \log_{10} \left(\frac{0,1}{10^{-12}} \frac{300^2}{50^2} \right) \simeq 126 \text{ dB}.$$

- (b) Si d_3 es la distancia pedida, debe ser

$$L_{d_3} - L_{300} = 10 \Rightarrow 10 \log_{10} \left(\frac{I_{d_3}}{I_{300}} \right) = 10.$$

Usando la relación entre I y P :

$$10 \log_{10} \left(\frac{300^2}{d_3^2} \right) = 10 \Rightarrow d_3 = \frac{300}{\sqrt{10}} \simeq 94,9 \text{ m}.$$

8. Dos focos puntuales tienen, cada uno, una potencia de 1 mW. Si los focos emiten desde el mismo punto sendas ondas en fase, calcula el nivel sonoro a una distancia de 10 m.

Sol. La intensidad del sonido a 10 m debida sólo a un foco es

$$I_1 = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^2} \simeq 7,96 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2.$$

Si dos focos emiten desde el mismo lugar, con la misma potencia y en fase, la intensidad del sonido a 10 m es

$$I = 2 I_1 \simeq 1,59 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

El nivel sonoro es

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_o} \right) \simeq 10 \cdot \log \left(\frac{1,59 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \right) \simeq 62,0 \text{ dB}.$$

9. Calcula la potencia con la que habla una persona, supuesta fuente de sonido puntual, a otra a 2 m de distancia. Para ello, ten en cuenta que la segunda persona percibe un nivel sonoro de 59 dB.

Sol. Primero, calculemos la intensidad I a partir del nivel sonoro L :

$$\begin{aligned} L &= 10 \log \left(\frac{I}{I_o} \right) \\ \Rightarrow I &= I_o 10^{L/10} = 10^{-12} \cdot 10^{59/10} = 10^{-6,1} \simeq 7,94 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2. \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener la potencia de la intensidad, asumiendo una emisión de fuente puntual:

$$I = \frac{P}{S} \quad \Rightarrow \quad P = 4\pi r^2 I \simeq 4\pi \cdot 2^2 \cdot 7,94 \cdot 10^{-7} \simeq 3,99 \cdot 10^{-5} \text{ W}.$$

10. Se sabe que una fuente puntual produce 10 dB de nivel sonoro a 25 m.

- ¿Cuál es el nivel sonoro a 10 m de la fuente?
- ¿A qué distancia el nivel sonoro es el menor audible?

Sol.

- Calculemos primero la intensidad a 25 m:

$$\begin{aligned} L_{25} &= 10 \log \left(\frac{I_{25}}{I_o} \right) \\ \Rightarrow I_{25} &= I_o 10^{L_{25}/10} = 10^{-12} \cdot 10^{10/10} = 10^{-11} \text{ W/m}^2. \end{aligned}$$

Con esto, la potencia del sonido resulta

$$I_{25} = \frac{P}{S} \quad \Rightarrow \quad P = 4\pi r^2 I_{25} = 4\pi \cdot 25^2 \cdot 10^{-11} = 25\pi \cdot 10^{-9} \text{ W}.$$

Por tanto, la intensidad a 10 m es

$$I_{10} = \frac{P}{S} = \frac{25\pi \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^2} = 6,25 \cdot 10^{-11} \text{ W/m}^2$$

y, finalmente, podemos calcular el nivel sonoro

$$L_{10} = 10 \log \left(\frac{I_{10}}{I_o} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{6,25 \cdot 10^{-11}}{10^{-12}} \right) \simeq 18,0 \text{ dB.}$$

- b) El sonido deja de percibirse por una persona media cuando la intensidad es $I = I_o = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. La distancia del foco d a la que esto ocurre viene dada por

$$I_o = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{25\pi \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^{-12}}} \simeq 79,1 \text{ m.}$$

11. A un metro de una máquina, supuesta fuente de sonido puntual, percibimos un nivel sonoro de 60 dB. ¿Cuánto debemos alejarnos para que el nivel se reduzca a 30 dB?

Sol. Esto se puede resolver mediante un método similar al ejercicio anterior, pero vamos a hacerlo de otra manera, algo más rápida. La diferencia entre el nivel sonoro a 1 m y el nivel sonoro a la distancia d , donde se perciben 30 dB, es

$$\begin{aligned} L_1 - L_d &= 60 \text{ dB} - 30 \text{ dB} = 30 \text{ dB} \\ &= 10 \log \left(\frac{I_1}{I_o} \right) - 10 \log \left(\frac{I_d}{I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_d} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que la fuente es puntual,

$$\frac{I_1}{I_d} = \frac{P/(4\pi 1^2)}{P/(4\pi d^2)} = d^2.$$

Poniendo todo en la misma ecuación, llegamos a

$$30 = 10 \log d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 10^3 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{10^3} \simeq 31,6 \text{ m.}$$

Como ya estamos a 1 m de la máquina, tendremos que alejarnos 30,6 m.

12. El nivel de intensidad sonora cerca de un avión es de 90 dB. Aproximando el ruido del avión por una onda la onda acústica armónica de frecuencia de 4 kHz, calcula el desplazamiento máximo de las moléculas del aire. Toma la densidad del aire sin perturbar como $1,3 \text{ kg/m}^3$ y la velocidad del sonido como 340 m/s.

Sol. A partir del nivel de intensidad sonora, podemos calcular I :

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_o} \right) \Rightarrow I = I_o 10^{L/10} = 10^{-12} \cdot 10^{90/10} = 10^{-3} \text{ W/m}^2.$$

Con esto, la amplitud de desplazamiento A de la onda armónica resulta

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2I}{(2\pi f)^2 \rho_0 v}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{(2\pi \cdot 4000)^2 \cdot 1,3 \cdot 340}} \simeq 8,46 \cdot 10^{-8} \text{ m.}$$

13. Calcula la pérdida de nivel sonoro cuando una onda se transmite de un medio a otro con el doble de impedancia.

Sol. El dato que nos da el ejercicio es que hay dos medios en contacto cuyas impedancias acústicas cumplen

$$r = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Por tanto, la relación entre la intensidad incidente en el medio 1 y la transmitida al medio 2 es

$$I_t = I_i \frac{4r}{(r+1)^2} = I_i \cdot \frac{4 \cdot 2}{(2+1)^2} = \frac{8I_i}{9} \Rightarrow \frac{I_i}{I_t} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{9}{8}.$$

La pérdida de nivel sonoro en la transmisión es

$$L_1 - L_2 = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_o} \right) - 10 \log \left(\frac{I_2}{I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

$$= 10 \log \left(\frac{9}{8} \right) \simeq 0,512 \text{ dB.}$$

14. El sonido producido en la habitación de una casa, con 50 dB de nivel sonoro, penetra una de sus paredes y es percibido en la habitación contigua con un nivel de 35 dB. ¿Qué porcentaje de la intensidad absorbe

la pared?

Sol. La pérdida de nivel sonoro es

$$\begin{aligned}L_2 - L_1 &= 35 \text{ dB} - 50 \text{ dB} = -15 \text{ dB} \\ &= 10 \log \left(\frac{I_2}{I_o} \right) - 10 \log \left(\frac{I_1}{I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right).\end{aligned}$$

Despejando I_2/I_1 , tenemos

$$-15 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^{-15/10} \simeq 0,0316 = 3,16 \%$$

Por tanto, el porcentaje absorbido por la pared es de 96,8 %.

Capítulo 6

Carga y corriente eléctrica

En este tema estudiamos el campo electrostático y algunas magnitudes y leyes relacionadas. En la primera parte, describimos la interacción electrostática entre partículas cargadas y caracterizamos el comportamiento conductor y dieléctrico de los materiales. Tras definir el campo eléctrico, consideramos su expresión para el caso de un condensador plano. A partir de la energía potencial electrostática, definimos el potencial eléctrico y deducimos una expresión para obtenerlo a partir del campo eléctrico. Esto nos permite, más tarde, deducir una expresión para la capacidad del condensador plano. Esta primera parte termina con un estudio de la asociación de condensadores. En la segunda parte del tema estudiamos la intensidad de corriente, la resistencia eléctrica en materiales óhmicos (su dependencia con la longitud, sección del conductor y la temperatura), las fuentes de fuerza electromotriz y las potencias suministradas por las fuentes y disipadas por las resistencias.

6.1. Carga eléctrica

Los cuerpos poseen una propiedad llamada *carga eléctrica*, que es una magnitud escalar que puede tomar valores positivos o negativos. La unidad SI de carga es el *culombio* (C). También hay cuerpos que poseen la misma cantidad de carga positiva y negativa; nos referimos a ellos como eléctricamente

neutros. Experimentalmente se han observado las siguientes propiedades de la carga eléctrica:

- *Interacción entre cargas*. Las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo opuesto se atraen. La intensidad de estas interacciones decrece con la distancia entre las cargas.
- *Conservación de la carga*. La carga eléctrica es una propiedad de los cuerpos materiales. Sin soporte material no hay carga y el movimiento de la carga está ligado al movimiento del soporte material. A menudo, los cuerpos cargados entran en contacto y la carga se transfiere de un cuerpo a otro. En todos los casos se cumple que la carga neta se conserva.

En los núcleos de los átomos que forman la materia ordinaria hay protones y neutrones. Los neutrones carecen de carga eléctrica pero los protones poseen una carga positiva $q_p = +e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. En torno al núcleo existe cierto número de electrones, cada uno con una carga negativa $q_e = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Dado que la carga de un electrón es de igual magnitud pero de signo opuesto a la de un protón, un átomo que posea tantos protones como electrones será neutro. Pero el número de electrones de un átomo puede variar, bien porque los pierda, en cuyo caso el átomo se convierte en un *ion positivo* o *cación*, o porque los gane, y el átomo se convierte en un *ion negativo* o *anión*. En ambos casos, la carga neta de un átomo será siempre igual a un número entero de veces la carga fundamental $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Para tener una noción sobre lo grande o pequeña que es cierta cantidad de carga, son útiles los siguientes valores típicos:

- Al frotar un cuerpo con otro, la carga generada en cada uno de ellos es del orden de nanoculombios (10^{-9} C).
- En ciertos dispositivos eléctricos llamados *condensadores*, las cargas típicas en sus placas van desde los picoculombios (10^{-12} C) hasta los culombios.

Conductores y dieléctricos

Se llama *conductividad eléctrica* de un material a la habilidad que tiene para permitir el movimiento de carga eléctrica en su interior. Los materiales *conductores* poseen una gran cantidad de *electrones libres* y tales electrones se

mueven fácilmente en respuesta a cualquier interacción eléctrica del material. A su vez, los materiales *aislantes* o *dieléctricos* casi no disponen de electrones libres, por lo que las interacciones eléctricas sobre el material no generan movimiento neto de carga en su interior.

El diferente comportamiento de conductores y dieléctricos es consecuencia de la *Física Cuántica*. En los átomos, los electrones se mueven alrededor del núcleo, que está cargado positivamente, situados en diferentes *capas* u *orbitales*. Los electrones de las capas más alejadas del núcleo están débilmente enlazados a él, y es el detalle de este tipo de enlace el que determina las propiedades conductoras del material.

En los *metales*, los electrones de las capas más externas están tan débilmente enlazados a los núcleos que constituyen un mar llamado *banda de conducción* y se desplazan casi libremente a través del metal, por lo que se les llama *electrones libres*. La existencia de muchos electrones libres en los metales explica que éstos sean excelentes conductores.

Por el contrario, los electrones de los materiales dieléctricos participan activamente en el *enlace atómico* iónico o covalente, de manera que están fuertemente ligados a sus átomos o moléculas. Se requiere mucha energía para liberar electrones que puedan moverse por el interior del material, de modo que su conductividad es muy baja.

En realidad, no existen materiales totalmente conductores ni totalmente aislantes, sino una gama casi completa de comportamientos intermedios. De cualquier modo, la conductividad de un metal puede ser mil millones de veces mayor que la de un aislante como el vidrio. Por ello, asumiremos casi siempre que un buen aislante tiene conductividad nula.

Supongamos que, mediante fricción o contacto, hemos depositado cierta carga en un cuerpo inicialmente neutro. Si el material en que hemos depositado carga es un aislante, la carga normalmente se queda ligada al punto de contacto. Es posible entonces tener una distribución de carga no uniforme, es decir, que varía de un punto a otro. En cambio, si el material es un buen conductor, el exceso de carga depositado en él tiende a dispersarse para minimizar la repulsión electrostática. Cuando las cargas dejan de moverse, se dice que se ha alcanzado el *equilibrio electrostático* y el exceso de carga se habrá situado en la superficie del conductor.

6.2. Campo eléctrico

Consideremos cierta carga Q , que puede ser una carga puntual, un conjunto de cargas puntuales o un cuerpo cargado. Se llama *campo eléctrico* creado por Q a un campo vectorial \mathbf{E} que expresa, en cada punto, la perturbación de las propiedades del espacio debida a la existencia de la carga Q (que, por ello, se llama *fuerza del campo eléctrico*). Para encontrar el valor de \mathbf{E} en un punto cualquiera del espacio, se coloca en ese punto una carga puntual q de pequeño valor (para que no modifique la localización y/o distribución de Q), llamada *carga de prueba*. La carga de prueba experimentará entonces una fuerza eléctrica \mathbf{F}_e que expresa la interacción con la carga fuente Q . El campo eléctrico creado por Q en el punto donde se ha situado la carga de prueba q se define como

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q}.$$

La unidad SI de campo eléctrico es 1 N/C. Se usa también otra unidad equivalente, que es 1 V/m. El *voltio* (V) se define, por tanto, de manera que $1 \text{ V} = 1 (\text{N} \cdot \text{m})/\text{C}$.

Campo eléctrico de un condensador plano

Un caso particularmente sencillo, pero importante, de campo eléctrico es el creado por un condensador plano. Un *condensador plano* está formado por dos placas metálicas planas y paralelas, como vemos en la figura 6.1. Una de ellas tiene una carga positiva $+Q$ distribuida uniformemente en su superficie, de área A . La otra tiene distribuida uniformemente en su superficie, también de área A , una carga de igual magnitud pero negativa $-Q$. La distancia entre ambas superficies es d .

Si la placa o *armadura positiva* del condensador plano tiene una superficie de área A y en ella hay una carga Q distribuida uniformemente, su *densidad superficial de carga* es

$$\sigma_{\text{pos}} = \frac{Q}{A}.$$

Del mismo modo, la densidad superficial de carga de la *armadura negativa* del condensador es

$$\sigma_{\text{neg}} = \frac{-Q}{A}.$$

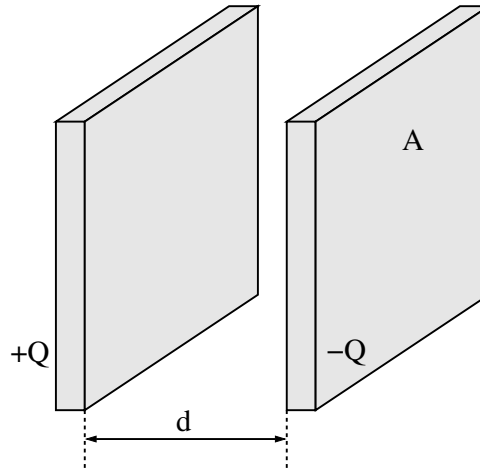


Figura 6.1: Condensador plano de área A y distancia entre placas d . La placa izquierda tiene carga Q y la derecha $-Q$.

De este modo, $\sigma_{\text{neg}} = -\sigma_{\text{pos}}$.

El campo eléctrico creado por el condensador *en la región situada entre sus placas o armaduras* se puede aproximar por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{pos}}}{\epsilon_0} \mathbf{u}_{\pm} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \mathbf{u}_{\pm}. \quad (6.1)$$

En esta expresión,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{m}^2 \cdot \text{N})$$

es la *permitividad del vacío* (hemos supuesto que la región entre las placas contiene vacío o aire; si estuviera rellena de otro material, habría que poner su permitividad en la fórmula del campo eléctrico). A su vez, el vector unitario \mathbf{u}_{\pm} apunta *desde la armadura positiva del condensador hasta su armadura negativa perpendicularmente a ambas superficies*. Por tanto, el campo eléctrico creado por un condensador plano entre sus placas es *uniforme* (no depende de la posición siempre que estemos entre las placas del condensador) y va desde la placa positiva a la negativa. Es esta sencillez lo que hace que el condensador plano sea tan usado en múltiples aplicaciones en las que se requiere un campo uniforme y apreciable en una región limitada del espacio (entre las placas) pero que sea mucho menor, o prácticamente inexistente, fuera de esa región.

Ejemplo 6.2.1 Calculemos el campo eléctrico entre las placas de un condensador plano sabiendo que las placas son cuadradas de 1 cm de lado y que la carga de la placa positiva vale 10^{-15} C.

Sol. Supongamos que las placas son paralelas al plano YZ y que la placa positiva tiene una coordenada x menor que la negativa. Así, el vector unitario \mathbf{u}_{\pm} coincide con \mathbf{i} . Además, como $A = 1 \text{ cm}^2$ y $Q = 10^{-15}$ C, el campo eléctrico resulta

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \mathbf{u}_{\pm} = \frac{10^{-15}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}} \mathbf{i} \simeq 1,13 \text{ V/m.}$$

6.3. Potencial eléctrico

Como hemos visto al definir el campo eléctrico, si una carga puntual q está sometida a un campo eléctrico \mathbf{E} (que puede estar creado por otras cargas distintas de q , por un condensador plano o por otro cuerpo cargado), la *fuerza eléctrica* \mathbf{F}_e experimentada por q tiene la forma

$$\mathbf{F}_e = q \mathbf{E}.$$

Si q tuviera masa m y la fuerza eléctrica fuese la única que actuara sobre ella, por la segunda ley de Newton la aceleración de q estaría dada por

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E}.$$

Esto implica que una carga positiva, sometida únicamente a una fuerza eléctrica, se acelera en el sentido del campo eléctrico aplicado y una carga negativa se acelera en sentido opuesto al campo eléctrico aplicado.

Además de poderse estudiar la dinámica de una carga sometida a un campo eléctrico a través de la segunda ley de Newton, pueden usarse también métodos basados en las nociones de trabajo y energía. La fuerza eléctrica producida por un *campo electrostático* (es decir, cualquier campo eléctrico creado por cargas en reposo) es una *fuerza conservativa*. Es importante notar que esto no sería cierto en general si el campo eléctrico no fuera conservativo (como el que aparece en el interior de una fuente de fuerza electromotriz, que veremos más adelante), pero nos centraremos en el caso conservativo para simplificar las cosas.

Toda fuerza conservativa lleva asociada una *energía potencial*. La energía potencial asociada a la fuerza electrostática se llama *energía potencial electrostática*, y la escribiremos como U_e . La energía potencial electrostática de una carga puntual q sometida a un campo electrostático \mathbf{E} se puede escribir como

$$U_e = qV.$$

En esta relación, V se llama *potencial eléctrico* y es una función escalar que depende sólo de la forma del campo conservativo \mathbf{E} al que está sometida q . La unidad de potencial eléctrico en el SI es $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Si la carga puntual q se mueve entre un punto inicial A y un punto final B bajo la acción de la fuerza electrostática $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$, el *trabajo* que realiza esta fuerza en ese movimiento, por la definición de energía potencial, es

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = -\Delta U_e \\ &= -(U_e(\text{final}) - U_e(\text{inicial})) = -(U_e(B) - U_e(A)) \\ &= -q(V_B - V_A) = -q\Delta V, \end{aligned}$$

donde V_A y V_B son los valores del potencial eléctrico en A y B , respectivamente. La cantidad

$$\Delta V = V(\text{final}) - V(\text{inicial}) = V_B - V_A$$

se llama *diferencia de potencial* y su unidad en el SI es también 1 V .

Si una carga puntual q se mueve entre los puntos A y B sometida únicamente a la fuerza electrostática, por la *conservación de la energía mecánica* se tendrá

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B,$$

donde v_A y v_B son las velocidades de la carga q en A y B , respectivamente. Esta expresión nos permite, por ejemplo, conocer el valor de la diferencia de potencial necesaria para acelerar o frenar partículas cargadas.

Relación entre campo eléctrico y potencial eléctrico

Hemos comentado que el potencial eléctrico V es una función escalar que está dada por el campo eléctrico conservativo \mathbf{E} creado por la misma distribución de carga que V . La fórmula matemática de esta relación es

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Dentro de la integral indefinida, se tiene el *producto escalar* de los vectores campo eléctrico \mathbf{E} y *desplazamiento infinitesimal* $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$. En esta expresión queda una constante de integración por determinar. Esta constante se puede fijar asignando un *origen de potencial*.

De la misma manera, la diferencia de potencial entre dos puntos se relaciona con el campo eléctrico mediante la integral definida

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ejemplo 6.3.1 Sabiendo que el campo eléctrico en una región del espacio es $\mathbf{E} = 3 \text{ kV/m } \mathbf{i} + 5 \text{ kV/m } \mathbf{j}$, calculemos la diferencia de potencial entre el punto $A(1 \text{ cm}, -2 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ y el origen de coordenadas O .

Sol. La diferencia de potencial la obtenemos mediante la siguiente expresión

$$\Delta V = V_A - V_O = - \int_O^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Calculemos primero el producto escalar del integrando:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = (3 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = 3 dx + 5 dy,$$

donde debemos recordar que la unidad de \mathbf{E} es kV/m . Así,

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_0^1 3 dx - \int_0^{-2} 5 dy = -[3x]_0^1 - [5y]_0^{-2} = -3 + 10 \\ &= 7 \text{ kV/m} \cdot \text{cm} = 70 \text{ V}. \end{aligned}$$

Diferencia de potencial entre las placas de un condensador plano

Para calcular la diferencia de potencial en el condensador plano, elegimos el sistema de referencia de manera que la placa positiva esté en $x = 0$ y la negativa esté en $x = d$. El campo eléctrico en este sistema de referencia, como vimos en un apartado anterior, se puede escribir

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \mathbf{u}_{\pm} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \mathbf{i}.$$

Aquí, Q es la carga de la armadura positiva del condensador (la negativa tiene carga $-Q$) y A es el área de la superficie de ambas armaduras.

La diferencia de potencial entre la placa positiva (en $x = 0$) y la placa negativa (en $x = d$) de este condensador plano estará entonces dada por

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_d^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \int_d^0 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}.$$

El producto escalar dentro de la integral es

$$\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = dx.$$

Poniendo esto en la expresión de la diferencia de potencial, se obtiene

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \int_d^0 dx = - \frac{Q}{\varepsilon_0 A} (0 - d) = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

El resultado final también se puede escribir como

$$\Delta V = E d.$$

Una aplicación de los condensadores es el *desfibrilador*, cuyas placas se cargan con diferencias de potencial elevadas. Al ponerlas sobre el cuerpo de una persona, el condensador que forman ambas placas se descarga a través del interior del paciente en un cortísimo intervalo de tiempo, generando intensas señales eléctricas para reactivar el latido cardiaco.

Conductores en equilibrio electrostático

Un material conductor contiene un gran número de electrones libres que se mueven obedeciendo campos eléctricos externos o internos. Decimos que el conductor se encuentra en *equilibrio electrostático* si no hay desplazamiento de cargas en su interior. En situación de equilibrio electrostático, cualquier material conductor satisface las siguientes propiedades:

- Si un conductor tiene un exceso de carga en su interior, esta carga se mueve rápidamente intentando reducir la fuerza eléctrica. Cuando se alcanza el equilibrio electrostático, todo el exceso de carga se sitúa en la superficie del conductor (en general, se distribuye inhomogéneamente en ella como veremos después) y el interior queda completamente neutro, como se ve en la figura 6.2.

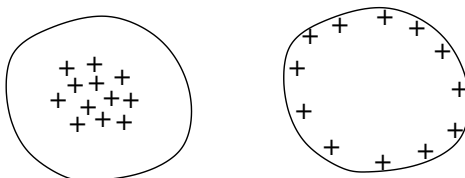


Figura 6.2: Distribución de carga en un conductor. Las cargas depositada inicialmente en el interior del conductor (izquierda) se mueven hacia la superficie (derecha).

- El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo. El campo eléctrico \mathbf{E}_s en la superficie de un conductor en equilibrio es perpendicular a ella y tiene un valor

$$\mathbf{E}_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n},$$

siendo \mathbf{n} el vector unitario normal a la superficie del conductor (que apunta hacia fuera de éste) en cada punto y σ la densidad superficial de carga en ese mismo punto (en realidad, en una superficie infinitesimal alrededor del punto). Dado que la distribución de carga no es, en general, homogénea, el campo en la superficie de un conductor tiene valores diferentes en cada punto, pero en todos obedece la expresión anterior.

- Si se sitúa un conductor en el seno de un campo eléctrico externo, como en la siguiente figura, las cargas inducidas por el campo externo en la superficie del conductor crean un campo que anula el externo en el interior del material. Esta propiedad se llama *efecto de apantallamiento* y el conductor que lo crea se dice que actúa como una *jaula de Faraday*.
- Dado que en el interior de un material conductor en equilibrio el campo eléctrico es nulo, resulta que el potencial electrostático es el mismo en todos los puntos del interior y tiene un único valor llamado *potencial del conductor* V_c .

Se ha mencionado que el exceso de carga se sitúa de manera inhomogénea en la superficie de un material conductor en equilibrio electrostático. En realidad, tanto la densidad de carga como el campo eléctrico en equilibrio son

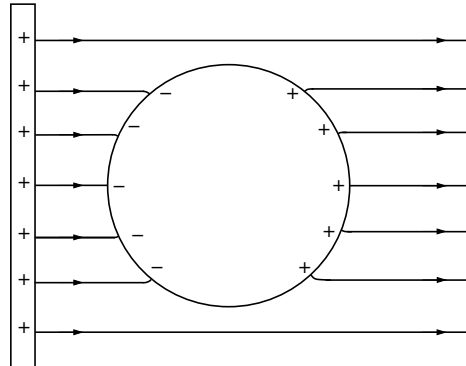


Figura 6.3: Distribución de carga en un conductor en el seno de un campo eléctrico.

mayores en las zonas en que las que el radio de curvatura de la superficie del conductor es menor. Si el conductor tiene una punta, la densidad de carga y el campo eléctrico pueden ser muy grandes en ella, incluso aunque el potencial no lo sea. Si el campo eléctrico en una punta de un conductor supera un valor crítico, llamado *resistencia dieléctrica* del medio a su alrededor (para el aire, este valor es del orden de $E_{max} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$), se produce la ionización del medio dieléctrico, liberándose electrones en una fracción de los átomos o moléculas del medio. Este efecto se llama *ruptura dieléctrica* y aparece, por ejemplo, en los rayos de una tormenta.

6.4. Capacidad y condensadores

Si depositamos una carga Q en un conductor aislado, se distribuye en la superficie del conductor y todos los puntos del conductor adquieren un potencial V_c respecto al nivel cero (aquel en que no hay carga). Se define la *capacidad* eléctrica del conductor como el cociente entre la carga de su superficie y el potencial respecto al nivel cero, esto es,

$$C = \frac{Q}{V_c}.$$

La unidad SI de capacidad es el *faradio* (F), tal que $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$. La capacidad de un conductor mide la cantidad de carga que puede almacenar.

Un *condensador* es un dispositivo que permite almacenar carga. Está formado por dos conductores con la misma geometría situados muy cerca

uno del otro pero sin tocarse, llamados placas o armaduras. En la figura 6.4 se puede ver un esquema de (a) un condensador plano, (b) un condensador cilíndrico y (c) un condensador esférico.

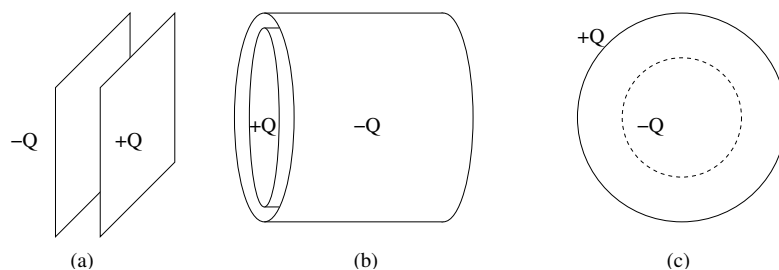


Figura 6.4: Esquema de (a) un condensador plano, (b) un condensador cilíndrico y (c) un condensador esférico.

Uno de los conductores del condensador se carga con una carga Q y el otro con una carga $-Q$. En el equilibrio electrostático, la armadura de carga positiva adquiere un potencial V_+ , que excede al potencial V_- de la armadura de carga negativa en una cantidad $\Delta V = V_+ - V_-$. Se define la *capacidad* de un condensador como el cociente entre la carga Q situada en la armadura positiva y la diferencia de potencial ΔV entre la armadura positiva y la negativa,

$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

La cantidad C depende de los detalles de fabricación del condensador, y mide su posibilidad de almacenamiento de carga.

Capacidad de un condensador plano sin dieléctrico entre sus placas

Para calcular la capacidad de un condensador, se obtiene el campo eléctrico que crea la distribución de carga en el equilibrio para puntos situados en la región entre las armaduras. A partir del campo, se determina la diferencia de potencial ΔV entre la armadura positiva y la negativa. Finalmente, se calcula la capacidad C del condensador mediante el cociente $C = Q/\Delta V$.

Para un condensador plano, como hemos visto en apartados anteriores de este tema, el campo eléctrico es $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0 A)$, siendo A el área de las armaduras, y la diferencia de potencial entre las armaduras es $\Delta V = Ed =$

$Qd/(\varepsilon_0 S)$, siendo d la distancia entre las placas. Por tanto, la capacidad de un condensador plano es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d},$$

es decir, depende de factores geométricos (A y d) y del material que se coloca entre las placas (en el caso estudiado, el vacío, por lo cual aparece en la fórmula la permitividad del vacío ε_0).

Ejemplo 6.4.1 Consideremos de nuevo el ejemplo 6.2.1 y calculemos la capacidad del condensador con la información adicional de que las placas están separadas $d = 1 \text{ mm}$.

Sol. Podemos calcular la capacidad de dos maneras. Por una parte, usando el valor de Q y la expresión del campo eléctrico obtenida en el ejemplo 6.2.1 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} \simeq \frac{10^{-15}}{1,13 \cdot 10^{-3}} \simeq 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F}.$$

Por otra parte, también podemos calcular la capacidad con la siguiente fórmula

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F}.$$

Capacidad de un condensador plano con dieléctrico entre sus placas

Además del vacío o del aire, se pueden insertar otros materiales entre las placas de un condensador, modificando así su capacidad. Cuando se introduce en un condensador un material dieléctrico, como muestra la figura 6.5, el campo eléctrico E se reduce respecto al del vacío E_0 según la expresión $E = E_0/\varepsilon_r$, siendo ε_r una cantidad adimensional, siempre igual o mayor que 1, llamada *permitividad relativa* del material que se ha introducido entre las placas del condensador. A partir de ella, se define la constante

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r,$$

que se llama *permitividad* (absoluta) del material y tiene las mismas unidades que ε_0 .

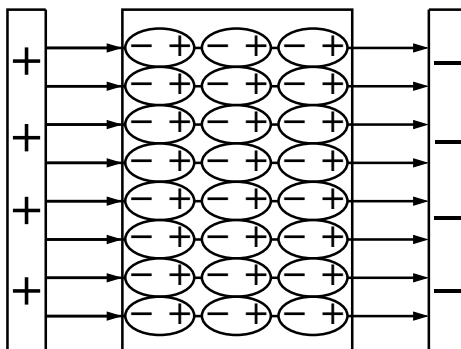


Figura 6.5: Esquema de un condensador con un dieléctrico entre sus placas.

Debido a que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se reduce al colocar un dieléctrico, la diferencia de potencial ΔV se reduce con el mismo factor. Esto implica que la capacidad del condensador C cuando se introduce un dieléctrico aumenta con respecto a la capacidad del mismo condensador cuando entre las placas hay vacío C_0 según

$$C = \varepsilon_r C_0.$$

La capacidad de un condensador plano con un dieléctrico ocupando todo el espacio entre sus placas es

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}, \quad (6.2)$$

donde ε es la permitividad del material. El hecho de que la capacidad aumenta al insertar un dieléctrico es la razón por la cual se suelen fabricar los condensadores con diferentes materiales dieléctricos entre sus armaduras.

Ejemplo 6.4.2 Continuando con el ejemplo 6.4.1, obtengamos la nueva capacidad del condensador si entre las placas introducimos un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$.

Sol. Como la capacidad C_0 obtenida en el ejemplo 6.4.1 es conocida, podemos calcular la nueva capacidad como

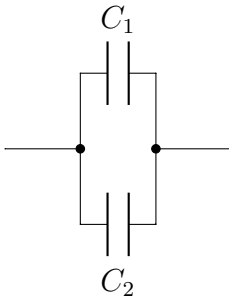
$$C = \varepsilon_r C_0 = 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-13} = 1,77 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

De forma alternativa, podemos calcular C directamente

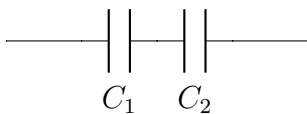
$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

Asociaciones de condensadores

A veces es conveniente asociar varios condensadores, cuyo conjunto se comporta como un único *condensador equivalente* a efectos del resto del circuito o dispositivo en el que estén integrados. Las principales maneras de conectar varios condensadores mediante cables conductores se pueden observar en las figuras que hay a continuación.



En una *asociación en paralelo*, conectamos el circuito a una diferencia de potencial ΔV , de tal manera que es la misma para cada condensador, es decir, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. La carga total almacenada por la asociación es $Q_T = Q_1 + Q_2$, donde $Q_1 = C_1 \Delta V$ y $Q_2 = C_2 \Delta V$. Así, $Q_T = (C_1 + C_2) \Delta V = C_T \Delta V$, y la capacidad equivalente de una asociación en paralelo de dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 es $C_T = C_1 + C_2$.



En una *asociación en serie*, la capacidad equivalente resulta dada por $\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$. En este caso, la carga en cada condensador es la misma, $Q = Q_1 = Q_2$, siendo $Q_1 = C_1 \Delta V_1$ y $Q_2 = C_2 \Delta V_2$ las cargas almacenadas por cada uno de los condensadores. La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación de condensadores en serie es $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Ejemplo 6.4.3 Tomemos dos condensadores de la misma capacidad C y obtengamos la capacidad equivalente cuando los asociamos en paralelo y en serie.

Sol. Si la asociación es en paralelo, entonces

$$C_T = C + C = 2C,$$

la capacidad resultante se duplica. Mientras que si la asociación es en serie

$$C_T^{-1} = C^{-1} + C^{-1} \Rightarrow C_T = \frac{1}{2}C,$$

la capacidad total se reduce a la mitad.

Energía eléctrica almacenada por un condensador

Un condensador almacena carga cuando se establece una diferencia de potencial entre sus placas. La diferencia de potencial entre estas placas la establece algún dispositivo que actúe como fuente de trabajo, como una batería. La batería hace trabajo para depositar carga en una armadura del condensador, extrayéndola de la otra armadura.

Cuando una batería está cargando un condensador, ha de ser capaz de ir llevando carga positiva desde la placa negativa hasta la placa positiva venciendo la repulsión electrostática. El trabajo que realiza la batería W_{bat} es igual y de signo opuesto al trabajo (negativo) realizado por la fuerza electrostática en ese proceso. Este trabajo se almacena como energía potencial electrostática $U_e = W_{bat}$ de las cargas sobre las armaduras del condensador. Resulta

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C(\Delta V)^2}{2} = \frac{Q\Delta V}{2}, \quad (6.3)$$

donde Q es la carga de la placa positiva del condensador y ΔV es la diferencia de potencial entre las placas.

Hay otra manera de interpretar el resultado anterior. En el proceso de carga, se crea un campo eléctrico entre las placas del condensador, de manera que el trabajo realizado para cargar el condensador es también el trabajo necesario para crear este campo eléctrico. La energía almacenada en el condensador se puede considerar *energía del campo eléctrico* que ha sido creado gracias al trabajo de la batería conectada al condensador para cargarlo.

Ejemplo 6.4.4 *Continuando con el ejemplo 6.4.3, calculemos la energía almacenada en la asociación de condensadores, suponiendo que inicialmente los dos condensadores tienen las mismas carga Q_0 y diferencia de potencial ΔV_0 .*

Sol. *Hagamos el cálculo de dos maneras distintas, en primer lugar usando las propiedades de una asociación de condensadores y luego usando la conservación de la energía. Cuando asociamos dos condensadores en*

paralelo, la nueva carga Q es la suma de la de los condensadores por separado, como ya vimos. Así, en este caso, $Q = 2Q_0$. Por otra parte, como vimos en el ejemplo 6.4.3, la capacidad total es $C_T = 2C_0$, donde C_0 es la capacidad de los condensadores por separado. Por ello, la energía de la asociación en paralelo es

$$U_e = \frac{Q^2}{2C_T} = \frac{Q_0^2}{C_0} = 2U_{e0},$$

donde U_{e0} es la energía de cada condensador antes de asociarse. Análogamente, en la asociación en serie es $\Delta V = 2\Delta V_0$ y $C_T = \frac{1}{2}C_0$, por lo que la energía es

$$U_e = \frac{C_T(\Delta V)^2}{2} = C_t(\Delta V_0)^2 = 2U_{e0}.$$

Al idénticos resultados llegamos si tenemos en cuenta que la energía se conserva. Antes de la asociación, cada condensador tenía una energía U_{e0} , por lo que el conjunto tenía una energía $2U_{e0}$. Al asociarlos, no perdemos energía, así que la energía de la asociación sigue siendo $2U_{e0}$.

6.5. Corriente eléctrica

En este tema hemos estudiado cómo se crean un campo eléctrico y un potencial eléctrico a partir de la existencia de carga en una región del espacio. El movimiento colectivo o flujo de muchas pequeñas cargas situadas en una región en la que hay un campo eléctrico es el fundamento de la corriente eléctrica.

Llamamos *corriente eléctrica* al flujo “ordenado” de carga eléctrica. De todas las posibles maneras capaces de generar este flujo, nos centraremos en la *corriente de conducción*, que es el flujo ordenado de carga eléctrica por el interior de materiales *conductores*.

Necesitamos alguna magnitud bien definida para estudiar la corriente. Consideraremos la *intensidad de corriente eléctrica* I , que es la cantidad de carga *positiva* que atraviesa una *sección transversal* de un material conductor en la unidad de tiempo, es decir

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

En esta expresión, Δq es la carga positiva que atraviesa la sección transversal del material conductor en el intervalo de tiempo Δt . La unidad de intensidad de corriente eléctrica en el SI es el *amperio* (A), de tal modo que $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

Supongamos el caso más común en el que la corriente atraviesa un *cable* o *filamento* conductor de sección de área uniforme. En la figura 6.6, tenemos un trozo de cable de sección uniforme S y longitud L , con extremos en los puntos A y B .

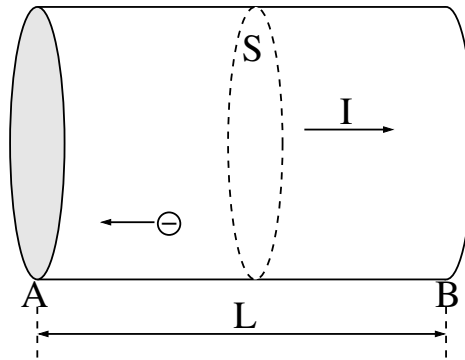


Figura 6.6: Trozo de conductor entre los puntos A y B , de sección S y longitud L por el que circula una corriente I .

Para que aparezca corriente en el cable, es necesario aplicar en su interior un campo eléctrico \mathbf{E} (en el ejemplo, el campo va desde A hacia B y suponemos, por simplicidad, que es un campo uniforme). Este campo crea una diferencia de potencial entre el punto inicial y el punto final del cable, dada por

$$V = V_A - V_B = E L.$$

En esta ecuación, V es positivo, ya que *el potencial decrece en el sentido del campo*, de manera que $V_A > V_B$ porque \mathbf{E} va desde A hasta B . Es común denominar, por ello, a la cantidad positiva $V = V_A - V_B$ como *caída de potencial*, *caída de tensión* o *voltaje* entre los extremos del trozo de cable conductor que estamos estudiando.

Los electrones libres del material conductor se mueven en sentido opuesto al campo eléctrico aplicado \mathbf{E} , es decir, desde B hacia A . En su camino, atraviesan la sección del conductor S dibujada en la figura 6.6. La cantidad de carga, en valor absoluto, que atraviesa la sección S en la unidad de tiempo constituye la intensidad de corriente eléctrica I en el cable. Pero hemos dicho

antes que ésta se refiere a la carga positiva. Es fácil ver que, si los electrones libres se mueven hacia A , físicamente es como si carga positiva se moviera hacia B . Por tanto, I tiene sentido opuesto al movimiento de los electrones libres y el mismo sentido que el campo eléctrico aplicado, es decir, *la corriente eléctrica se produce en el sentido en que decrece el potencial*. Esta convención histórica para definir el sentido de la corriente eléctrica, en relación opuesta al movimiento real de los electrones, se llama *sentido convencional del flujo*.

Un aspecto importante de la corriente eléctrica es cómo mantenerla en el tiempo. Para ello, no podemos llegar al equilibrio electrostático en el que las cargas están en reposo, de modo que necesitaremos dos cosas:

- Que el camino recorrido por los electrones libres no tenga principio ni fin, es decir, hace falta un camino ininterrumpido por el que fluya la corriente. Tal camino se llama *circuito eléctrico*.
- Que el campo eléctrico aplicado no se anule. Esto implica tener en el circuito una fuente de campo eléctrico que lo mantenga. Tal dispositivo, del que hablaremos más adelante en este mismo tema, se llama *fuerza electromotriz*.

6.6. Resistencia

En el apartado anterior, hemos visto que la intensidad de corriente eléctrica I en un cable conductor está constituida por un gran número de electrones libres que se mueven en sentido opuesto a un campo eléctrico aplicado. En realidad, el movimiento de cada electrón libre es una composición de dos tipos de movimiento:

- La aceleración impuesta por el campo eléctrico, dada por

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}.$$

- El *movimiento térmico* de los electrones incluso en ausencia de campo eléctrico, debido a la energía cinética que poseen, relacionada con la *temperatura* del material. Este movimiento térmico es desordenado y muy rápido, pero no conlleva un flujo colectivo de electrones en una dirección fija, por lo que no está asociada, por sí mismo, con una corriente eléctrica.

El movimiento térmico de los electrones libres de un material conductor continúa cuando ya se ha establecido una corriente eléctrica en su interior, e implica que éstos chocan múltiples veces con los iones positivos del material. En estos choques, los electrones pierden energía cinética y *el material aumenta su energía interna*, es decir, aumenta su temperatura.

A nivel macroscópico, por tanto, el flujo de corriente eléctrica por el interior de un material conductor está limitado por la pérdida de energía cinética de los electrones libres y genera un calentamiento del material. Tal efecto se puede describir por medio de una cantidad que se llama *resistencia eléctrica* del material. Si un conductor está sometido a una caída de potencial V entre sus extremos y circula por él, en el sentido en que cae el potencial, una intensidad de corriente I , su resistencia se define como

$$R = \frac{V}{I}.$$

La unidad de resistencia en el SI es el *ohmio* (Ω), definido de tal manera que $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$.

Cuando el valor de R en un material es constante e independiente de la caída de tensión V aplicada en él, se dice que el material es *óhmico* y que en él se cumple siempre la *ley de Ohm*

$$V = RI \quad (\text{siendo } R \text{ una constante}). \quad (6.4)$$

Materiales de este tipo son las *resistencias* o *resistores* que se usan en los circuitos eléctricos para limitar la corriente.

Resistividad y conductividad

La resistencia R de un cable conductor depende básicamente de dos cosas: el material del que está hecho (y las propiedades de este material) y la forma y tamaño del cable. Es posible separar ambas dependencias en el caso de un cable conductor de sección uniforme S y longitud ℓ . En este caso, se cumple

$$R = \rho_e \frac{\ell}{S}. \quad (6.5)$$

La cantidad ρ_e sólo depende del material y se llama *resistividad eléctrica* (con unidad en el SI $\Omega \cdot m$).

La inversa de la resistividad se llama *conductividad eléctrica* del material,

$$\sigma_e = \frac{1}{\rho_e}.$$

Esta es la cantidad que determina qué materiales son buenos conductores (alto valor de σ_e) y cuáles son dieléctricos (valor de σ_e cercano a cero). La siguiente tabla muestra valores de resistividad de algunos materiales en condiciones normales de presión y temperatura.

Sustancia	ρ_e ($\Omega \cdot \text{m}$)
Plata	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Cobre	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Oro	$2,4 \cdot 10^{-8}$
Platino	$1,1 \cdot 10^{-7}$
Plomo	$2,2 \cdot 10^{-7}$
Nicromo	$1,5 \cdot 10^{-6}$
Carbono	$3,5 \cdot 10^{-5}$
Vidrio	de 10^{10} a 10^{14}
Goma	10^{13}

Los mejores conductores, como plata, cobre, oro, etc. tienen los menores valores de resistividad en la tabla (y valores muy altos de conductividad). Los cables conductores hechos con estos materiales tienen, por tanto, resistencias muy bajas a menos que sean muy largos o de secciones muy pequeñas. Los valores de las resistencias de estos cables se suelen despreciar en muchos circuitos y, en ese caso, aparecen dibujados como líneas rectas; se dicen que se comportan como *cortocircuitos*. En un cortocircuito, según la ley de Ohm,

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0.$$

Es decir, en un cortocircuito no hay resistencia ni caída de tensión, pero la corriente I puede tener cualquier valor.

Otros materiales, como el nicromo y el carbono, tienen resistividades más altas (y, en consecuencia, conductividades más bajas), por lo que la resistencia de dispositivos construidos con ellos no es despreciable. Estos dispositivos de resistencias no nulas se llaman *resistores* o simplemente *resistencias*, cumplen la ley de Ohm $V = IR$ y se dibujan en los circuitos mediante líneas en zigzag.

Finalmente, el vidrio y la goma son buenos ejemplos de aislantes o dieléctricos, con una resistividad enorme y una conductividad cercana a cero. El límite de conductividad nula y resistividad infinita se alcanza en el vacío (o, con buena aproximación, en el aire). Un espacio vacío en un circuito se llama *circuito abierto* y, según la ley de Ohm,

$$R = \infty \quad \Rightarrow \quad I = 0.$$

Es decir, en un circuito abierto, la resistencia es infinita y la corriente eléctrica es nula, pero la caída de potencial V puede tener cualquier valor.

Ejemplo 6.6.1 *Calculemos la intensidad I que atraviesa un cable de Nicromo, de 1 m de longitud y sección circular de 2 mm de diámetro, cuando está sometido a una diferencia de potencial de $V = 1$ V.*

Sol. *Calculemos primero la resistencia R del cable. Para ello, necesitamos la resistividad del Nicromo, que según la tabla anterior es $\rho_e = 1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$:*

$$R = \rho_e \frac{\ell}{S} = 1,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\pi(1 \cdot 10^{-3})^2} \simeq 0,477 \Omega.$$

Admitiendo que se cumple la ley de Ohm, la intensidad que atraviesa esta resistencia es

$$I = \frac{V}{R} \simeq \frac{1}{0,477} \simeq 2,10 \text{ A}.$$

Dependencia de la resistencia con la temperatura

Dado que la resistencia de un material es la cantidad macroscópica que tiene en cuenta la pérdida de energía cinética de los electrones libres debida a los choques que se producen en su movimiento, es lógico pensar que la temperatura del material (que está directamente relacionada con la energía interna del propio material, es decir, la energía del movimiento térmico de sus componentes) tenga gran influencia en su resistencia.

Para un amplio rango de temperaturas, la resistividad eléctrica de un material depende de su temperatura mediante la ley

$$\rho_e = \rho_{e0} [1 + \alpha (T - T_0)]. \quad (6.6)$$

En esta fórmula, ρ_e es la resistividad del material a temperatura T , ρ_{e0} es la resistividad del mismo material a temperatura T_0 y α se llama *coeficiente térmico de la resistividad* y su unidad en el SI es 1 K^{-1} .

Para los buenos conductores, α suele ser positivo, de manera que la resistividad eléctrica aumenta con la temperatura en ellos. En los materiales *semiconductores*, como el carbono, el silicio y el germanio, α es negativo, de manera que la resistividad disminuye con la temperatura. Finalmente, para muchos dieléctricos, α es prácticamente nula, por lo que la resistividad de estos aislantes es independiente de la temperatura.

La fórmula anterior se puede escribir también para la resistencia, es decir, también se cumple

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

donde ahora R es la resistencia a la temperatura T y R_0 la resistencia a la temperatura T_0 .

Ejemplo 6.6.2 *La relación entre la resistencia y la temperatura de un material la podemos usar también para conocer su temperatura. Por ejemplo, consideremos un cable de platino, de coeficiente térmico $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, con una resistencia a 15° C de 50Ω . Calculemos su temperatura cuando su resistencia aumenta 1Ω .*

Sol. *De la relación*

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

conocemos $R_0 = 50 \Omega$, α y $T_0 = 10^\circ \text{ C}$. Despejando la temperatura T para que la nueva temperatura sea $R = 51 \Omega$, tenemos

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 15 + \frac{1}{3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 50} \simeq 20,1^\circ \text{ C}.$$

Asociaciones de resistencias

En ocasiones resulta conveniente conectar entre sí varias resistencias para obtener cierto valor determinado. Estas asociaciones pueden sustituirse en los cálculos por una sola *resistencia equivalente* R_T , que tiene la misma intensidad de corriente y la misma caída de potencial que toda la asociación. Las formas básicas de asociación son en serie y en paralelo:

- En una *asociación en serie*, las resistencias se conectan una a continuación de otra. El conjunto de las dos resistencias se comporta como si

hubiera una sola resistencia equivalente cuyo valor es igual a la suma de las resistencias individuales,

$$R_T = R_1 + R_2. \quad (6.7)$$

La corriente que circula por la asociación es la misma que la que circula por cada resistencia, cumpliéndose $I_1 = I_2 = I_T$. Por su parte, las caídas de tensión en cada resistencia se suman para obtener la caída de tensión en la asociación según $V_T = V_1 + V_2$.

- En una *asociación en paralelo*, las resistencias se conectan entre dos puntos comunes. La resistencia equivalente satisface entonces

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (6.8)$$

Esta vez, la caída de tensión en cada resistencia es la misma que la que hay en la asociación, de manera que $V_T = V_1 = V_2$. Por su parte, la corriente total se distribuye entre las dos resistencias, y tenemos $I_T = I_1 + I_2$.

Ejemplo 6.6.3 *Tenemos una resistencia de valor $R_1 = 1\ \Omega$. Veamos con qué otra resistencia R_2 debemos asociar R_1 para, en primer lugar, triplicar su valor y luego disminuir su valor a una tercera parte.*

Sol. *Por una parte, en la asociación en serie, el valor de la resistencia equivalente es mayor que la de las resistencias por separado. Así, para tener $R_T = 3R_1$ debemos poner R_1 en serie con R_2 :*

$$3R_1 = R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 2\ \Omega.$$

Por otra parte, para que R_T sea $\frac{1}{3}R_1$, debemos poner R_1 y R_2 en paralelo:

$$\left(\frac{R_1}{3}\right)^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2} = 0,5\ \Omega.$$

6.7. Fuentes de fuerza electromotriz

Hemos comentado antes que, para mantener una corriente eléctrica en un circuito, hace falta en él un dispositivo que proporcione sin descanso

un campo eléctrico o diferencia de potencial. En la figura 6.7, tenemos un circuito muy básico, formado por una pila, cables conductores de resistencia despreciable y una bombilla cuyo filamento actúa como una resistencia.

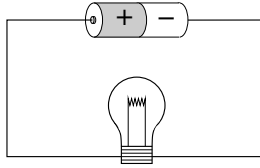


Figura 6.7: Circuito sencillo con una pila y una bombilla.

Las reacciones electrolíticas que ocurren en el interior de pilas y baterías producen una diferencia de potencial entre sus terminales $+$ y $-$. La corriente eléctrica fluye entonces desde el terminal positivo de la pila, atraviesa el resto del circuito pasando por la bombilla y luego vuelve a la pila por su terminal negativo. Para completar el circuito, la corriente ha de ir, por el interior de la pila, desde su terminal negativo hasta el positivo, y esto cuesta un trabajo a la pila o batería, que ha de extraer de su energía interna que libera a través de las reacciones de su interior. El *trabajo por unidad de carga eléctrica* realizado por la pila se conoce con el nombre de *fuerza electromotriz* o *fem* \mathcal{E} y su unidad en el SI es 1 V. Así, la pila del circuito anterior es un ejemplo de *fuerza de fuerza electromotriz* o *fuerza de fem*. También lo son las placas solares y los generadores de corriente alterna de las centrales eléctricas. En general, una fuente de fem realiza un trabajo por unidad de carga igual a su fuerza electromotriz \mathcal{E} , que se transforma en diferencia de potencial entre sus terminales positivo y negativo. Esta diferencia de potencial alimenta al circuito al que se conecta la fuente.

En una *fuerza de fem ideal*, el valor numérico de su fem \mathcal{E} es igual a la diferencia de potencial $V = V_+ - V_-$ entre sus terminales positivo y negativo, y esta diferencia de potencial proporcionada no varía independientemente del circuito al que conectemos la fuente. Una pila recién estrenada se comporta aproximadamente como fuente de fem ideal y el valor de la diferencia de potencial que proporciona es su fem nominal (por ejemplo, 1,5 V). En los diagramas de circuitos, representaremos las fuentes de fem ideales mediante dos barras paralelas de distinto tamaño, siendo la barra mayor el terminal positivo y la barra menor el terminal negativo. Otras maneras de representar fuentes de fem ideales pueden verse en la figura 6.8.

En una *fuerza de fem real*, la diferencia de potencial que proporciona es

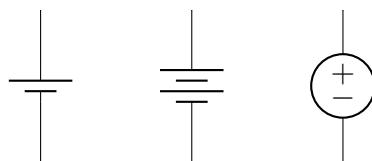


Figura 6.8: Diferentes formas de representar fuentes fem ideales.

algo menor que su fem y depende del valor de la corriente que atraviesa la fuente cuando se conecta a un circuito. Podemos representar una fuente real mediante una fuente ideal de fem \mathcal{E} en serie con una resistencia interna r . Una pila que lleva algún tiempo en funcionamiento se comporta como fuente de fem no ideal. La resistencia interna de la pila va aumentando con el tiempo y llega un momento que es tan grande que la pila deja de funcionar.

Ejemplo 6.7.1 Una manera de obtener el valor de la resistencia interna r de una batería, conocida su fem ideal \mathcal{E} (o diferencia de potencial cuando la corriente que la atraviesa es cero), es conectar la batería a una resistencia R y medir la corriente I que la atraviesa. Expresemos r en función de V , R e I .

Sol. Teniendo en cuenta que una batería en serie con una resistencia R es equivalente a una fuente ideal \mathcal{E} en serie con dos resistencias r y R , podemos usar la ley de Ohm con la resistencia equivalente R_T :

$$\mathcal{E} = R_T I = (r + R)I.$$

Despejando r llegamos al resultado buscado

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I} - R.$$

6.8. Potencia eléctrica

Consideremos una batería ideal de fem \mathcal{E} conectada a un circuito y tal que la intensidad de corriente que atraviesa la batería es I . Esta fuente suministra energía que proviene, como hemos visto, del trabajo de las reacciones químicas del interior de la batería. Cada vez que una carga positiva Δq llega al terminal negativo de la batería, formando parte de la corriente que recorre el circuito, la batería ha de hacer un trabajo para llevarla, por su interior,

hasta su terminal positivo. El trabajo que realiza la fuerza eléctrica para que la carga Δq vaya desde el terminal negativo hasta el positivo es

$$W_e = -\Delta q \Delta V = -\Delta q \mathcal{E}$$

que es negativo, por lo que la carga no hará ese movimiento a menos que la batería realice un trabajo del mismo valor y signo opuesto para que ocurra. Ese trabajo es la *energía potencial eléctrica* suministrada al circuito por una fuente de fem \mathcal{E} y tiene un valor

$$U_{\mathcal{E}} = \Delta q \mathcal{E}.$$

Si por la fuente de fem pasa una corriente I en un intervalo de tiempo Δt , se puede escribir $\Delta q = I \Delta t$, de manera que

$$U_{\mathcal{E}} = I \mathcal{E} \Delta t.$$

La *potencia eléctrica* suministrada por la fuente es, entonces,

$$P_{\mathcal{E}} = \frac{U_e}{\Delta t} = I \mathcal{E} \quad (6.9)$$

y su unidad en el SI es el vatio (W).

La potencia eléctrica suministrada por una fuente ha de repartirse entre todos los elementos del circuito. En particular, la *potencia que consume una resistencia* de valor R , que tiene una caída de potencial V entre sus terminales y que es atravesada por una corriente I en el sentido en que cae el potencial, se puede escribir, usando la ley de Ohm para pasar de una manera a otra, como

$$P_R = I V = I^2 R = \frac{V^2}{R}. \quad (6.10)$$

La energía que consume la resistencia se debe a la pérdida de energía cinética de los electrones libres al atravesar el interior de esa resistencia. Esta energía cinética perdida por los electrones se transforma, en la resistencia, en un aumento de su energía interna, es decir, en un aumento de su temperatura. Por tanto, la energía consumida en una resistencia es *dissipada en el medio en forma de calor*.

Una nota final. Una fuente proporciona energía a un circuito si la corriente que la atraviesa por su interior lo hace desde su terminal negativo hacia su terminal positivo. La potencia que proporciona la fuente en tal caso es, como

hemos visto, $P_{\mathcal{E}} = I \mathcal{E}$. Hay casos en que un circuito tiene varias fuentes y, en alguna de ellas, la corriente va por su interior desde el terminal positivo al negativo. En este caso, la potencia de esa fuente, $P_{\mathcal{E}} = I \mathcal{E}$, no será potencia proporcionada al circuito, sino potencia consumida por esa fuente en particular.

Ejemplo 6.8.1 *Dos resistencias, $R_1 = 1 \Omega$ y $R_2 = 3 \Omega$, que están en paralelo, se conectan a una fuente ideal de tensión de 6 V. Calculemos la potencia disipada en cada resistencias y comprobemos que su suma coincide con la potencia suministrada por la fuente.*

Sol. *Las dos resistencias están en paralelo y por tanto la caída de tensión en ambas es la misma, y coincide con la tensión de la fuente $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$. Así, las potencias disipadas son*

$$P_{R_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} = \frac{36}{1} = 36 \text{ W},$$

$$P_{R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} = \frac{36}{3} = 12 \text{ W}.$$

En total, la potencia disipada es

$$P_R = P_{R_1} + P_{R_2} = 48 \text{ W}.$$

Este valor de P_R también lo podemos calcular usando el valor de la resistencia equivalente

$$R_T = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4} = 0,75 \Omega.$$

Así,

$$P_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R_T} = \frac{36}{0,75} = 48 \text{ W}.$$

Para obtener la potencia suministrada por la fuente, necesitamos calcular la intensidad I que la atraviesa. Esta intensidad es la misma que circula

por la resistencia R_T y que podemos calcular con la ley de Ohm:

$$\mathcal{E} = IR_T \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_T} = \frac{6}{0,75} = 8 \text{ A.}$$

De este modo, la potencia suministrada por la fuente es

$$P_{\mathcal{E}} = I\mathcal{E} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ W,}$$

que coincide con la potencia disipada P_R .

6.9. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{pos}}}{\epsilon_0} \mathbf{u}_{\pm}$ $\sigma_{\text{pos}} = \frac{Q}{A}$ Q ϵ_0 A \mathbf{u}_{\pm}	Campo eléctrico condensador plano Densidad superficial de carga positiva Carga de la placa positiva Permitividad del vacío Área de las placas Vector unitario perpendicular a las placas desde la placa positiva a la negativa	(6.1)
$C = \frac{\epsilon A}{d}$ ϵ d	Capacidad del condensador plano Permitividad del dieléctrico o vacío (ϵ_0) Distancia entre placas	(6.2)
$C_T = C_1 + C_2$	Capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo	
$C_T^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$	Capacidad equivalente de dos condensadores en serie	
$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C(\Delta V)^2}{2}$ $= \frac{Q(\Delta V)}{2}$ ΔV	Energía de un condensador Diferencia de potencial entre placas	(6.3)
$V = RI$ V R I	Ley de Ohm Caída de potencial Resistencia Intensidad	(6.4)
$R = \rho_e \frac{\ell}{S}$ ρ_e ℓ S	Resistencia Resistividad eléctrica Longitud del cable Sección del cable	(6.5)
$\rho_e = \rho_{e0} [1 + \alpha (T - T_0)]$ ρ_e ρ_{e0} α	Resistividad versus temperatura Resistividad a la temperatura T Resistividad a la temperatura T_0 Coeficiente térmico de la resistividad	(6.6)

$R_T = R_1 + R_2$	Resistencia equivalente de dos resistencias en serie	(6.7)
$R_T^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$	Resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo	(6.8)
$P_{\mathcal{E}} = I \mathcal{E}$ I \mathcal{E}	Potencia suministrada por la fuente Intensidad a través de la fuente del polo negativo al positivo Fuerza electromotriz de la fuente	(6.9)
$P_R = IV = I^2 R$ $= \frac{V^2}{R}$ I V	Potencia consumida por la resistencia R Intensidad Caída de potencial	(6.10)

6.10. Problemas resueltos

1. A partir de la siguiente expresión del campo eléctrico $\mathbf{E} = 4 \text{ kV/m } \mathbf{i} + 7 \text{ kV/m } \mathbf{j}$, calcula la diferencia de potencial entre cualquiera pareja de los puntos $A = (0, 0, 0) \text{ cm}$, $B = (1, 0, 0) \text{ cm}$ y $C = (2, 3, 0) \text{ cm}$.

Sol. La diferencia de potencial entre dos puntos P y Q puede calcularse a partir del campo eléctrico \mathbf{E} mediante

$$\Delta V = V_P - V_Q = - \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Si el campo eléctrico \mathbf{E} es uniforme (no depende de la posición), puede sacarse de la integral. Entonces,

$$\Delta V = V_P - V_Q = -\mathbf{E} \cdot \int_Q^P d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)$$

Para el caso del ejercicio,

$$V_B - V_A = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = -(4000, 7000, 0) \cdot (0,01, 0, 0) = -40 \text{ V},$$

$$V_C - V_B = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) = -(4000, 7000, 0) \cdot (0,01; 0,03; 0) = -250 \text{ V},$$

$$\begin{aligned} V_A - V_C &= -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) = -(4000, 7000, 0) \cdot (-0,02, -0,03, 0) \\ &= 80 + 210 = 290 \text{ V}. \end{aligned}$$

2. Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \text{ V/m}$ y los puntos $A = (-2, -3, 1) \text{ m}$ y $B = (1, -2, 3) \text{ m}$, calcula el potencial en el punto B sabiendo que el potencial en el punto A es 5 V .

Sol. La diferencia de potencial entre B y A , dado que el campo eléctrico es uniforme, es

$$V_B - V_A = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = -(-1, 2, -3) \cdot (3, 1, 2) = -(-3 + 2 - 6) = 7 \text{ V}.$$

Dado que $V_A = 5 \text{ V}$,

$$V_B - V_A = 7 \quad \Rightarrow \quad V_B = V_A + 7 = 5 + 7 = 12 \text{ V}.$$

3. Un condensador plano se sitúa perpendicularmente al eje X , con su placa positiva en $x = 0$ y la negativa en $x = 1 \text{ cm}$. Teniendo en cuenta que el campo eléctrico generado entre las placas es igual a $\mathbf{E} = 4 \text{ kV/m } \mathbf{i}$ y que el potencial de la placa positiva es $V_+ = 10 \text{ V}$, calcula

- a) la diferencia de potencial entre la placa positiva y la placa negativa del condensador,
- b) el potencial de los puntos $x = 0,1$ cm y $x = 0,9$ cm,
- c) la posición del punto que se encuentra a potencial nulo.

Sol. En primer lugar, calculemos el potencial de cualquier punto entre las placas del condensador, es decir, el potencial $V(x)$ en los puntos $x \in (0 \text{ cm}, 1 \text{ cm})$. La expresión del potencial en función del campo eléctrico es

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + k,$$

donde se ha usado que \mathbf{E} es uniforme y k es una constante de integración. En el caso del ejercicio,

$$V = - (4000, 0, 0) \cdot (x, y, z) + k = -4000x + k.$$

Para calcular el valor de k , el dato que nos ofrecen es que el potencial de la placa positiva es $V_+ = 10 \text{ V}$. Dado que esta placa se encuentra en $x = 0 \text{ cm}$, tendremos

$$V_+ = 10 = V(0) = -4000 \cdot 0 + k = k$$

Por tanto, el potencial entre las placas del condensador es

$$V(x) = 10 - 4000x$$

con $0 \text{ m} \leq x \leq 0,01 \text{ m}$.

- a) La diferencia de potencial entre las placas del condensador es

$$\Delta V = V_+ - V_- = V(0) - V(1) = (10 - 4000 \cdot 0) - (10 - 4000 \cdot 0,01) = 40 \text{ V}.$$

- b) Para los puntos $x = 0,1$ cm y $x = 0,9$ cm,

$$\begin{aligned} V(0,1 \text{ cm}) &= 10 - 4000 \cdot 0,001 = 6 \text{ V}, \\ V(0,9 \text{ cm}) &= 10 - 4000 \cdot 0,009 = -29 \text{ V}. \end{aligned}$$

- c) Hay muchos puntos en los que el potencial vale cero. Son todos aquéllos entre las placas con coordenada horizontal x_0 :

$$V(x_0) = 0 = 10 - 4000x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{10}{4000} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

4. Se carga un condensador de capacidad 5 nF con una batería de 12 V. Una vez cargado, se desconecta de la batería y se le introduce entre sus placas un dieléctrico con una permitividad relativa igual a 2. En la configuración final, calcula

- a) la carga almacenada en el condensador,
 b) la diferencia de potencial entre sus placas.

Sol. Dado que el condensador se carga con una pila de 12 V, la diferencia de potencial inicial entre sus placas es $\Delta V_0 = 12 \text{ V}$. La carga inicial que almacena el condensador es

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow Q_0 = C_0 \Delta V_0 = 5 \cdot 10^{-9} \cdot 12 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

- a) Al desconectar el condensador de la batería, la carga ha de mantenerse constante (el condensador no está en contacto con nada, de manera que la carga no puede moverse de sus placas). Así, la carga después de introducir el dieléctrico será la misma que antes de hacerlo, es decir,

$$Q = Q_0 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

- b) Al introducir el dieléctrico con permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$, la capacidad del condensador cambia del siguiente modo:

$$C = \varepsilon_r C_0 = 2 \cdot 10^{-9} = 2 \text{ nF.}$$

La diferencia de potencial entre las placas del condensador con el dieléctrico será

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{6 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 6 \text{ V.}$$

5. Se carga un condensador de $1,5 \mu\text{F}$ de capacidad con una pila de 4,5 V. Sin desconectar el condensador de la pila, se inserta entre las placas un dieléctrico. Calcula la permitividad relativa de éste sabiendo que la placa positiva recibe una carga adicional de $5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Sol. La carga almacenada por el condensador sin dieléctrico es

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow Q_0 = C_0 \Delta V_0 = 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4,5 = 6,75 \cdot 10^{-6} \text{ C,}$$

donde $\Delta V_0 = 4,5 \text{ V}$ es la diferencia de potencial proporcionada por la pila para cargar el condensador. Dado que nunca se desconecta el condensador de la pila, la diferencia de potencial tras introducir el dieléctrico ha de mantenerse igual,

$$\Delta V = \Delta V_0 = 4,5 \text{ V}.$$

La permitividad relativa del dieléctrico introducido entre las placas del condensador puede calcularse de la siguiente manera:

$$C = \varepsilon_r C_0 = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{Q}{C_0 \Delta V} = \frac{6,75 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4,5} \simeq 1,74.$$

6. Un condensador está hecho de placas cuadradas, de 1 cm de lado, separadas 1 mm. Tras cargarlo con una batería de 5 V, se desconecta y la separación entre las placas se incrementa en 1 mm. Calcula el incremento de energía.

Sol. La capacidad inicial del condensador plano es

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F}.$$

Dado que se usa una batería de 5 V, la carga almacenada inicialmente es

$$Q_0 = C_0 \Delta V_0 = 8,85 \cdot 10^{-13} \cdot 5 \simeq 4,43 \cdot 10^{-12} \text{ C}.$$

Como se desconecta después el condensador de la batería, su carga permanece igual,

$$Q = Q_0 \simeq 4,43 \cdot 10^{-12} \text{ C}.$$

Su capacidad, al separar las placas hasta 2 mm, es

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} \simeq 4,43 \cdot 10^{-13} \text{ F}.$$

El incremento de energía electrostática resulta

$$\begin{aligned} \Delta U_e &= U_e - U_{e,0} = \frac{1}{2} Q \Delta V - \frac{1}{2} Q_0 \Delta V_0 \\ &= \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{(4,43 \cdot 10^{-12})^2}{2 \cdot 4,43 \cdot 10^{-13}} - \frac{(4,43 \cdot 10^{-12})^2}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-13}} \simeq 1,11 \cdot 10^{-11} \text{ J}. \end{aligned}$$

Esta diferencia de energía electrostática proviene del trabajo realizado por el agente que separa las placas, que ha de vencer la atracción electrostática entre ellas.

7. Se conecta una batería de 12 V a una asociación en paralelo de dos condensadores de cargas $0,5 \mu\text{F}$ y tres de $0,25 \mu\text{F}$. Calcula la carga total almacenada.

Sol. Dado que los condensadores están en paralelo, su capacidad equivalente es

$$C_T = C_1 + \dots + C_5 = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,25 = 1,75 \mu\text{F}.$$

La carga total almacenada por la asociación es

$$Q_T = C_T \Delta V_T = 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ C}.$$

8. Se conecta una batería de 12 V a una asociación en serie de dos condensadores de cargas $0,5 \mu\text{F}$ y tres de $0,25 \mu\text{F}$. Calcula la carga total almacenada.

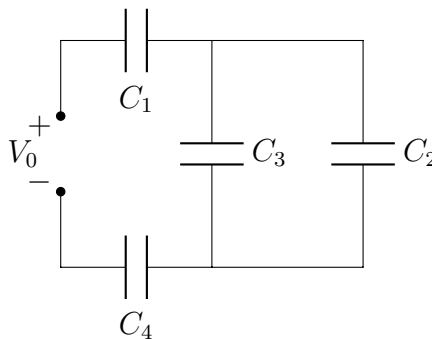
Sol. Dado que los condensadores están en serie, su capacidad equivalente está dada por

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_5} = \frac{2}{0,5} + \frac{3}{0,25} = 14 \quad \Rightarrow \quad C_T = \frac{1}{14} \simeq 0,0714 \mu\text{F}.$$

La carga total almacenada por la asociación es

$$Q_T = C_T \Delta V_T \simeq 0,0714 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \simeq 8,57 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

9. A la asociación de condensadores de la figura, con $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$, $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$, $C_3 = 0,3 \mu\text{F}$ y $C_4 = 0,4 \mu\text{F}$, se le aplica una diferencia de potencial $V_0 = 12 \text{ V}$. Calcula la carga almacenada y la diferencia de potencial en cada condensador.



Sol. Calculamos primero la capacidad equivalente del sistema. Como C_2 y C_3 están en paralelo,

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 0,2 + 0,3 = 0,5 \mu\text{F}.$$

Ahora, C_1 , C_{23} y C_4 están en serie, de modo que

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,4} = 14,5 \Rightarrow C_T = \frac{1}{14,5} \simeq 0,0690 \mu\text{F}.$$

La carga total almacenada en la asociación es

$$Q_T = C_T \Delta V_T \simeq 6,90 \cdot 10^{-8} \cdot 12 = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

Dado que C_1 , C_{23} y C_4 están en serie, almacenan la misma carga que toda la asociación, es decir,

$$Q_1 = Q_{23} = Q_4 \simeq 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

La diferencia de potencial en C_1 , C_{23} y C_4 es

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{Q_1}{C_1} \simeq \frac{8,28 \cdot 10^{-7}}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 8,28 \text{ V}, \\ \Delta V_{23} &= \frac{Q_{23}}{C_{23}} = \frac{8,28 \cdot 10^{-7}}{0,5 \cdot 10^{-6}} \simeq 1,66 \text{ V}, \\ \Delta V_4 &= \frac{Q_4}{C_4} = \frac{8,28 \cdot 10^{-7}}{0,4 \cdot 10^{-6}} \simeq 2,07 \text{ V}. \end{aligned}$$

Y, dado que están en serie, se cumple $\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 12 \text{ V}$ (excepto por errores de redondeo).

Faltan por calcular los valores asociados a C_2 y C_3 . Están en paralelo entre ellos, de modo que

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_{23} \simeq 1,66 \text{ V}.$$

Las cargas almacenadas en C_2 y C_3 son

$$\begin{aligned} Q_2 &= C_2 \Delta V_2 \simeq 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,66 \simeq 3,31 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \\ Q_3 &= C_3 \Delta V_3 \simeq 3 \cdot 10^{-7} \cdot 1,66 \simeq 4,97 \cdot 10^{-7} \text{ C}. \end{aligned}$$

Y, dado que están en paralelo, se cumple $Q_{23} = Q_2 + Q_3 \simeq 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

10. Dos condensadores de idéntica capacidad $C_{01} = C_{02} = 1 \mu\text{F}$ se conectan en paralelo a una pila de 3 V hasta que se cargan completamente, momento en el que se desconectan de ésta. Entonces se introduce en el segundo condensador un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$. Calcula la carga almacenada en cada condensador en la situación final. **Sol.** Antes de desconectar los condensadores de la pila, la capacidad equivalente es

$$C_{T0} = C_{01} + C_{02} = 1 + 1 = 2 \mu\text{F}$$

y la carga total almacenada en la asociación es

$$Q_{T0} = C_{T0} \Delta V_{T0} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

Tras desconectar la asociación de la pila, la carga total ha de seguir siendo la misma, aunque cambie la de cada condensador, así que tendremos

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = Q_{T0} = 6 \mu\text{C.}$$

La capacidad equivalente tras introducir el dieléctrico en el segundo condensador será

$$C_T = C_1 + C_2 = C_{01} + \varepsilon_r C_{02} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \mu\text{F.}$$

Con esto, la diferencia de potencial final en la asociación es

$$\Delta V_T = \frac{Q_T}{C_T} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ V.}$$

Dado que los condensadores están en paralelo, la diferencia de potencial en cada uno de ellos es igual a la que hay en la asociación, es decir,

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_T = 2 \text{ V.}$$

Finalmente, la carga almacenada en cada condensador resulta

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 \Delta V_1 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C,} \\ Q_2 &= C_2 \Delta V_2 = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C,} \end{aligned}$$

Y se cumple que $Q_1 + Q_2 = 6 \mu\text{C}$, como antes de haber desconectado la asociación de condensadores de la batería.

11. Un alambre de aluminio tiene un diámetro de 2 mm. Teniendo en cuenta que la resistividad del aluminio es de $\rho_e = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, calcula la longitud necesaria para obtener una resistencia de $0,5 \Omega$.

Sol. El área de una sección transversal del cable, de diámetro d , es

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Con esto, de la relación entre resistencia y resistividad en el cable, llegamos a

$$R = \rho_e \frac{\ell}{S} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{SR}{\rho_e} = \frac{10^{-6} \cdot 0,5}{2,8 \cdot 10^{-8}} \simeq 17,9 \text{ m}.$$

12. Se utiliza un cable de platino para medir temperaturas. Determina la precisión con la que se ha de medir la resistencia del cable si queremos medir la temperatura con un error máximo de $0,5^\circ\text{C}$. Ten en cuenta que la resistencia del cable a temperatura ambiente es 50Ω y que el coeficiente térmico del platino es de $3,9 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Sol. De la ecuación de la dependencia de la resistencia con la temperatura, podemos escribir

$$\Delta R = R - R_0 = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] - R_0 = R_0 \alpha \Delta T.$$

Por tanto, si el error máximo en la medición de temperatura es $\Delta T = 0,5^\circ\text{C}$, el error máximo en la medición de resistencia ha de ser

$$\Delta R = R_0 \alpha \Delta T = 50 \cdot 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \simeq 0,0975 \Omega.$$

13. Un cable hecho de nicromo, de coeficiente térmico de resistencia de $4,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, está sometido a una diferencia de potencial igual a 220 V . Cuando su temperatura es de 25°C , la intensidad que fluye por el cable es de 3 A . Tras un rato, la temperatura del cable cambia de modo que la intensidad se reduce a $2,8 \text{ A}$. Calcula la nueva temperatura.

Sol. En primer lugar, se calculan las resistencia del cable a 25°C , que llamaremos R_0 y a temperatura T , que llamaremos R , con la ley de Ohm:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{V}{I_0} = \frac{220}{3} \simeq 73,3 \Omega, \\ R &= \frac{V}{I} = \frac{220}{2,8} = 78,6 \Omega. \end{aligned}$$

Usamos ahora la dependencia de la resistencia con la temperatura,

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

para despejar la temperatura final T ,

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} \simeq 25 + \frac{88 - 78,6}{4,1 \cdot 10^{-4} \cdot 78,6} \simeq 199^\circ\text{C}.$$

14. Una bombilla tiene un filamento formado de tungsteno, con coeficiente térmico de resistencia de $3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Teniendo en cuenta que, cuando el filamento está sometido a una diferencia de potencial de 220, disipa 25 W y está a 1800 K, calcula su resistencia a 25°C .

Sol. La resistencia a $T = 1800 \text{ K}$ puede calcularse mediante la expresión de la potencia disipada por una resistencia:

$$P_R = IV = \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V^2}{P_R} = \frac{220^2}{25} = 1936 \Omega.$$

Con este dato, de la dependencia de la resistencia con la temperatura,

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

con $T_0 = 298,15 \text{ K}$ y despejando R_0 , tenemos

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha(T - T_0)} = \frac{1936}{1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot (1800 - 298,15)} \simeq 282 \Omega.$$

15. Calcula la resistencia interna de una batería de 15 V teniendo en cuenta que, al conectarla a una resistencia de 200Ω , la diferencia de potencial entre sus terminales es de 14 V.

Sol. Una batería real funciona como una batería ideal de fem \mathcal{E} en serie con una resistencia interna r . Si conectamos la batería a una resistencia R , las resistencias r y R estarán en serie entre ellas, así que su resistencia equivalente y la corriente por el circuito serán

$$R_{eq} = r + R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

La diferencia de potencial entre los terminales de la batería real cuando es atravesada por la corriente I es

$$V = \mathcal{E} - rI = \mathcal{E} - r \frac{\mathcal{E}}{r + R} = \frac{R\mathcal{E}}{r + R}.$$

Despejando r y usando los datos del ejercicio,

$$r = \frac{R\mathcal{E}}{V} - R = \frac{200 \cdot 15}{14} - 200 \simeq 14,3 \Omega.$$

16. Calcula la fuerza electromotriz y la resistencia interna de una batería sabiendo que, cuando se conecta a una resistencia de 100Ω , la intensidad que la atraviesa es de 15 mA , mientras que si se conecta a una resistencia de 200Ω la intensidad se reduce a 10 mA .

Sol. La resistencia equivalente y la corriente por el circuito son

$$R_{eq} = r + R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Para los dos casos del ejercicio,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, llegamos a

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R_2}{r + R_1},$$

de la que podemos despejar la resistencia interna

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = \frac{(15 \cdot 100) - 10 \cdot 200}{10 - 15} = 100 \Omega.$$

A partir del resultado, la fem de la batería será

$$\mathcal{E} = I_1(r + R_1) = 15 \cdot 10^{-3} \cdot (100 + 200) = 4,5 \text{ V}.$$

17. Conectamos una batería y dos resistencias, $R_1 = 10^6 \Omega$ y $R_2 = 2 \cdot 10^6 \Omega$, en serie. Teniendo en cuenta que la caída de potencial en R_1 es de 5 V , calcula la fuerza electromotriz de la batería supuesta ideal, así como la corriente que circula por el circuito.

Sol. La corriente por el circuito, en el que todos los elementos están en serie, es

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{5}{10^6} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A}.$$

Por tanto, la caída de potencial en R_2 es

$$V_2 = I R_2 = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 = 10 \text{ V.}$$

La fem de la batería es la suma de V_1 y V_2 :

$$\mathcal{E} = V_1 + V_2 = 5 + 10 = 15 \text{ V.}$$

18. Conectamos la asociación de tres resistencias en paralelo, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ y $R_3 = 30 \text{ k}\Omega$, a una batería. Teniendo en cuenta que la corriente a través de R_1 es de 1 mA , calcula la fuerza electromotriz de la batería, supuesta ideal, y la corriente que circula por ella y por las otras resistencias..

Sol. La diferencia de potencial en R_1 es

$$V_1 = I_1 R_1 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 = 10 \text{ V.}$$

Como los elementos están en paralelo, se cumple

$$\mathcal{E} = V_1 = V_2 = V_3 = 10 \text{ V.}$$

Con esto, las corrientes en R_2 y R_3 son

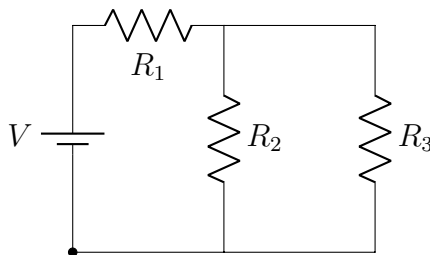
$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{10}{20 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A,}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{10}{30 \cdot 10^3} \simeq 0,333 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

Finalmente, la corriente en la batería es

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \simeq 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3} + 0,333 \cdot 10^{-3} \simeq 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

19. Calcula el valor de la resistencia R_3 en el circuito de la figura para que por la batería circula una intensidad de $0,1 \text{ A}$. Datos: $V = 5 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$ y $R_2 = 50 \Omega$.



Sol. Podemos obtener la resistencia equivalente a partir de la ley de Ohm en la batería,

$$R_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{5}{0,1} = 50 \Omega.$$

Por otro lado, la resistencia equivalente es

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} \quad \Rightarrow \quad R_{23} = R_{eq} - R_1 = 50 - 10 = 40 \Omega,$$

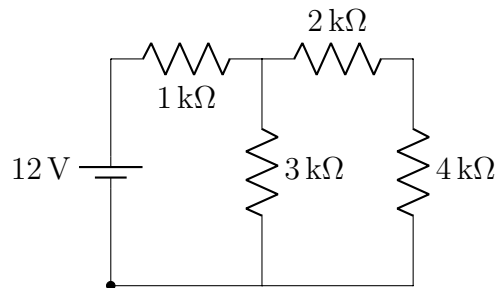
donde R_{23} es la resistencia equivalente a la asociación de R_2 y R_3 . Como R_2 y R_3 están en paralelo, tenemos

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200}.$$

Invirtiendo la última igualdad,

$$R_3 = 200 \Omega.$$

20. Calcula la corriente por la batería y la diferencia de potencial entre los extremos de las resistencias del siguiente circuito.



Sol. Para calcular la corriente total, se puede primero obtener la resistencia equivalente. Se procede desde las resistencias más alejadas a la batería. Las dos últimas están en serie, de manera que

$$R_{24} = 2 + 4 = 6 \text{ k}\Omega.$$

El resultado está en paralelo con la resistencia de 3 kΩ,

$$\frac{1}{R_{324}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R_{324} = 2 \text{ k}\Omega.$$

Finalmente, la anterior está en serie con la resistencia de $1\text{ k}\Omega$, con lo que llegamos a

$$R_{eq} = 2 + 1 = 3\text{ k}\Omega.$$

Ya podemos calcular la corriente total en la batería mediante

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{12}{3 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^{-3}\text{ A}.$$

La caída de potencial en la resistencia de $1\text{ k}\Omega$ es

$$V_1 = I R_1 = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 4\text{ V}.$$

Por tanto, en la resistencia de $3\text{ k}\Omega$, y también en la asociación en serie de las resistencias de $2\text{ k}\Omega$ y $4\text{ k}\Omega$, hay una caída de potencial

$$V_3 = V_{24} = \mathcal{E} - V_1 = 12 - 4 = 8\text{ V}.$$

La corriente en la asociación en serie de las resistencias de $2\text{ k}\Omega$ y $4\text{ k}\Omega$ es

$$I_{24} = \frac{V_{24}}{R_{24}} = \frac{8}{6 \cdot 10^3} \simeq 1,33 \cdot 10^{-3}\text{ A}.$$

Finalmente, con I_{24} obtenemos las caídas de potencial en las resistencias de 2 y $4\text{ k}\Omega$:

$$V_2 = I_{24} R_2 \simeq 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2,66\text{ V},$$

$$V_4 = I_{24} R_4 \simeq 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 \simeq 5,33\text{ V}.$$

21. Los cables de la instalación eléctrica de una casa, de resistividad igual a $1,5 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, tienen un diámetro de 2 mm . Calcula la corriente máxima que pueden transportar para que el calor que desprendan por efecto Joule sea inferior a 1 W/m .

Sol. La potencia convertida en calor Joule en el cable es

$$P = IV = I^2 R = I^2 \rho_e \frac{\ell}{S}.$$

De aquí, la potencia por unidad de longitud de cable (dado que el dato que nos dan está en W/m , se trata de una potencia por unidad de longitud) es

$$\frac{P}{\ell} = \frac{I^2 \rho_e}{\pi r^2},$$

donde $r = d/2$ es el radio de la sección del cable y d es su diámetro, que es lo que nos piden. Dado que la potencia por unidad de longitud ha de ser menor de 1 W/m, llegamos a

$$\frac{I^2 \rho_e}{\pi(d/2)^2} < 1.$$

Despejando la intensidad,

$$I < \sqrt{\frac{\pi d^2}{4\rho_e}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-8}}} \simeq 14,5 \text{ A.}$$

Por tanto, la intensidad máxima I_m es

$$I_m \simeq 14,5 \text{ A.}$$

Capítulo 7

Circuitos de corriente continua

En este tema utilizamos los resultados teóricos del tema anterior para analizar los circuitos de corriente continua. Comenzamos enunciando las leyes de Kirchoff y analizando el circuito divisor de tensión. Con objeto de abordar circuitos más complejos, enunciamos los teoremas de Thévenin y Norton. Finalmente, describimos el comportamiento de algunos circuitos sencillos de corriente continua con condensadores.

7.1. Leyes de Kirchoff

Como vimos en el tema anterior, un *circuito eléctrico* es un conjunto de cables conductores y otros dispositivos que permiten mantener de forma ininterrumpida una corriente eléctrica. Para simplificar su estudio, son especialmente útiles las *leyes de Kirchoff*, que son consecuencia de la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía:

- La *ley de Kirchoff para las corrientes* indica que la suma de las corrientes que entran en un punto de unión de varios elementos de un circuito es igual a la suma de las corrientes que salen de él. Estos puntos de unión se llaman *odos*, como el punto central de la figura 7.1, que muestra una parte de un circuito. En ese nodo, la ley de Kirchoff de las corrientes implica que $I_1 + I_3 + I_4 = I_2$.
- La *ley de Kirchoff para las caídas de tensión* indica que la suma de

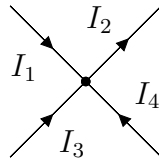


Figura 7.1: Ejemplo de un trozo de circuito con un nodo.

las caídas de tensión a lo largo de un circuito cerrado o *mall*a vale cero. La caída de tensión en cada elemento se toma positiva si recorremos el elemento desde su terminal positivo hasta su terminal negativo, y negativa si entramos por el terminal negativo. Por ejemplo, en la figura 7.2 la ley de Kirchhoff implica que $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 0$.

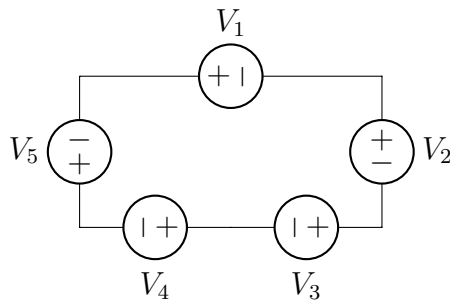


Figura 7.2: Ejemplo de circuito con una malla.

El sentido de recorrido de la malla es indiferente y lo elegimos a priori según nos convenga. Para las resistencias, la caída de tensión se toma positiva en la ley de Kirchhoff si el sentido de la corriente en ellas es el mismo que el sentido en el que estamos recorriendo la malla, y se toma negativa si estamos recorriendo la malla en sentido opuesto al de la corriente en la resistencia.

Circuito divisor de tensión

Un ejemplo sencillo en teoría de circuitos es el *divisor de tensión*. Consta de una *f*uente de tensión conectada a varias resistencias en serie. Podemos verlo montado en la figura 7.3.

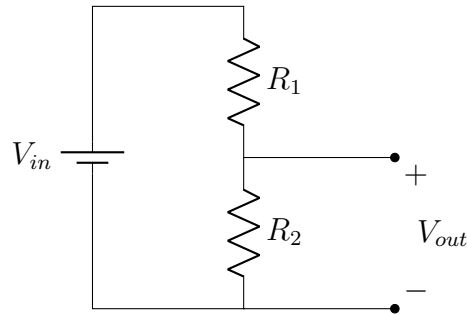


Figura 7.3: Circuito divisor de tensión con dos resistencias.

En el divisor de tensión de la figura 7.3, V_{in} es el *voltaje de entrada* proporcionado por la fuente, es decir, $V_{in} = \mathcal{E}$. La idea es tratar de calcular el valor del llamado *voltaje de salida* V_{out} , que, como vemos en la figura, se corresponde en este caso con la caída de tensión en la resistencia R_2 , es decir, $V_{out} = V_2$.

Usando la ley de Kirchhoff de las mallas, recorriendo ésta en sentido horario, obtenemos

$$-V_{in} + V_1 + V_2 = 0,$$

donde hemos supuesto que la (única) corriente en el circuito es I recorre la malla desde el terminal positivo de la fuente hasta su terminal negativo. Usando la ley de Ohm con las resistencias, tendremos

$$V_1 = IR_1, \quad V_2 = IR_2.$$

Por tanto, la ley de Kirchhoff de la malla nos da la corriente según

$$-V_{in} + I(R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2}.$$

Como podemos ver, el valor de I obtenido es positivo, lo que indica que el sentido elegido anteriormente es el correcto. De aquí

$$V_2 = IR_2 = V_{in} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right),$$

que es la llamada *ecuación del divisor*. Dice simplemente que, en un circuito divisor de tensión, el voltaje de entrada se divide entre todas las resistencias proporcionalmente al valor de cada una. Conviene memorizar esta ecuación,

ya que es extremadamente útil. El valor de la caída de tensión en la otra resistencia sería, con la misma regla,

$$V_1 = V_{in} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

En general, si tenemos un circuito divisor de tensión formado por una fuente ideal de fem \mathcal{E} y un conjunto de N resistencias en serie, la caída de tensión en la resistencia R_i vendrá dada por la expresión

$$V_i = \mathcal{E} \left(\frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \right). \quad (7.1)$$

Ejemplo 7.1.1 *Analícemos el circuito divisor de tensión con tres resistencias, tomando como V_{in} la tensión de la fuente y V_{out} la caída de tensión en la resistencia R_3 .*

Sol. *Hagamos el ejercicio de varias maneras. Procediendo como en el tema anterior, podemos calcular primero la resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$ y, utilizando la ley de Ohm, calcular la corriente I que atraviesa todos los elementos:*

$$I = \frac{V_{in}}{R_{eq}} = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Así, la caída de tensión por la resistencia R_3 es

$$V_{out} = IR_3 = V_{in} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Una segunda manera es mediante la ley de Kirchoff para la malla. Si la recorremos en sentido horario y asumimos que I también circula en sentido horario, llegamos a

$$-V_{in} + V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

Usando la ley de Ohm con las resistencias, la ecuación anterior se escribe

$$-V_{in} + IR_1 + IR_2 + IR_3 = 0,$$

con la que obtenemos la misma expresión de I que con el método anterior, y con ella la misma relación entre V_{out} y V_{in} ya obtenida. Finalmente, también podemos llegar al resultado deseado empleando la ecuación (7.1), donde $i = 3$, $\mathcal{E} = V_{in}$ y $N = 3$.

7.2. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton

Una fracción importante de los circuitos utilizados en la práctica es la de los *circuitos de acoplamiento*. Un acoplamiento es una conexión, a través de dos terminales a y b , entre dos subcircuitos que realizan funciones diferentes. En el caso más simple, un subcircuito realiza funciones de *fuentes*, generando una señal para otro subcircuito que se llama *carga* (o *load*, del inglés). Un subcircuito está conectado al otro mediante cables conductores con puntos de contacto a y b . La situación se puede observar en el esquema de la figura 7.4.

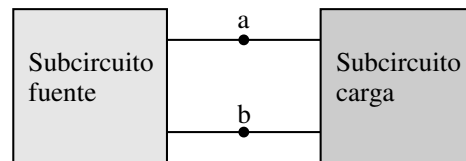


Figura 7.4: Esquema de un circuito con subcircuito fuente y subcircuito carga.

Circuito equivalente de Thévenin

No resulta práctico tener que calcular todas las corrientes y tensiones del circuito total cada vez que hagamos un cambio en el subcircuito de carga. Lo bueno es que en realidad no tenemos que hacerlo en muchos casos (siempre que el subcircuito fuente esté formado por elementos lineales tales como fuentes de tensión o de corriente y resistencias), y esto es debido a la posibilidad de usar el llamado *teorema de Thévenin*:

Cualquier subcircuito fuente lineal, formado por una red de resistencias y fuentes, es equivalente a una única fuente de fem ideal en serie con una única resistencia.

El teorema de Thévenin se ilustra en la figura 7.5. Entre los terminales a y b , toda la red de resistencias y fuentes de tensión que forman el subcircuito fuente puede sustituirse por una única fuente de fem de valor V_{Th} y una única resistencia de valor R_{Th} .

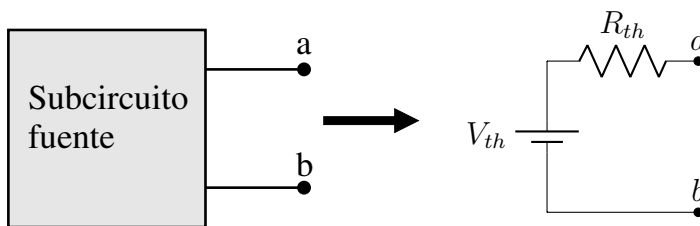


Figura 7.5: Ilustración del teorema de Thévenin.

Veamos cómo calcular los valores de V_{Th} y R_{Th} :

- El *voltaje de Thévenin* V_{Th} es el que hay entre los terminales de salida a y b cuando el subcircuito fuente original se deja en abierto, es decir, cuando no se conecta ningún subcircuito de carga,

$$V_{Th} = V_{abierto}. \quad (7.2)$$

- La *resistencia de Thévenin* R_{Th} es el cociente entre el voltaje de Thévenin V_{Th} y la corriente que hay entre los terminales de salida a y b si se conecta un cortocircuito entre ambos,

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cortocircuito}}. \quad (7.3)$$

Una manera alternativa de calcular R_{Th} es igualarla con la resistencia equivalente entre los terminales a y b cuando todas las fuentes de tensión del circuito original se sustituyen por cortocircuitos (o por las resistencias internas de las fuentes si éstas no son ideales) y las fuentes de corriente del circuito original (dispositivos que veremos un poco más abajo) se sustituyen por circuitos abiertos.

Una vez obtenido el equivalente de Thévenin, podemos conectarle el subcircuito de carga y obtener cualquier cantidad que se nos pida sobre él.

Ejemplo 7.2.1 Supongamos que usamos el circuito de la figura 7.3 como subcircuito fuente. Para ello, conectamos en la salida una resistencia R_3 (subcircuito carga). Usemos el equivalente de Thévenin del subcircuito fuente para calcular la corriente por R_3 .

Sol. Para obtener la resistencia Thévenin, cortocircuitamos la fuente y calculamos la resistencia equivalente del subcircuito fuente respecto de los terminales de salida. En este caso las resistencias R_1 y R_2 están en paralelo por lo que

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Para calcular V_{Th} debemos calcular la caída de potencial en R_2 . Como tenemos un divisor de tensión, usamos los resultados ya conocidos:

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}.$$

Así, respecto de los terminales de salida, el subcircuito carga se puede escribir como el circuito de la figura 7.5 con las expresiones de R_{Th} y V_{Th} anteriores. Para obtener la corriente I en la resistencia R_3 , observemos que, de nuevo, el equivalente de Thévenin y R_3 forman un divisor de tensión. Por ello,

$$I_3 = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_3} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in} \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{R_2 V_{in}}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}.$$

Fuentes de corriente

Una *fente de corriente* ideal es un dispositivo que mantiene cierto valor de la corriente independientemente de lo que se conecte a ella. Hay dispositivos en la práctica que se comportan como fuentes de corriente, construidos con transistores. El símbolo que emplearemos para una fuente de corriente es el que podemos ver en la figura 7.6.

Un ejemplo de uso de fuentes de corriente es el *circuito divisor de corriente*, formado por una fuente de corriente de valor I_t conectada a un conjunto de resistencias en paralelo, como vemos en la figura 7.7.

Para calcular el valor de I_1 e I_2 (las corrientes que circulan por las resistencias), podemos usar la ley de Kirchhoff de los nodos en la confluencia de éstas con I_t y la ley de Kirchhoff de las mallas en la que no contiene a la

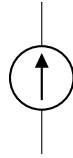


Figura 7.6: Símbolo de fuente de corriente.

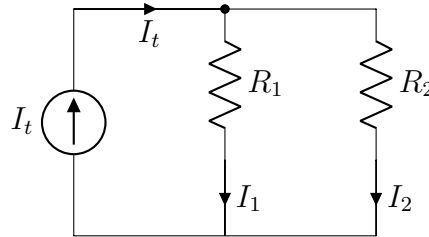


Figura 7.7: Circuito divisor de corriente.

fuentes de corriente. Se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_t &= I_1 + I_2, \\ 0 &= -I_1 R_1 + I_2 R_2, \end{aligned}$$

donde suponemos que el valor I_t de la fuente es conocido. Resolviendo este sistema,

$$I_1 = I_t \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right), \quad I_2 = I_t \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

La expresión general de las corrientes en las resistencias de un divisor de corriente es

$$I_i = I_t \left(\frac{R_{eq}}{R_i} \right), \quad (7.4)$$

donde R_{eq} es la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de las resistencias del divisor y R_i es la resistencia en la que estamos calculando la corriente.

Ejemplo 7.2.2 *Analícemos el divisor de corriente con tres resistencias, añadiendo R_3 en paralelo a las resistencias del circuito de la figura 7.7.*
Sol. *Al igual que hicimos en el ejemplo 7.1.1, podemos proceder, al menos, de tres maneras. En primer lugar, podemos calcular la resistencia*

equivalente. Al estar las tres en paralelo, tenemos

$$R_{eq} = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1}.$$

Así, la caída de tensión en las resistencias es

$$V = I_t R_{eq} = \frac{I_t}{R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}}.$$

Por tanto, la intensidad por cada resistencia es

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{I_t}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}},$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{I_t}{\frac{R_2}{R_1} + 1 + \frac{R_2}{R_3}},$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{I_t}{\frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + 1}.$$

A idénticos resultados llegamos usando la ecuación (7.4). Por último, también podríamos usar las leyes de Kirchoff para analizar el circuito. Por una parte, tendríamos que toda la intensidad que pasa por la fuente de corriente I_t se reparte por las resistencias

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3,$$

y, recorriendo las dos mallas que contienen sólo resistencias en sentido horario:

$$0 = -I_1 R_1 + I_2 R_2,$$

$$0 = -I_2 R_2 + I_3 R_3,$$

donde hemos usado la ley de Ohm para expresar las caídas de tensión en las resistencias como función de las corrientes y las resistencias. Las dos relaciones anteriores no expresan más que el hecho de que las tres resistencias están en paralelo, sus caídas de tensión por tanto son iguales.

Estas mismas relaciones nos permiten, por ejemplo, expresar I_2 e I_3 en función de I_1 . Y, usando luego la ecuación para I_t , llegamos a

$$I_t = I_1 + \frac{R_1}{R_2} I_1 + \frac{R_1}{R_3} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{I_t}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}.$$

Análogamente, llegamos a las ecuaciones para I_2 e I_3 ya obtenidas previamente.

Circuito equivalente de Norton

Además del equivalente de Thévenin existe otra opción para tratar un subcircuito fuente formado por una red de fuentes y resistencias. Se trata del *teorema de Norton*:

Cualquier subcircuito fuente lineal, formado por una red de resistencias y fuentes, es equivalente a una única fuente de corriente ideal en paralelo con una única resistencia.

El teorema de Norton se ilustra en la figura 7.8.

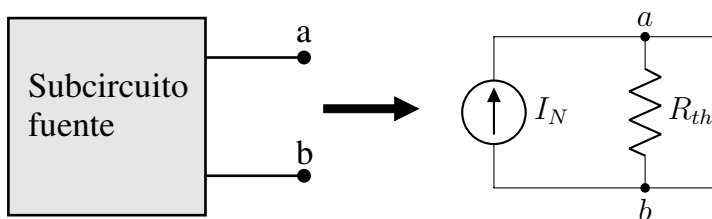


Figura 7.8: Ilustración del teorema de Norton.

Veamos cómo calcular los valores de I_N y R_N :

- La *corriente de Norton* I_N es la que hay entre los terminales de salida a y b del subcircuito fuente original si se conecta un cortocircuito entre ambos,

$$I_N = I_{\text{cortocircuito}}.$$

- La *resistencia de Norton* R_N es el cociente entre el voltaje que hay entre los terminales a y b del subcircuito original si se deja un circuito abierto entre ellos y la corriente de Norton, es decir,

$$R_N = \frac{V_{\text{abierto}}}{I_N}.$$

7.2. CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THÉVENIN Y DE NORTON 177

Dado que, tanto el circuito de Thévenin como el de Norton, son equivalentes al subcircuito fuente original, han de serlo entre ellos. Esto implica que los valores de ambos circuitos han de coincidir, por lo que

$$\begin{aligned}R_N &= R_{Th}, \\I_N &= \frac{V_{Th}}{R_{Th}}, \\V_{Th} &= I_N R_N.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.3 *Volvamos al ejemplo 7.2.1 y resolvámoslo obteniendo el equivalente de Norton del subcircuito fuente.*

Sol. *Debemos calcular el equivalente de Norton de un divisor de tensión, donde se toma la salida entre los terminales de la resistencia R_2 . Primero calculamos la resistencia Norton R_N o resistencia equivalente entre los terminales de salida cuando cortocircuitamos la fuente. Como ésta coincide con la resistencia Thévenin, $R_N = R_{Th}$, que ya calculamos en el ejemplo 7.2.1:*

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

La intensidad Norton es la que hay entre los terminales de salida cuando ésta se cortocircuita. En este caso, la resistencia R_2 queda en paralelo con un corto y por tanto la asociación es equivalente a un corto. Por tanto, nos queda la fuente V_{in} en serie con R_1 , por lo que

$$I_N = \frac{V_{in}}{R_1}.$$

Finalmente, el subcircuito fuente simplificado y la resistencia R_3 forman un divisor de corriente, por lo que, la corriente I_3 a través de R_3 , usando la ecuación (7.4), es

$$I_3 = I_N \frac{(R_3^{-1} + R_N^{-1})^{-1}}{R_3} = \frac{R_2 V_{in}}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)},$$

que es el resultado obtenido en el ejemplo 7.2.1.

7.3. Circuitos de corriente continua con condensadores

En los circuitos que hemos considerado hasta ahora, los voltajes e intensidades permanecían constantes en el tiempo. Sin embargo, es posible que los voltajes e intensidades varíen en el tiempo aunque el circuito sea de corriente continua. Esto ocurre, por ejemplo, si conectamos condensadores descargados a fuentes y resistencias. Los condensadores permiten construir, por ejemplo, circuitos temporizadores (en los que algo ocurre una vez ha ocurrido otra cosa).

Los condensadores se representan, en los diagramas de circuitos, mediante dos barras paralelas de la misma longitud, como ya vimos en el tema anterior. Este símbolo recuerda al de un condensador plano, aunque en realidad hay gran variedad de formas y tamaños. La *ecuación característica* de un condensador la vimos en el tema anterior y era

$$Q = CV,$$

donde Q es la carga acumulada en la placa positiva del condensador, C es su capacidad y V es la diferencia de potencial entre sus placas. Para el estudio de los condensadores en circuitos, se requiere, sin embargo, una relación entre voltaje y corriente. Obtenemos esta relación derivando la ecuación del condensador respecto al tiempo y usando que $I = dQ/dt$. Así llegamos a la ecuación

$$I = C \frac{dV}{dt},$$

siendo I la corriente que va, por el exterior del condensador, desde su placa negativa a su placa positiva, que es el sentido convencional que hemos adoptado. Esta relación expresa que cuanto mayor sea la corriente más deprisa crece el voltaje. Como vemos, *un condensador no satisface la ley de Ohm*.

Descarga de un condensador

Veamos, en primer lugar, un circuito básico de *descarga de un condensador*, que es algo tan sencillo como un condensador cargado conectado a una resistencia, como muestra la figura 7.9.

A la derecha de la figura 7.9 vemos cómo varía el voltaje del condensador con el tiempo. Inicialmente tiene un voltaje V_0 , y una carga $Q_0 = CV_0$. Como

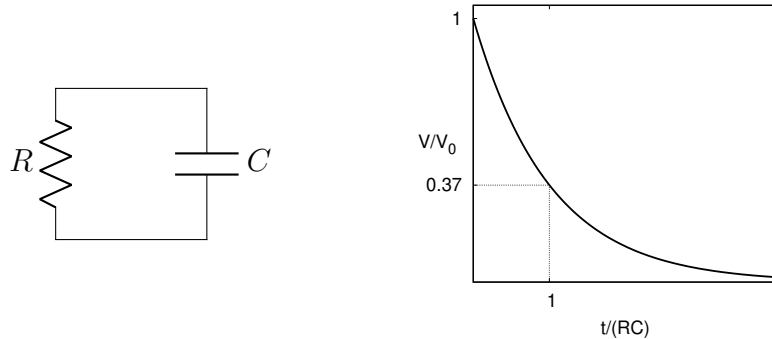


Figura 7.9: Circuito con un condensador y una resistencia (izquierda) y la curva de descarga del condensador (derecha).

está conectado con la resistencia, ésta tiene el mismo voltaje y, por la ley de Ohm, deja pasar una corriente inicial $I_0 = V_0/R$ que comienza a descargar el condensador. Esto ocurre hasta que el voltaje del condensador es cero, el condensador se ha descargado y ya no hay corriente por la resistencia. El tiempo característico de descarga del condensador en este circuito es igual al producto RC y se llama *constante de tiempo* del circuito. De hecho, cuando ha pasado un tiempo $t = RC$, el voltaje ha decaído en el condensador hasta un 37% aproximadamente del valor inicial.

Carga de un condensador

Para *cargar un condensador* que esté inicialmente descargado, se puede conectar a una fuente de tensión en serie con una resistencia, como vemos en la figura 7.10.

Inicialmente, el condensador tiene voltaje nulo y carga nula. Por ello, la resistencia tiene inicialmente todo el voltaje que proporciona la fuente y comienza a dejar pasar una corriente inicial $I_0 = V/R$ que comienza a cargar el condensador. Esto ocurre hasta que el voltaje del condensador iguala el de la fuente, con lo que ningún voltaje cae en la resistencia y la corriente es cero. En ese momento, la carga final del condensador es $Q = CV$. El comportamiento del voltaje del condensador con el tiempo se ve en la figura, y la constante de tiempo del circuito es, de nuevo, el producto RC . A efectos prácticos, después de transcurrido un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo, esto es, $5RC$, el voltaje ha alcanzado el 99% de su valor final y

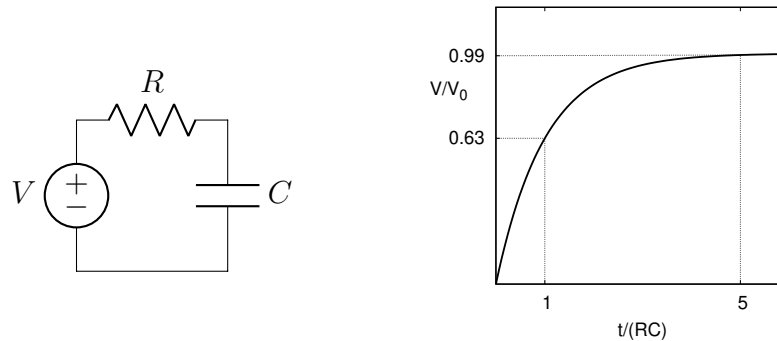


Figura 7.10: Circuito con una fuente de tensión, un condensador y una resistencia (izquierda) y la curva de carga del condensador (derecha).

consideramos cargado el condensador.

Condensadores en régimen estacionario de corriente continua

Finalmente, vamos a tratar también el comportamiento de los condensadores en circuitos de corriente continua en los que los voltajes y las corrientes son constantes. Esta situación se conoce con el nombre de *régimen estacionario*, que es el que hemos estado tratando todo el tiempo en circuitos con resistencias.

El comportamiento de un condensador en el régimen estacionario de corriente continua está dado por su ecuación característica

$$I = C \frac{dV}{dt}, \quad (7.5)$$

pero con V constante. Por tanto, en el estacionario de corriente continua, un condensador cumple

$$I = 0,$$

y es, por tanto, *equivalente a un circuito abierto*.

Ejemplo 7.3.1 Conectamos la salida del circuito de la figura 7.3 a un condensador de capacidad C , inicialmente descargado. Calculemos la constante de tiempo del proceso de carga así como la carga de la pla-

7.3. CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA CON CONDENSADORES 181

ca positiva del condensador cuando está completamente cargado.

Sol. Si reemplazamos el circuito fuente por su equivalente de Thévenin, el resultado es una fuente V_{Th} en serie con una resistencia R_{Th} y un condensador C . Así, usando los resultados del ejemplo 7.2.1, la constante de tiempo vale

$$R_{Th}C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.$$

Por otra parte, cuando el condensador está completamente cargado, se comporta como un abierto. Así, la diferencia de potencial entre sus placas vale V_{Th} , por lo que la carga Q de su placa positiva es

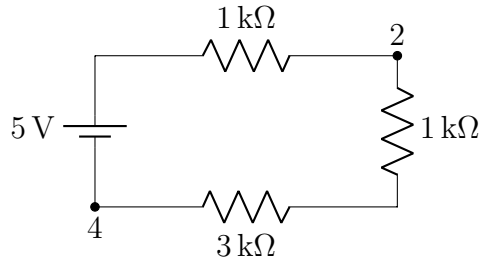
$$Q = CV_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} CV_{in}.$$

7.4. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$V_i = \mathcal{E} \left(\frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \right)$ V_i \mathcal{E}	Divisor de tensión con N resistencias Caída de tensión en la resistencia R_i Fem de la fuente ideal	(7.1)
$V_{Th} = V_{abierto}$ $V_{abierto}$	Voltaje Thévenin Voltaje subcircuito fuente en abierto	(7.2)
$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cortocircuito}}$ $I_{cortocircuito}$	Resistencia Thévenin Intensidad subcircuito fuente en corto	(7.3)
$I_i = I_t \left(\frac{R_{eq}}{R_i} \right)$ I_i I_t R_{eq}	Divisor de corriente Intensidad de la resistencia R_i Intensidad de la fuente de corriente Resistencia equivalente	(7.4)
$I = C \frac{dV}{dt}$ I C V t	Ecuación característica del condensador Intensidad del condensador Capacidad del condensador Voltaje del condensador Tiempo	(7.5)

7.5. Problemas resueltos

1. Determina la diferencia de potencial $V_2 - V_4$ entre los puntos 2 y 4 del circuito de la figura.



Sol. Aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas a la única malla del circuito. Dado que sólo hay una corriente I , resulta

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{E} + IR_1 + IR_2 + IR_3 &= 0 \\
 \Rightarrow I &= \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5}{1000 + 1000 + 3000} = 10^{-3} \text{ A.}
 \end{aligned}$$

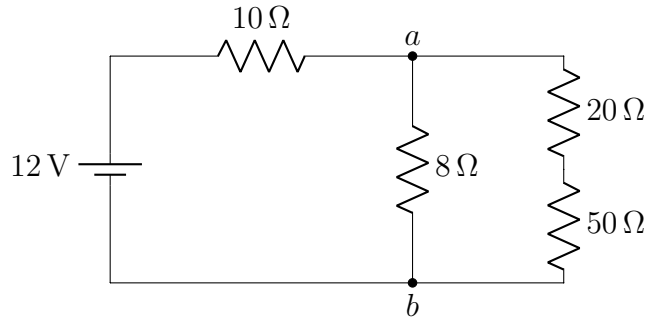
Ya tenemos lo que necesitamos para calcular cualquier diferencia de potencial. Para determinar $V_2 - V_4$, nos dirigimos desde el punto 2 al punto 4 por cualquier camino del circuito y vamos sumando las caídas de potencial que nos encontremos en el camino. Por ejemplo, si vamos por el camino de las resistencias de $1 \text{ k}\Omega$ (derecha) y $3 \text{ k}\Omega$,

$$V_2 - V_4 = IR_2 + IR_3 = 10^{-3} \cdot 10^3 + 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^3 = 4 \text{ V.}$$

Si vamos por el camino de la resistencia de $1 \text{ k}\Omega$ (arriba) y la batería,

$$V_2 - V_4 = -IR_1 + \mathcal{E} = -10^{-3} \cdot 10^3 + 5 = 4 \text{ V.}$$

2. Obtén la potencia disipada por la resistencia de $50\ \Omega$ del circuito de la figura. Además, calcula la diferencia de potencial entre los puntos a y b .



Sol. Para realizar el ejercicio, necesitamos las corrientes a través de las resistencias. Llamaremos I_1 a la corriente que atraviesa la batería y la resistencia $R_1 = 10\ \Omega$, I_2 será la corriente que atraviesa la resistencia $R_2 = 8\ \Omega$ (hacia abajo) e I_3 será la corriente que pasa por $R_3 = 20\ \Omega$ y $R_4 = 50\ \Omega$ (hacia abajo).

NOTA: El sentido de las corrientes se toma inicialmente como queramos. Si alguna resulta negativa después, es que el sentido es el contrario del que habíamos imaginado al principio.

Dado que tenemos 3 incógnitas (las corrientes), nos hacen falta 3 ecuaciones. Planteamos las reglas de Kirchhoff en las dos mallas internas del circuito y en el nodo a ,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ 0 &= -\mathcal{E} + I_1 R_1 + I_2 R_2, \\ 0 &= -I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_4. \end{aligned}$$

Poniendo los datos $\mathcal{E} = 12\ \text{V}$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$ y $R_4 = 50\ \Omega$ en el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene

$$I_1 \simeq 0,903\ \text{A}, \quad I_2 \simeq 0,372\ \text{A}, \quad I_3 = 0,0425\ \text{A}.$$

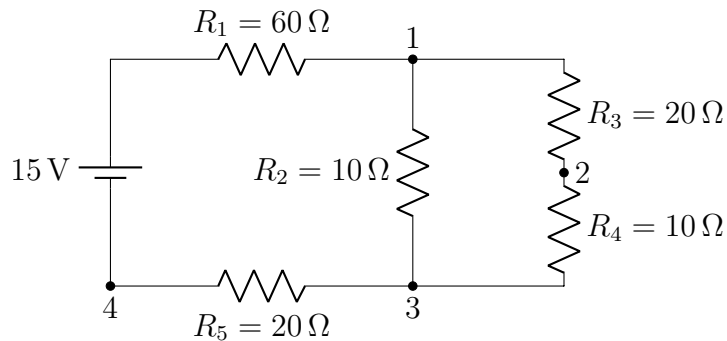
Una vez resuelto el circuito, podemos responder a las preguntas que se nos plantean. La potencia disipada en la resistencia $R_4 = 50\ \Omega$ es

$$P_4 = I_3 V_4 = I_3^2 R_4 \simeq (0,0425)^2 \cdot 50 \simeq 0,0902\ \text{W}.$$

La diferencia de potencial entre los puntos a y b es

$$V_a - V_b = I_2 R_2 \simeq 0,372 \cdot 8 \simeq 2,97 \text{ V}.$$

3. Calcula todas las corrientes del circuito de la figura. Además, calcula la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2, entre 2 y 3, y entre 1 y 4.



Sol. Llamamos I_1 a la corriente que parte del terminal positivo de la batería y pasa por R_1 , I_2 a la que pasa por R_2 hacia abajo e I_3 a la que pasa por R_3 y R_4 hacia abajo. Las reglas de Kirchoff en el nodo 1 y en las dos mallas interiores dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ 0 &= -\mathcal{E} + I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_1 R_5, \\ 0 &= -I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_4. \end{aligned}$$

De estas tres ecuaciones, se obtienen

$$I_1 \simeq 0,171 \text{ A}, \quad I_2 \simeq 0,129 \text{ A} \quad I_3 \simeq 0,0429 \text{ A}.$$

La diferencia de potencial entre 1 y 2 es

$$V_1 - V_2 = I_3 R_3 \simeq 0,857 \text{ V},$$

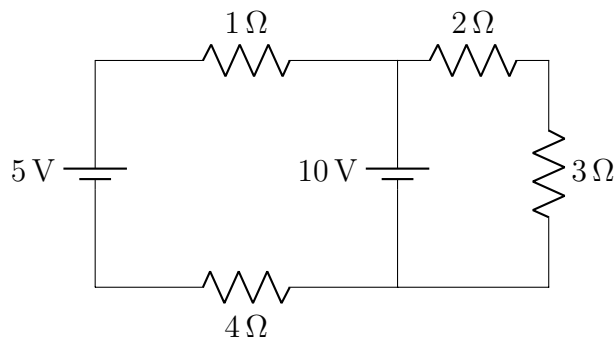
entre 2 y 3 es

$$V_2 - V_3 = I_3 R_4 \simeq 0,429 \text{ V},$$

y entre 1 y 4 es

$$V_1 - V_4 = -I_1 R_1 + \mathcal{E} \simeq 4,71 \text{ V}.$$

4. Calcula la potencia suministrada por la fuente de 10 V así como la potencia disipada por las resistencias del siguiente circuito.



Sol. Para aligerar la notación, escribimos directamente el valor de las resistencias en lugar de nombrarlas con letras. Las reglas de Kirchoff en las dos mallas interiores y en el nodo de arriba dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_{10} &= I_5 + I', \\ 0 &= 4I_5 - 10 + I_5 + 5, \\ 0 &= -10 + 2I' + 3I', \end{aligned}$$

donde I' es la corriente por las resistencias de 2Ω y 3Ω (hacia abajo), I_{10} es la corriente por la batería de 10 V (hacia arriba) e I_5 es la corriente por la batería de 5 V (hacia abajo). Resolviendo el sistema,

$$I_{10} = 3 \text{ A}, \quad I_5 = 1 \text{ A} \quad I' = 2 \text{ A}.$$

La potencia suministrada por la batería de 10 V es igual a la corriente que la atraviesa (de su terminal negativo a su terminal positivo) por su fem, es decir,

$$P_{10} = I_{10} \cdot 10 = 3 \cdot 10 = 30 \text{ W}.$$

La potencia disipada por las resistencias es la suma de las disipadas por cada una de ellas,

$$P_R = I_5^2 \cdot 4 + I_5^2 \cdot 1 + (I')^2 \cdot 2 + (I')^2 \cdot 3 = 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 = 25 \text{ W}.$$

Los resultados anteriores nos dicen que la batería de 10 V proporciona más potencia que la que disipan todas las resistencias. Por tanto, la

batería de 5 V no proporciona ninguna potencia al circuito, sino que consume parte de la potencia que proporciona la de 10 V. La potencia consumida por la batería de 5 V es igual a la que proporciona la batería de 10 V menos la que consumen las resistencias, es decir,

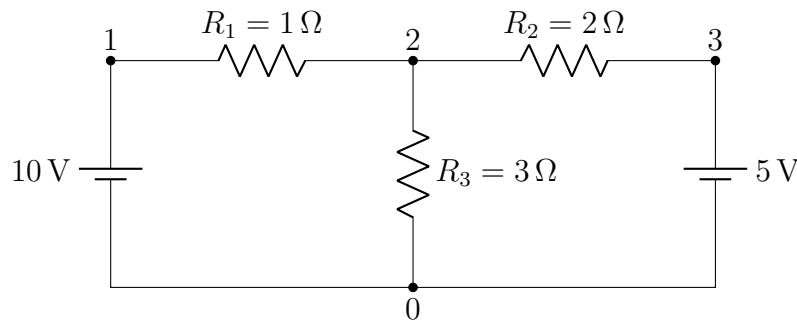
$$P_{5,consumida} = P_{10} - P_R = 30 - 25 = 5 \text{ W}.$$

Para explicar esto, podemos calcular la potencia que proporciona esa misma batería. Será igual a la corriente que la atraviesa del terminal negativo al positivo por su fem. Pero la corriente I_5 va del terminal positivo al negativo de la batería, por lo que

$$P_5 = -I_5 \cdot 5 = -2 \cdot 10 = -5 \text{ W},$$

lo que coincide con el cálculo anterior. De hecho, en este circuito, la batería de 10 V se usa para cargar la batería de 5 V.

5. Calcula el potencial de los puntos 1, 2 y 3 del siguiente circuito teniendo en cuenta que el potencial del punto 0 es cero.



Sol. El potencial del punto 1 se puede calcular fácilmente porque entre él y el punto 0 está solo la batería de $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ V}$, por lo que

$$V_1 = V_1 - V_0 = \mathcal{E}_1 = 10 \text{ V}.$$

Lo mismo ocurre en el punto 3, pero ahora con la batería de $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$:

$$V_3 = V_3 - V_0 = \mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}.$$

Para calcular el potencial del punto 2 nos hace falta la corriente que pasa por alguna resistencia. Suponemos que I_1 es la corriente que parte

del terminal positivo de 10 V, I_2 parte del terminal positivo de 5 V e I' pasa por R_3 de arriba hacia abajo. Por las reglas de Kirchoff en el nodo 2 y las dos mallas interiores, tenemos

$$\begin{aligned} I' &= I_1 + I_2, \\ 0 &= -10 + I_1 + 3I', \\ 0 &= -3I' - 2I_2 + 5. \end{aligned}$$

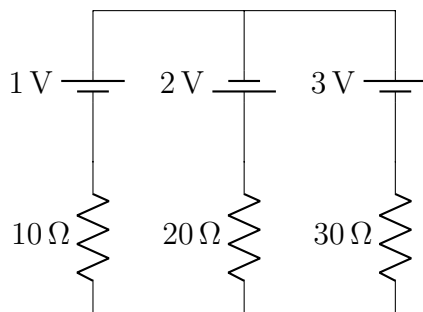
La solución es

$$I_1 = \frac{35}{11} \text{ A}, \quad I_2 = -\frac{10}{11} \text{ A}, \quad I' = \frac{25}{11} \text{ A}.$$

El resultado nos indica que I_2 va en sentido opuesto al que habíamos pensado (recorre la batería de 5 V hacia abajo). Con todo esto, el potencial del punto 2 es

$$V_2 = V_2 - V_0 = I'R_3 = 3\frac{25}{11} \simeq 6,82 \text{ V}.$$

6. Calcula la potencia suministrada o disipada por cada elemento del siguiente circuito.



Sol. Tomamos las intensidades I_1 , I_2 e I_3 de las fuentes de 1 V, 2 V y 3 V saliendo de los polos positivos, respectivamente. Las reglas de Kirchoff en el nodo central superior y las dos mallas interiores dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + I_3, \\ 0 &= 10I_1 - 1 - 2 + 20I_2, \\ 0 &= -20I_2 + 2 + 3 - 30I_3. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, tenemos

$$I_1 = \frac{1}{22} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{7}{55} \text{ A}, \quad I_3 = \frac{9}{110} \text{ A}.$$

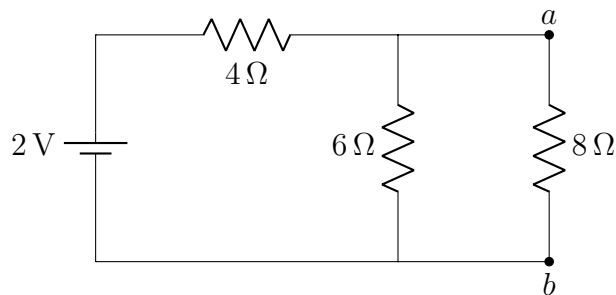
Las potencias proporcionadas por las baterías son

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \cdot I_1 = \frac{1}{22} \simeq 0,0455 \text{ W}, \\ P_2 &= 2I_2 = \frac{14}{55} \simeq 0,255 \text{ W}, \\ P_3 &= 3I_3 = \frac{27}{110} \simeq 0,245 \text{ W}. \end{aligned}$$

Las potencias disipadas por las resistencias son

$$\begin{aligned} P_{10} &= \left(\frac{1}{22}\right)^2 10 \simeq 0,0207 \text{ W}, \\ P_{20} &= \left(\frac{7}{55}\right)^2 20 \simeq 0,324 \text{ W}, \\ P_{30} &= \left(\frac{9}{110}\right)^2 30 \simeq 0,201 \text{ W}. \end{aligned}$$

7. Usando el equivalente de Thévenin del circuito fuente, calcula la corriente en la resistencia de carga conectada entre los terminales a y b .



Sol. Para calcular el equivalente de Thévenin, lo primero es quitar la resistencia de carga entre los terminales a y b . El voltaje de Thévenin es la diferencia de potencial entre los puntos a y b , que coincide con la

caída de potencial en la resistencia de $6\ \Omega$. Dado que el circuito es un divisor de tensión, tenemos

$$V_{Th} = V_a - V_b = \mathcal{E} \frac{R_{ab}}{R_{eq}} = 2 \cdot \frac{6}{4 + 6} = 1,2\text{ V}.$$

Para calcular la resistencia de Thévenin, podemos poner un cortocircuito entre a y b . En la asociación en paralelo entre ese cortocircuito (con resistencia nula) y la resistencia de $6\ \Omega$, toda la corriente pasa por el cortocircuito. Por tanto, la corriente entre a y b coincide con la que habría en el circuito sin la resistencia de $6\ \Omega$, que es

$$I_{\text{cortocircuito}} = \frac{2}{4} = 0,5\text{ A}.$$

De aquí,

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{\text{cortocircuito}}} = \frac{1,2}{0,5} = 2,4\ \Omega.$$

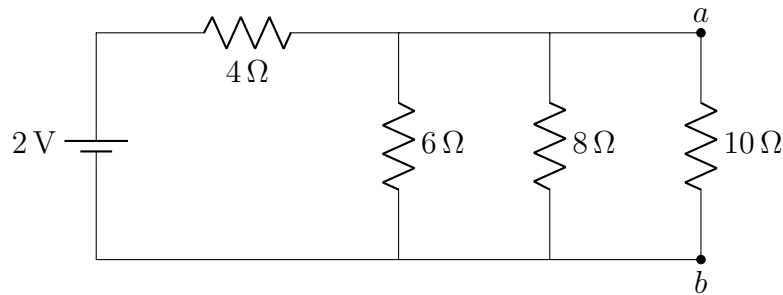
De manera alternativa, podemos calcular la resistencia de Thévenin como la equivalente entre a y b cuando se reemplaza la batería de 2 V por un cortocircuito. Entonces, las resistencias de $4\ \Omega$ y $6\ \Omega$ están en paralelo y resulta

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \quad \Rightarrow \quad R_{Th} = 2,4\ \Omega.$$

Ya tenemos calculado el equivalente de Thévenin, así que volvemos a colocar la resistencia de carga entre a y b . El ejercicio nos pide la corriente a través de esa resistencia. En el circuito que nos ha quedado, las resistencias R_{Th} y la de carga R_L están en serie. La corriente en ese circuito es

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{1,2}{2,4 + 8} \simeq 0,115\text{ A}.$$

8. Usando el equivalente de Norton del circuito fuente, calcula la corriente en la resistencia de carga.



Sol. Primero, quitamos la resistencia de carga. La resistencia de Norton (que es igual a la de Thévenin) puede obtenerse reemplazando la batería por un cortocircuito y calculando la resistencia equivalente de la configuración resultante entre a y b . Como las tres resistencias están en paralelo, tenemos

$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24} \quad \Rightarrow \quad R_N = \frac{24}{13} \simeq 1,85 \Omega.$$

Por otro lado, la corriente de Norton es la que hay entre a y b cuando ponemos un cortocircuito entre ellos. Al ponerlo, este cortocircuito está en paralelo con las resistencias de 6Ω y 8Ω , por lo que no pasa corriente por estas dos resistencias. Así, I_N es la corriente total en un circuito en el que sólo está la resistencia de 4Ω ,

$$I_N = I_{\text{cortocircuito}} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ A.}$$

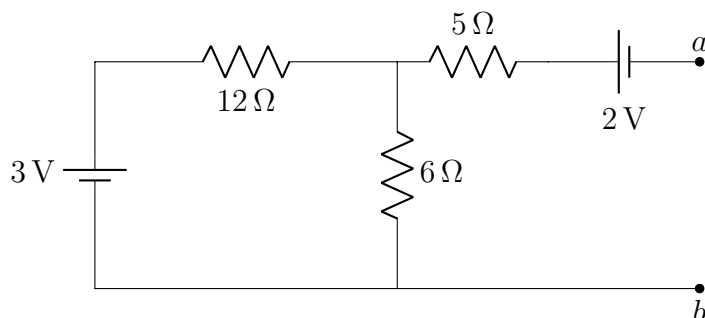
Una vez calculado el equivalente de Norton, colocamos en él la resistencia de carga $R_L = 10 \Omega$. Este circuito es un divisor de corriente, con la fuente de corriente $I_N = 0,5 \text{ A}$ en paralelo con la resistencia de Norton $R_N \simeq 1,85 \Omega$ y la resistencia de carga $R_L = 10 \Omega$. La resistencia equivalente de la asociación en paralelo de R_N y R_L es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_L} = \frac{13}{24} + \frac{1}{10} = \frac{77}{120} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{120}{77} \simeq 1,56 \Omega.$$

Por la ecuación del divisor, la corriente a través de R_L es

$$I_L = I_N \frac{R_{eq}}{R_L} = 0,5 \cdot \frac{120}{77 \cdot 10} \simeq 0,0779 \text{ A.}$$

9. Obtén el equivalente de Thévenin respecto de los terminales a y b del siguiente subcircuito fuente.



Sol. Para obtener el voltaje de Thévenin, hemos de calcular la diferencia de potencial entre a y b . Dado que no pasa corriente por la batería de 2 V ni por la resistencia de 5 Ω , la corriente por la resistencia de 6 Ω es

$$I_6 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_{eq}} = \frac{3}{12 + 6} = \frac{1}{6} \text{ A.}$$

Con esto,

$$V_a - V_b = -\mathcal{E}_2 + I_6 R_6 = -2 + \left(\frac{1}{6} \cdot 6\right) = -1 \text{ V.}$$

Por tanto, resulta que el terminal positivo del equivalente de Thévenin no es a , sino b . El voltaje de Thévenin es

$$V_{Th} = V_b - V_a = 1 \text{ V.}$$

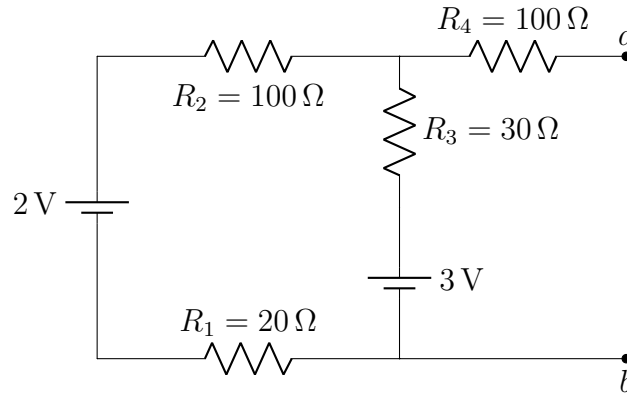
Para la resistencia de Thévenin, sustituimos todas las baterías por cortocircuitos. Las resistencias de 12 Ω y 6 Ω están en paralelo, de modo que

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} \Rightarrow R_{12} = 4 \Omega.$$

Dado que R_{12} está en serie con la resistencia de 5 Ω ,

$$R_{Th} = R_{12} + R_5 = 4 + 5 = 9 \Omega.$$

10. Calcula el equivalente de Norton del siguiente subcircuito fuente.



Sol. Para obtener la resistencia de Norton, sustituimos todas las baterías por cortocircuitos y calculamos la resistencia equivalente entre a y b . Las resistencias R_1 y R_2 están en serie, de manera que

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 20 + 100 = 120 \Omega.$$

R_{12} está en paralelo con R_3 :

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{120} + \frac{1}{30} = \frac{5}{120} \Rightarrow R_{123} = \frac{120}{5} = 24 \Omega.$$

Finalmente, R_{123} está en serie con R_4 , por lo que

$$R_N = R_{123} + R_4 = 24 + 100 = 124 \Omega.$$

La corriente de Norton es la corriente entre a y b cuando se coloca un cortocircuito entre esos puntos. Para este caso, sin embargo, es mucho más sencillo calcular el voltaje en circuito abierto entre a y b (voltaje de Thévenin) y luego usar la resistencia de Norton que ya tenemos. Dado que no hay corriente en R_4 , la corriente en la malla cerrada (tomada en sentido antihorario), usando la regla de Kirchhoff, está dada por

$$0 = 2 + I(20 + 100 + 30) - 3 \Rightarrow I = \frac{1}{150} \text{ A.}$$

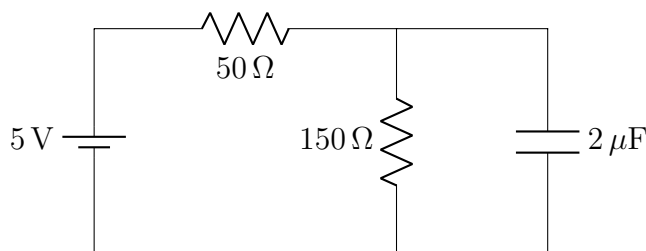
Por tanto,

$$V_{abierto} = V_a - V_b = -I30 + 3 = -\frac{30}{150} + 3 = \frac{14}{5} \text{ V.}$$

Y, usando la resistencia de Norton, tenemos

$$I_N = \frac{V_{abierto}}{R_N} = \frac{14}{5 \cdot 124} \simeq 0,0223 \text{ A.}$$

11. En el circuito de la figura, $V_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$, $C = 4 \mu\text{F}$.
12. Teniendo en cuenta que el condensador del siguiente circuito está inicialmente descargado, calcula la constante de tiempo del proceso de carga, así como la carga de su placa positiva una vez finalizado el proceso de carga.



Sol. Sabemos que la constante de tiempo de la carga de un condensador conectado a una batería y a una resistencia en serie es RC . Pero, en este circuito, tenemos dos resistencias. Para reducirlo, hacemos el equivalente de Thévenin quitando el condensador. El voltaje de Thévenin será el de la resistencia de 150Ω en el divisor de tensión resultante:

$$V_{Th} = 5 \frac{150}{50 + 150} = 10 \cdot \frac{300}{100 + 300} = 3,75 \text{ V.}$$

La resistencia de Thévenin, sustituyendo la batería por un cortocircuito, estará dada por

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = \frac{4}{150} \Rightarrow R_{Th} = \frac{150}{4} = 37,5 \Omega.$$

Una vez calculado el equivalente de Thévenin, colocamos en él el condensador. Tenemos ahora una batería con $V_{Th} = 3,75 \text{ V}$ en serie con una resistencia $R_{Th} = 37,5 \Omega$ y un condensador $C = 2 \mu\text{F}$. La constante de tiempo del proceso de carga será

$$RC = 37,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

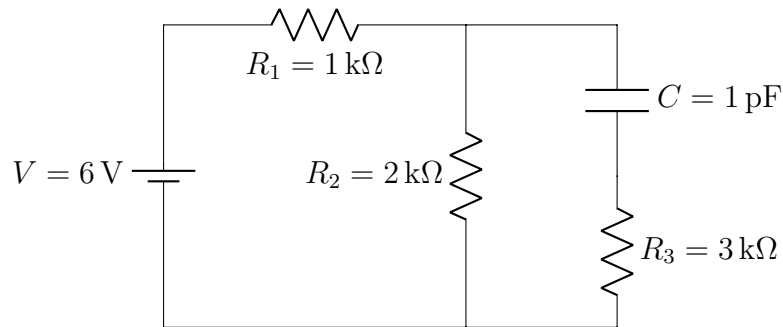
Una vez cargado el condensador, ya no hay corriente en el equivalente de Thévenin y el voltaje del condensador se iguala al voltaje de la batería, por lo que

$$V_C = V_{Th} = 3,75 \text{ V.}$$

De aquí, la carga del condensador resulta

$$C = \frac{Q}{V_C} \Rightarrow Q = CV_C = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3,75 = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

13. Determina la carga del condensador una vez está completamente cargado.



Sol. En el régimen estacionario, por la rama en la que está el condensador no circula corriente (C se comporta como un circuito abierto), de modo que no hay corriente por R_3 . La diferencia de potencial V_C entre las placas del condensador es, entonces, igual a la caída de potencial V_2 en R_2 . Dado que el circuito formado por V , R_1 y R_2 es un divisor de tensión,

$$V_C = V_2 = V \frac{R_2}{R_{eq}} = V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6 \frac{2}{3} = 4 \text{ V.}$$

Con esto, la carga de la plaza positiva del condensador resulta

$$Q = CV_C = 10^{-12} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ C.}$$

Capítulo 8

Magnetismo e inducción

Este tema incluye algunos resultados básicos sobre magnetoestática. Comenzamos analizando el comportamiento de algunos materiales como los imanes y solenoides. Esto nos lleva a definir el campo magnético y a considerar su forma más sencilla: el campo magnético generado por un solenoide. A continuación, enunciamos la ley de Lenz-Faraday que explica cómo se puede inducir una fuerza electromotriz por medio de un flujo magnético variable en el tiempo. Como aplicación del resultado anterior, analizamos el fenómeno de autoinducción, lo que nos llevará al concepto de autoinductancia. Finalmente, estudiamos los generadores de corriente alterna y los transformadores.

8.1. Imanes y solenoides

En la naturaleza existen materiales que, sin estar cargados, atraen y repelen a otros. Se les llama *imanes* y, a la propiedad que presentan, *magnetismo*.

Todo imán tiene dos polos, llamados norte y sur magnéticos, de tal forma que los polos del mismo tipo se repelen y los polos de tipo opuesto se atraen. Los imanes crean *campos magnéticos* a su alrededor. Estos campos magnéticos son campos vectoriales. Las *líneas de campo magnético*, que se definen de manera que en cada punto son tangentes al vector campo magnético, son cerradas. Los polos norte son manantiales de líneas de campo magnético y los polos sur son sumideros de líneas de campo magnético. Las líneas se cierran

por el interior del imán.

Denotaremos el campo magnético creado por determinada fuente, como un imán, mediante la notación \mathbf{B} . La unidad de campo magnético es el *tesla* (T).

Campo magnético de un solenoide

Las cargas eléctricas en movimiento y las corrientes eléctricas son *fuentes de campo magnético*, es decir, son responsables de crear campos magnéticos. Sin embargo, para nuestras aplicaciones es suficiente considerar aquí un caso particular especialmente sencillo, que es el campo magnético creado por un solenoide.

Un *solenoid* es una bobina (geoméricamente, un cilindro de longitud ℓ y sección circular de radio R) sobre la cual se enrolla un alambre conductor dando N vueltas. Este dispositivo proporciona un *campo magnético intenso y aproximadamente uniforme en la región acotada por el alambre enrollado*. Es, por tanto, el análogo magnético al campo eléctrico de un condensador. Un esquema de un solenoide y las líneas de campo magnético que produce se ven en la figura 8.1.

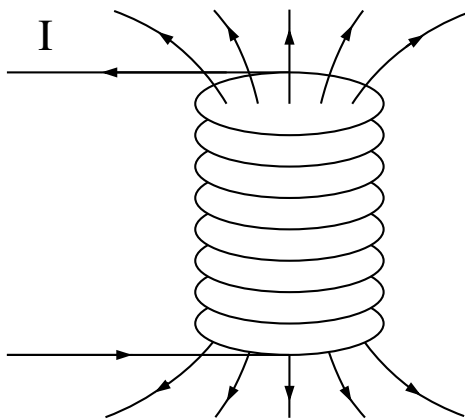


Figura 8.1: Representación de un solenoide y el campo magnético que genera.

Cuando una corriente eléctrica I recorre un solenoide largo y de muchas vueltas por unidad de longitud, representadas por la cantidad $n = N/\ell$, las líneas magnéticas en el interior del solenoide son aproximadamente paralelas al eje del solenoide y están muy juntas unas de otras, es decir, el campo

magnético es intenso y aproximadamente uniforme. Fuera del solenoide, las líneas están mucho más espaciadas, indicando que el campo es mucho menos intenso. En general, presentan *la misma configuración que las líneas creadas por un imán permanente de la misma forma y tamaño*.

El campo magnético en el interior del solenoide se puede expresar de la forma que sigue. Supongamos que el eje del solenoide es el eje z , es decir, el eje z está a lo largo del pulgar de nuestra mano derecha cuando los dedos mayores de la misma mano recorren la superficie del solenoide en el sentido de la corriente eléctrica. Entonces

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{k}, \quad (8.1)$$

donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ es la *permeabilidad magnética del vacío*.

Como vemos en la expresión anterior, el campo magnético interior de un solenoide es un *campo uniforme*. Este campo se puede hacer aún mucho mayor si colocamos en el interior del solenoide un *núcleo ferromagnético*. Este dispositivo (un solenoide largo con un núcleo ferromagnético) se llama *electroimán*.

Ejemplo 8.1.1 *Calculemos el módulo del campo magnético generado por un solenoide de 10 cm de longitud compuesto por 100 vueltas de cable cuando por éste circula una corriente de 0,1 A.*

Sol. *Tenemos que $n = \frac{100}{0,1} = 10^4 \text{ m}^{-1}$ e $I = 0,1 \text{ A}$. Usando la ecuación (8.1) en forma escalar, llegamos a que el módulo del campo magnético es*

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 0,1 = 4\pi \cdot 10^{-4} \simeq 1,26 \text{ mT}.$$

8.2. Inducción electromagnética

De forma independiente, Faraday y Henry descubrieron que un campo magnético variable en el tiempo podía producir una fuerza electromotriz. Por ejemplo, si colocamos un imán permanente cerca de una espira y no hay movimiento relativo entre ellos, la corriente que circula por la espira es cero pues no está conectada a ninguna fuente de fem. Pero si aproximamos el imán a la espira se comprueba que aparece una corriente en ella, como se representa en la figura 8.2. Si alejamos el imán, la corriente tiene sentido contrario. Y también se generaría una corriente en la espira si movemos la espira pero no el imán. La corriente en la espira se llama *corriente inducida*, pues ha

sido producida por un campo magnético variable en el tiempo. Y la misma espira se comporta como una fuente de *fem inducida* capaz de producir esa corriente.

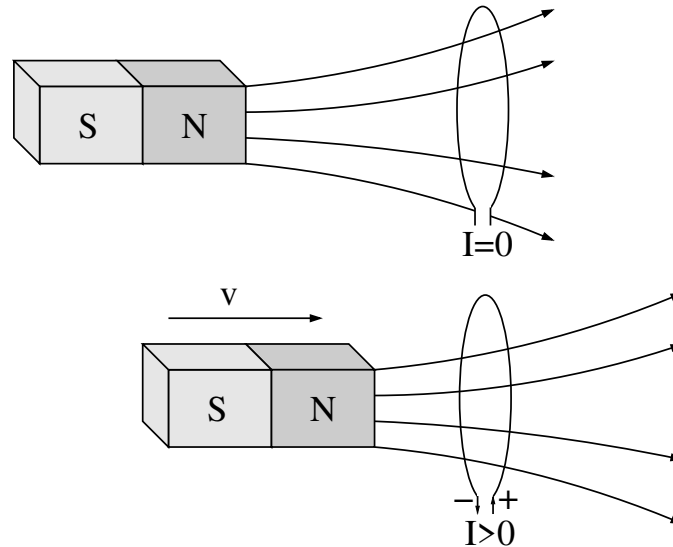


Figura 8.2: Inducción electromagnética al acercar un imán a una espira. Si la velocidad relativa del imán a la espira es cero, entonces la intensidad inducida es cero (figura superior). En otro caso la intensidad es no nula (figura inferior).

El fenómeno de producción de una fem con ayuda de un campo magnético se llama *inducción electromagnética*.

Ley de Faraday

La *ley de Faraday* de la inducción electromagnética relaciona la fem inducida en un circuito C con el cambio de flujo magnético a través de la superficie S encerrada por él. Se escribe

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (8.2)$$

En esta expresión, Φ_m es el *flujo magnético* a través de la superficie S encerrada por C . El flujo se calcula mediante la integral de superficie

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (8.3)$$

donde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, siendo \mathbf{n} un vector unitario normal a la superficie S en cada punto y dS el elemento de área en ese punto. La unidad de flujo magnético es el *weber*, definido de manera que $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

Si el campo magnético es *uniforme* en la superficie S , que será el caso más usual en las aplicaciones que vamos a tratar, el flujo magnético se puede escribir

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) S.$$

El signo menos que aparece en la ley de Faraday indica que la fem inducida *se opone a la causa que la produce* (que es la variación del flujo magnético). Una manera de comprender esto es a través de la ley de Lenz.

Ley de Lenz

La ley de Lenz explica el sentido de la corriente inducida en un circuito. Esta ley se basa en notar que el campo magnético neto que penetra un circuito está formado por dos contribuciones. La primera es el *campo magnético externo* que produce un cambio en el flujo y da lugar a la fem inducida y a la corriente inducida. Además, existe una segunda contribución, dada por el campo magnético creado por la propia corriente inducida, que se llama *campo magnético inducido*.

La *ley de Lenz* dice que la fem inducida resultante de un flujo magnético variable tiene tal polaridad que la corriente inducida genera un campo magnético inducido que se opone a la variación del flujo magnético original.

Tratemos de encontrar la dirección de la corriente inducida en una espira por un imán permanente que se acerca a ella. El flujo magnético a través de la espira crece porque el campo magnético del imán sobre la espira crece al acercarse. Así, el campo magnético inducido \mathbf{B}_{ind} debe tener un sentido contrario al crecimiento del flujo, por la ley de Lenz, y debe entonces dirigirse hacia abajo. Para crear un campo magnético inducido hacia abajo, el sentido de la corriente inducida debe ser horario, como se ve aplicando la regla del sacacorchos. Este sentido de la corriente nos da la polaridad de la fem inducida (indicada por los signos $+$ y $-$ en la figura 8.3). En el caso en el que el imán se alejase de la espira, el sentido de la corriente inducida se invertiría.

Ejemplo 8.2.1 Consideremos una espira cuadrada de lado 10 cm inmersa en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 5\mathbf{k} \text{ mT}$. El ángulo α que

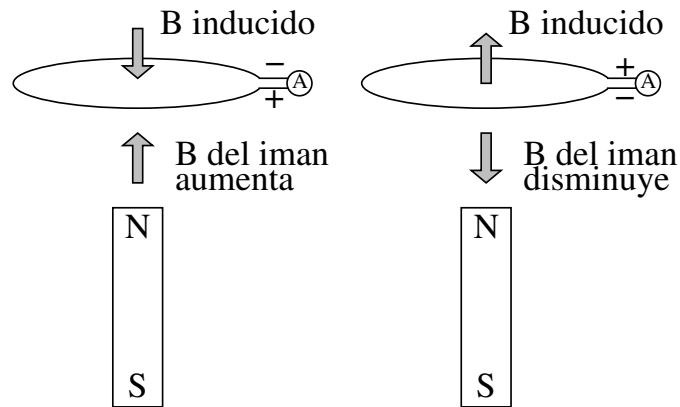


Figura 8.3: Campo magnético inducido en una espira al acercar (izquierda) y alejar (derecha) un imán.

forma el vector unitario normal a la espira \mathbf{n} con el campo magnético \mathbf{B} varía con el tiempo como $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}t$, donde t se mide en segundos. Calculemos la fem inducida \mathcal{E}_{ind} en la espira.

Sol. Para obtener el \mathcal{E}_{ind} primero debemos conocer el flujo magnético Φ_m del campo magnético \mathbf{B} a través de la espira como función del tiempo. Dado que \mathbf{B} es uniforme, tenemos

$$\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}S = 5 \cos(\alpha)0,1^2 = 0,05 \cos(\alpha) \text{ Wb},$$

donde α es una función conocida del tiempo. Usando ahora la ley de Faraday, obtenemos el resultado deseado

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0,05 \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\pi}{40} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ V}.$$

8.3. Autoinducción

La autoinducción es el fenómeno por el cual un circuito por el que pasa una corriente variable induce una fem en el mismo circuito que se opone a la variación de flujo original.

Como vemos en la figura 8.4, consideremos un circuito por el que circula una corriente I variable. Esta corriente crea un campo magnético variable y

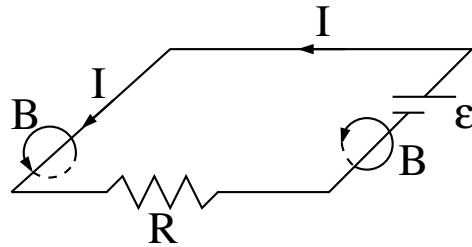


Figura 8.4: Ejemplo de autoinducción en un circuito simple.

un flujo variable a través del propio circuito. Según la ley de Faraday, habrá una fem inducida en el circuito, y su valor será

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt},$$

donde L es la *autoinductancia* del circuito, cuya unidad es el *henrio*, 1 H, y que se define como

$$L = \frac{\Phi_m}{I}.$$

La autoinductancia sólo depende de la geometría del circuito y de las propiedades de los materiales de los que están compuestos las bobinas que tenga el circuito. Una bobina o solenoide con muchas vueltas y un *núcleo ferromagnético* posee una L mucho mayor que la de un circuito corriente, en el que se suele despreciar su autoinductancia. La bobina se llama entonces *inductor* y es un elemento de circuito como las resistencias y los condensadores.

Observamos que la fem autoinducida se opone a la causa que la produce, que es la fem variable del generador conectado al circuito. Podemos, pues, considerar un inductor como un elemento en el que cae una tensión V_L . La *ecuación característica* del inductor es entonces

$$V_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (8.4)$$

y así aparece normalmente en teoría de circuitos.

Ejemplo 8.3.1 *Calculemos la autoinductancia del solenoide del ejemplo 8.1.1.*

Sol. *Supongamos que por el cable del solenoide circula una corriente estacionaria I , cuyo valor no tiene por qué ser el del ejemplo 8.1.1. El*

campo magnético en su interior es

$$B = \mu_0 n I,$$

donde n es el número de vueltas o espiras por longitud $n = N/\ell$. El flujo magnético total de este campo a través de todas las espiras que forman el solenoide resulta

$$\Phi_m = BNS,$$

donde S es el área de las espiras. Así, la autoinductancia resulta

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \frac{N}{\ell} I N S}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{100^2 0,1^2}{0,1} \simeq 1,26 \text{ mH}.$$

El resultado obtenido no depende de I , sino de factores geométricos del solenoide (longitud, sección transversal y número de espiras).

Energía magnética almacenada por un inductor

Igual que un condensador almacena energía eléctrica, un inductor almacena energía magnética cuando es atravesado por una corriente variable. Esta energía proviene del trabajo realizado por la fuente de fem para establecer una corriente a través del inductor. La *energía magnética* U_m almacenada por el inductor es

$$U_m = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.5)$$

Otra manera de interpretar este resultado es que, al establecer una corriente a través del inductor, éste crea un campo magnético, de manera que el trabajo realizado para establecer la corriente es también el trabajo necesario para crear ese campo magnético. La energía almacenada en el inductor es por tanto la *energía del campo magnético*.

Ejemplo 8.3.2 Calculemos la energía almacenada por el solenoide del ejemplo 8.1.1.

Sol. Si usamos la fórmula (8.5), necesitamos la autoinductancia que hemos calculado en el ejemplo 8.3.1 y el valor de $I = 0,1 \text{ A}$ del enunciado

del ejemplo 8.1.1:

$$U_m = \frac{LI^2}{2} \simeq \frac{1}{2} 1,26 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1^2 \simeq 6,28 \cdot 10^{-6} J.$$

8.4. Generadores eléctricos de corriente alterna

Prácticamente toda la energía eléctrica que se utiliza en el mundo se produce en forma de *corriente alterna* (ac) a través de *generadores eléctricos*. Los generadores eléctricos producen energía eléctrica a partir de un trabajo mecánico. El funcionamiento de estos generadores se basa en la inducción electromagnética para producir una fem de tipo armónico (es decir, una *fem alterna*) cuando enormes bobinas rotan en presencia de campos magnéticos producidos por electroimanes.

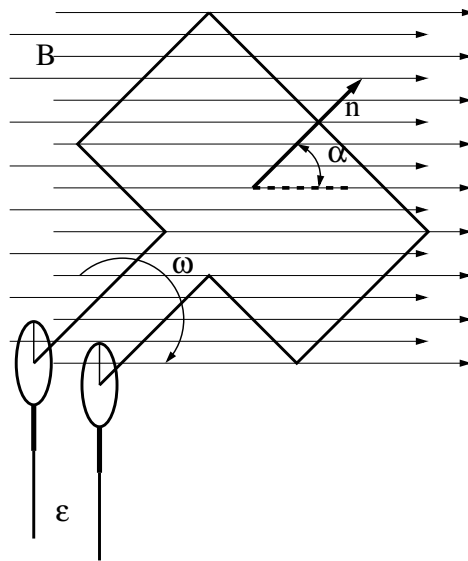


Figura 8.5: Esquema de un generador eléctrico de corriente alterna.

Como vemos en la figura 8.5, un generador eléctrico simplificado es una espira de N vueltas y área S que rota con velocidad angular constante ω entre los polos de un electroimán. El electroimán produce un campo magnético uniforme \mathbf{B} . Los terminales de la espira están conectados a unos anillos

metálicos deslizantes que giran al rotar la espira. Cada uno de estos anillos roza a una escobilla de grafito (se usa este material para evitar chispazos), de manera que la diferencia de potencial entre los terminales de la espira, que es la misma que hay entre los anillos deslizantes, es igual a la diferencia de potencial entre las escobillas de grafito. Las escobillas son los terminales del circuito externo al que el generador alimenta.

Consideremos una situación inicial en la que el vector normal a la espira forma un ángulo α_0 con el campo magnético uniforme del electroimán. Empezamos ahora a hacer un trabajo mecánico rotando la espira con velocidad angular ω constante. Esto significa que el ángulo α que forman la normal a la espira y el campo magnético del electroimán varía en el tiempo según la expresión

$$\alpha = \omega t + \alpha_0.$$

El flujo magnético Φ_m a través de la espira es

$$\Phi_m = NSB \cos \alpha = NSB \cos(\omega t + \alpha_0).$$

Según la ley de Faraday, se induce entonces una fem \mathcal{E} en la espira dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = NSB\omega \sin(\alpha_0 + \omega t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0),$$

donde

$$\mathcal{E}_0 = NSB\omega \tag{8.6}$$

es una constante característica del generador, llamada amplitud o *valor de pico* de la fem sinusoidal. La unidad de fem de pico es 1 V. En consecuencia, un generador eléctrico transforma energía mecánica, la necesaria para rotar la espira, en energía eléctrica.

Como vemos, la fem \mathcal{E} es una función periódica armónica de amplitud \mathcal{E}_0 y *frecuencia angular* ω . La *frecuencia* f de la fem \mathcal{E} es $f = \omega/(2\pi)$, que es el número de veces que la fem alcanza su valor máximo en un segundo, contando a partir del momento en que tiene ese mismo valor. El inverso de la frecuencia $T = 2\pi/\omega = 1/f$ es el *periodo* de la fem, el tiempo que pasa desde que la fem tiene su valor máximo hasta que vuelve a tenerlo. En la práctica, es común dar las características de un generador de corriente alterna mediante su fem de pico \mathcal{E}_0 y su frecuencia f .

La fem proporcionada por un generador eléctrico cambia su polaridad a medida que rota la espira, lo cual es propio de los *circuitos de corriente*

alterna. Así, si se conecta un circuito externo al generador, que se suele denominar *circuito de carga*, a través de él habrá una corriente alterna que cambiará su sentido con la misma frecuencia f con la que la fem cambia su polaridad (aunque no necesariamente en el mismo instante). En los circuitos, el símbolo de un generador que proporciona una fem de este tipo es el que vemos en la figura 8.6.



Figura 8.6: Símbolo de un generador de fem alterna.

Algunas centrales eléctricas queman combustible fósil (carbón, gas o petróleo) para calentar agua y producir gas presurizado que hace girar enormes turbinas cuyos ejes están unidos al generador, mientras que otras usan cascadas de agua, energía nuclear u otros medios como fuente de trabajo mecánico.

Ejemplo 8.4.1 *Volvamos a considerar el ejemplo 8.2.1 y calculemos el valor de pico, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de la fem.*

Sol. *En el ejemplo 8.2.1 analizamos un generador eléctrico de corriente alterna con una espira con una única vuelta $N = 1$, con el ángulo inicial $\alpha_0 = 0$ y la frecuencia angular*

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s.}$$

Así, el valor de pico de la fem es la amplitud de la fem sinusoidal (t):

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\pi}{40} \simeq 0,0785 \text{ V.}$$

Finalmente, la frecuencia f y el periodo T de la fem son:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{4\pi} = 0,25 \text{ s}^{-1},$$

$$T = \frac{1}{f} = 4 \text{ s.}$$

8.5. Transformadores

Un *transformador* es una máquina eléctrica que sirve para aumentar o disminuir un voltaje de corriente alterna. En su versión más simple, está formado por dos bobinas de cable conductor enrolladas sobre un único núcleo ferromagnético. La *bobina primaria* tiene N_p vueltas de cable y está conectada a una fuente de fem alterna V_{in} . La bobina secundaria tiene N_s vueltas.

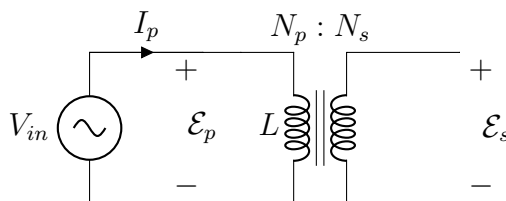


Figura 8.7: Esquema de un transformador sin carga.

Transformador sin carga

Supongamos, en primer lugar, que la bobina secundaria no está conectada a un circuito externo, es decir, estamos en la condición de circuito abierto en la salida, como vemos en la figura 8.7. La corriente alterna I_p en el circuito primario, proporcionada por su generador, atraviesa la bobina primaria y, debido a la presencia del núcleo ferromagnético, crea un campo magnético notable en ella. Este campo magnético produce un voltaje en la bobina primaria que obedece la ley de la inducción electromagnética, que escribiremos en la forma

$$\mathcal{E}_p = -N_p \frac{d\Phi_p}{dt},$$

siendo Φ_p el flujo magnético a través de una vuelta de la bobina primaria.

Por otro lado, dado que la bobina secundaria está también enrollada en el núcleo ferromagnético, parte (o todas) las líneas magnéticas que atraviesan la bobina primaria lo hacen con la secundaria. Debido a esto, en la bobina secundaria se induce una fem dada por

$$\mathcal{E}_s = -N_s \frac{d\Phi_s}{dt},$$

y, en el caso ideal en que las pérdidas de flujo son despreciables, se tiene que $\Phi_s = \Phi_p$, por lo que se llega a

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p}, \quad (8.7)$$

lo que constituye la *ecuación del transformador*. Así, si $N_s > N_p$, el voltaje de pico de la bobina secundaria \mathcal{E}_s es mayor que el voltaje de pico de la bobina primaria \mathcal{E}_p , y se dice que tenemos un *transformador elevador*. En caso contrario es $N_p > N_s$ y tenemos un *transformador reductor*. La razón N_s/N_p se llama *cociente de vueltas* del transformador.

Está claro por qué *un transformador no opera en corriente continua*: la corriente en el circuito primario ha de variar con el tiempo para que haya flujo magnético en la bobina secundaria.

Transformador con carga

Supongamos ahora que conectamos un *circuito de carga* a la bobina secundaria, como vemos en la figura 8.8, de manera que circula una corriente alterna I_s a través de él.

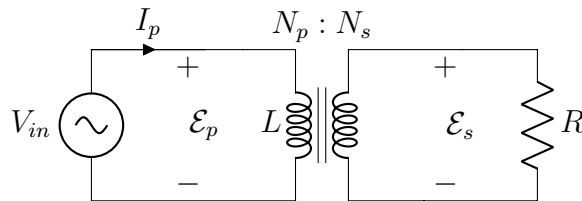


Figura 8.8: Esquema de un transformador con carga.

Si se desprecian posibles pérdidas de potencia en el transformador (usualmente menores del 10%), se ha de cumplir que la potencia es igual en el circuito primario que en el secundario,

$$I_p \mathcal{E}_p = I_s \mathcal{E}_s,$$

donde I_p e I_s son la intensidad de pico en el primario y la intensidad de pico en el secundario, respectivamente. Usando ahora la ecuación del transformador, tenemos

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}. \quad (8.8)$$

Por tanto, un transformador que eleva el voltaje de pico disminuye la corriente de pico y viceversa.

Los transformadores juegan un papel importante en la transmisión de potencia entre plantas de generación eléctrica y las comunidades a las que sirven. Cuando se transmite la corriente eléctrica, hay siempre pérdidas de potencia debido al calor Joule $P_R = I^2 R$ disipado en los cables, que presentan alta resistencia porque son muy largos. Las compañías eléctricas reducen estas pérdidas usando transformadores que aumentan el voltaje a valores muy altos, reduciendo mucho la corriente. Así, las centrales eléctricas producen voltajes del orden de 10^4 V. A la salida de las centrales se utilizan transformadores elevadores, que elevan los voltajes hasta órdenes de $2 \cdot 10^5$ V y conducen la corriente a larga distancia a través de cables de *alta tensión*. Luego, para reducir los voltajes a valores más seguros en el interior de las ciudades, se sitúan a la entrada de éstas *subestaciones de potencia*, con transformadores reductores que dejan los valores en unos $8 \cdot 10^3$ V. A su vez, cerca de cada área de población se instalan nuevos transformadores reductores, para obtener los valores de 200 V típicos del consumo diario.

Ejemplo 8.5.1 *Consideremos un transformador construido con dos bobinas, la primaria con $N_p = 100$ vueltas y la secundaria con N_s vueltas. Calculemos el valor de N_s que duplique la fem en el secundario y el valor que la reduzca a la mitad. En sendos casos, veamos cómo se modifican las corrientes cuando el circuito secundario tiene carga.*

Sol. Usando las ecuaciones

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p}, \quad \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s},$$

si \mathcal{E} se duplica, entonces

$$\frac{N_s}{N_p} = 2 \Rightarrow N_s = 200,$$

y la intensidad en el secundario se reduce a la mitad

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{1}{2} \Rightarrow I_s = \frac{I_p}{2}.$$

Análogamente, si la tensión se reduce a la mitad, tenemos

$$N_2 = 50,$$

$$I_s = 2I_p.$$

8.6. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{k}$ μ_0 n I \mathbf{k}	Campo magnético de un solenoide Permeabilidad magnética del vacío Número de vueltas (espiras) por unidad de longitud Intensidad que circula por las espiras Vector unitario en la dirección del del solenoide y sentido que marca I	(8.1)
$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ \mathcal{E}_{ind} $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ t \mathbf{B} \mathbf{S}	Ley de Lenz-Faraday Fem inducida Flujo magnético Tiempo Campo magnético Vector diferencial normal a la superficie S	(8.2) (8.3)
$V_L = L \frac{dI}{dt}$ V_L L I t	Ecuación característica del inductor Caída de tensión en el inductor o bobina Autoinductancia Intensidad que circula por el inductor Tiempo	(8.4)
$U_m = \frac{LI^2}{2}$	Energía magnética del inductor	(8.5)
$\mathcal{E}_0 = NSB\omega$ N S B ω	Valor de pico de una fem sinusoidal Número de vueltas Área de la espira Módulo del campo magnético Velocidad angular de rotación	(8.6)
$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p}$ \mathcal{E}_s \mathcal{E}_p N_s N_p	Ecuación del transformador Tensión de pico en la bobina secundaria Tensión de pico en la bobina primaria Número de vueltas en la bobina secundaria Número de vueltas en la bobina primaria	(8.7)

$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}$	Ecuación del transformador con carga	(8.8)
I_s	Intensidad de pico en la bobina secundaria	
I_p	Intensidad de pico en la bobina primaria	

8.7. Problemas resueltos

1. Con un solenoide de 15 cm de longitud y 500 vueltas de cable queremos generar un campo magnético en su interior de 10 mT. Calcula la corriente necesaria por el cable.

Sol. El campo magnético en el interior de un solenoide de $n = N/\ell$ vueltas por metro es

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{\ell}.$$

Despejando, obtenemos la corriente

$$I = \frac{B \ell}{\mu_0 N} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,15}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500} \simeq 2,39 \text{ A.}$$

2. En el interior de un solenoide de 50 cm de longitud y 500 vueltas de cable colocamos otro solenoide de igual longitud pero con 250 vueltas. Teniendo en cuenta que por ambos solenoides circula la misma intensidad de 2 A, calcula el campo magnético en el interior del segundo solenoide y en el espacio entre los dos solenoides cuando las dos corrientes fluyen:

a) En el mismo sentido.

b) En sentidos opuestos.

Sol. Consideramos el solenoide 1 como el exterior y el 2 como el interior, de modo que $\ell_1 = \ell_2 = \ell = 0,5 \text{ m}$, $N_1 = 500$, $N_2 = 250$. Tomaremos la aproximación de que el campo creado por un solenoide en su interior es uniforme y de módulo igual a $\mu_0 n I$, mientras que el campo creado por un solenoide en su exterior es cero.

- a) Como las corrientes van en el mismo sentido, el campo en el interior es la suma de los campos de ambos solenoides,

$$\begin{aligned} B_{int} &= \frac{\mu_0 N_1 I}{\ell_1} + \frac{\mu_0 N_2 I}{\ell_2} = \frac{\mu_0 I}{\ell} (N_1 + N_2) \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{0,5} (500 + 250) \simeq 3,77 \text{ mT.} \end{aligned}$$

Sin embargo, el campo en el hueco entre solenoides sólo tiene contribución del solenoide externo,

$$B_{\text{hueco}} = \frac{\mu_0 N_1 I}{\ell_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2}{0,5} \simeq 2,51 \text{ mT.}$$

- b) Las corrientes van en sentido opuesto ahora. Esto significa que los campos magnéticos producidos por los solenoides tienen sentido opuesto, así que el campo total es la resta de los producidos por cada solenoide. El campo en el interior es

$$\begin{aligned} B_{\text{int}} &= \frac{\mu_0 N_1 I}{\ell_1} - \frac{\mu_0 N_2 I}{\ell_2} = \frac{\mu_0 I}{\ell} (N_1 - N_2) \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{0,5} (500 - 250) \simeq 1,26 \text{ mT.} \end{aligned}$$

En el hueco entre los solenoides no cambia nada:

$$B_{\text{hueco}} = \frac{\mu_0 N_1 I}{\ell_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2}{0,5} \simeq 2,51 \text{ mT.}$$

3. Una espira cuadrada de 10 cm de lado está en el seno de un campo magnético uniforme de 50 mT. Determina el flujo magnético a través de la espira cuando el ángulo que forman el plano de la espira y el campo magnético valen: 0° , 60° y 90° .

Sol. El flujo magnético a través de la superficie S encerrada por la espira es

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie de la espira y dS es un elemento infinitesimal de área en la espira. Si \mathbf{B} y \mathbf{n} son *vectores uniformes en la superficie S* (es decir, su módulo, dirección y sentido son los mismos en todos los puntos de S), podemos sacarlos fuera de la integral y el flujo magnético queda

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta.$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores \mathbf{B} y \mathbf{n} , y siendo N el *número de vueltas de cable* en la espira. En el ejercicio, nos dan el valor del

ángulo α que forma el campo magnético con el plano de la espira. Este ángulo está relacionado con θ mediante

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Tomando $B = 50 \text{ mT}$, $N = 1$, $S = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$, encontramos:

Para $\alpha = 0^\circ = 0 \text{ rad}$,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BNS \cos \theta = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= 0 \text{ Wb.}\end{aligned}$$

Para $\alpha = 60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BNS \cos \theta = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &\simeq 4,33 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

Para $\alpha = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BNS \cos \theta = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

4. Una espira circular, de radio 1 cm y 5 vueltas, se coloca en el interior de un solenoide de 10 cm de longitud, 500 vueltas de cable y 1 A de corriente. Teniendo en cuenta que el ángulo θ que forman el eje de la espira y el eje del solenoide es $\theta = 5t$, siendo t el tiempo medido en segundos, calcula el flujo magnético a través de la espira como función del tiempo.

Sol. El campo magnético creado por el solenoide es

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N_s I}{\ell} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1}{0,1} = 2\pi \text{ mT}.$$

El flujo de este campo magnético a través de la espira es

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) N_e S = B N_e S \cos \theta = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot \pi (0,01)^2 \cdot \cos(5t) \\ &= 2\pi \cdot 10^{-6} \cos(5t) \text{ Wb.}\end{aligned}$$

Por ejemplo, para $t = 0,5 \text{ s}$ tenemos

$$\Phi_m = 2\pi \cdot 10^{-6} \cos(5 \cdot 0,5) \simeq -5,03 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}.$$

5. Generamos un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$, cuyo módulo B varía en el tiempo. Entre los tiempos $t = 0 \text{ s}$ y $t = 1 \text{ s}$ la variación es lineal, de modo que $B(t = 0 \text{ s}) = 40 \text{ mT}$ y $B(t = 1 \text{ s}) = 20 \text{ mT}$. En este campo, está inmersa una espira cuadrada de 10 cm de lado, con 10 vueltas, cuyo eje permanece paralelo al campo \mathbf{B} .

- a) Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira durante el primer segundo.
- b) Teniendo en cuenta que la espira está hecha con un cable conductor con una resistencia de 1Ω , calcula la corriente inducida en la espira junto con su sentido de giro.

Sol. El flujo magnético en la dirección del eje Z a través de la superficie encerrada por la espira es una función del módulo B del campo magnético:

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = B \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 0 = 0,1B.$$

Como la variación del campo es lineal con el tiempo, su derivada temporal coincide con su tasa media de variación en el tiempo. Así, el flujo magnético en el intervalo $0 \text{ s} < t < 1 \text{ s}$ es

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_m}{dt} &= \frac{\Phi(t = 1 \text{ s}) - \Phi(t = 0 \text{ s})}{\Delta t} \\ &= \frac{(0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) - (0,1 \cdot 40 \cdot 10^{-3})}{1} = -2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/s.} \end{aligned}$$

Con esto, resolvemos las preguntas que nos hace el ejercicio.

- a) La fem inducida en la espira, según la ley de Faraday, es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -(-0,002) = 2 \text{ mV.}$$

- b) La corriente inducida en la espira, por la ley de Ohm, es

$$I_{ind} = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{0,002}{1} = 2 \text{ mA.}$$

Aplicamos la ley de Lenz para conocer el sentido de recorrido de esta corriente. Los pasos son:

- Como hemos visto, la tasa de variación del flujo magnético a través de la espira en la dirección del eje z es negativa. Esto indica que el flujo magnético a lo largo del eje z decrece en el tiempo.
 - Por tanto, el flujo magnético a lo largo del eje $-z$ crece en el tiempo.
 - Según la ley de Lenz, el campo magnético creado por la corriente inducida en la espira ha de oponerse a la variación de flujo magnético. En este caso, ha de ir a lo largo del eje z .
 - Usando la regla del tornillo, la corriente inducida en la espira será antihoraria.
6. Una espira, con un área de $0,1 \text{ m}^2$ y 10 vueltas, está inmersa en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B} = -0,2\mathbf{k} \text{ T}$. La espira, inicialmente paralela al eje XY , comienza a rotar con velocidad angular constante de manera que, al cabo de $0,2 \text{ s}$, el eje de la espira forma un ángulo de 60° con el campo. Calcula:
- a) La fuerza electromotriz media inducida en la espira.
 - b) La corriente inducida en la espira y su sentido, si ésta tiene una resistencia de $1,5 \Omega$.

Sol. El flujo magnético en la dirección y sentido del eje $-Z$ a través de la superficie encerrada por la espira es una función del ángulo θ entre el campo magnético y el vector normal a la espira:

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = 0,2 \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot \cos \theta = 0,2 \cdot \cos \theta \text{ Wb}.$$

La tasa media de variación en el tiempo de este flujo magnético en el intervalo $0 \text{ s} < t < 0,2 \text{ s}$ es

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\Phi_m(0,2) - \Phi_m(0)}{\Delta t} = \frac{(0,2 \cdot \cos 60^\circ) - (0,2 \cdot \cos 0)}{0,2} = -0,5 \text{ Wb/s}.$$

Vamos con las preguntas.

- a) La fem inducida en la espira es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -(-0,5) = 0,5 \text{ V}.$$

b) La corriente inducida en la espira es

$$I_{ind} = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{0,5}{1,5} \simeq 0,33 \text{ A.}$$

Aplicamos la ley de Lenz:

- La tasa de variación del flujo magnético a través de la espira en la dirección y sentido del eje $-Z$ es negativa. Esto indica que el flujo magnético a lo largo del eje $-Z$ decrece en el tiempo.
 - Por tanto, el flujo magnético a lo largo del eje Z crece en el tiempo.
 - Según la ley de Lenz, el campo magnético creado por la corriente inducida en la espira ha de oponerse a la variación de flujo magnético. En este caso, ha de ir a lo largo del eje $-Z$.
 - Usando la regla del tornillo, la corriente inducida en la espira será horaria.
7. En el interior de una bobina de 1 m de longitud, de 250 vueltas y por la que circula una corriente de 2 A se coloca un equipo eléctrico con una superficie perpendicular al eje de la bobina de 25 cm^2 . Teniendo en cuenta que la fuerza electromotriz inducida sobre el equipo puede ser de 0,5 V como máximo, calcula
- a) La fuerza electromotriz inducida en el equipo si la corriente se anula a un ritmo constante en 2 ms.
 - b) Cuánto tiempo como mínimo debe tardar la corriente del solenoide en anularse de forma uniforme, en caso de avería, sin dañar al equipo.

Sol. El flujo magnético, en la dirección del campo, a través de la superficie del equipo electrónico es una función de la corriente en la bobina:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = (\mu_0 n I) S \cos 0 \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 250 \cdot 25 \cdot 10^{-4} I \simeq 1,57 \cdot 10^{-6} I. \end{aligned}$$

donde debemos escribir I en A y Φ_m resultará en Wb. La fem inducida en el equipo mientras la corriente I se va a cero en un intervalo de

tiempo Δt es

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ind} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \simeq -1,57 \cdot 10^{-6} \frac{I_f - I_i}{\Delta t} \\ &= 1,57 \cdot 10^{-6} \frac{2}{\Delta t} \simeq \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Ahora Δt debe ir en segundos para tener \mathcal{E}_{ind} en V.

a) Si la corriente se anula en $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ s, la sobretensión será

$$\mathcal{E}_{ind} \simeq \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \simeq 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$$

b) Si la sobretensión máxima que puede soportar el equipo es 0,5 V, el tiempo Δt en que la corriente se va a cero ha de cumplir

$$\frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{\Delta t} < 0,5 \quad \Rightarrow \quad \Delta t > \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{0,5} \simeq 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$

8. Se construye una espira rectangular con dos trozos de cable. El primero tiene forma de \square , con base de longitud igual a 1 m, y el segundo es horizontal y móvil (hacia arriba). La espira tiene una superficie inicial de $0,5 \text{ m}^2$ y el lado móvil aumenta su altura a una velocidad constante igual a 2 cm/s. Teniendo en cuenta que la espira se mantiene inmerso en un campo magnético uniforme y constante de módulo $B = 1 \text{ T}$ que se mantiene perpendicular a ella, calcula la fuerza electromotriz inducida como función del tiempo.

Sol. El flujo magnético en la dirección del campo magnético a través de la superficie encerrada por la espira es una función de la altura y del lado móvil:

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot y \cos 0 = y,$$

donde y se debe medir en m, Φ_m se mide en Wb e y varía en el tiempo según

$$y = y_0 + vt.$$

Tenemos el dato $v = 2 \text{ cm/s}$. Para calcular y_0 , usamos la superficie inicial

$$S_0 = 1 \cdot \pi y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{S_0}{1} = 0,5 \text{ m.}$$

Con esto,

$$y = y_0 + vt = 0,5 + 2t.$$

La fem inducida en el anillo es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(0,5 + 2t)}{dt} = -2 \text{ V},$$

que resulta ser independiente del tiempo.

9. Un solenoide de 1000 vueltas por metro tiene una sección transversal de 5 cm^2 . Alrededor de éste se enrolla una bobina de 500 vueltas. Teniendo en cuenta que inicialmente la corriente por el solenoide es de $0,1 \text{ A}$ y que ésta cambia durante 1 s , calcula la fuerza electromotriz promedio inducida en la bobina cuando al final la corriente:

- Es cero.
- Es el doble.
- Cambia de signo.

Sol. El flujo magnético, en la dirección del campo magnético del solenoide, a través de la superficie encerrada por la bobina es una función de la corriente del solenoide dada por:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = (\mu_0 n_s I) N_b S \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot I = \pi \cdot 10^{-4} \cdot I,\end{aligned}$$

donde, al medir I en A , obtenemos Φ_m en Wb . La fem promedio inducida en la bobina en un intervalo de tiempo $\Delta t = 1 \text{ s}$ será

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\pi \cdot 10^{-4} \frac{I_f - 0,1}{1} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1).$$

- a) Si $I_f = 0 \text{ A}$,

$$\mathcal{E}_{ind} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1) = -3,14 \cdot 10^{-5} \text{ V}.$$

- b) Si $I_f = 0,2 \text{ A}$,

$$\mathcal{E}_{ind} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1) = -3,14 \cdot 10^{-5} \text{ V}.$$

c) Si $I_f = -0,1$ A,

$$\mathcal{E}_{ind} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1) = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ V.}$$

10. La corriente alterna $I = 2 \text{ A} \sin(50\pi t)$ circula por un solenoide de 500 espiras por metro. Calcula la fuerza electromotriz inducida en una bobina, de 100 espiras y 10 cm^2 de sección, cuyo eje es el mismo que el del solenoide.

Sol. El flujo magnético, en la dirección del campo magnético del solenoide, a través de la superficie encerrada por la bobina es una función de la corriente del solenoide:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = (\mu_0 n_s I) N_b S \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot I \simeq 6,28 \cdot 10^{-5} I. \end{aligned}$$

La fem inducida en la bobina es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ind} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \simeq -6,28 \cdot 10^{-5} \frac{d}{dt} [2 \cdot \sin(100\pi t)] \\ &= -6,28 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 50\pi \cdot \cos(100\pi t) \\ &\simeq -1,97 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cos(100\pi t). \end{aligned}$$

11. Un corriente de 50 mA circula por un solenoide de sección circular, de 20 cm de longitud y 1 cm de radio, formado por 200 espiras. Calcula:

- El flujo magnético a través de la bobina.
- La autoinductancia de la bobina.
- La fuerza electromotriz autoinducida en la bobina si la corriente se anula a un ritmo constante en 10^{-3} s.

Sol. El campo magnético en el interior del solenoide es

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{\ell} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{0,2} \simeq 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

- a) El flujo magnético a través del solenoide es

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta \\ &\simeq 6,28 \cdot 10^{-5} \cdot 200 \cdot \pi (10^{-2})^2 \simeq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Wb.} \end{aligned}$$

b) La autoinductancia es

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \simeq \frac{1,26 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3}} = 2,51 \cdot 10^{-5} \text{ H.}$$

c) La fem inducida cuando la corriente se va a cero en 10^{-3} s es

$$\mathcal{E}_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \simeq -2,51 \cdot 10^{-5} \frac{0 - 0,05}{0,001} \simeq 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$$

12. Un generador de corriente alterna está construido con una bobina cuadrada de 50 vueltas y 0,1 m de lado. Teniendo en cuenta que el campo magnético en el que está inmersa la bobina vale 0,5 T y que ésta gira con una velocidad angular constante igual a 100 rad/s, calcula la fuerza electromotriz de pico, la frecuencia y el periodo del generador.

Sol. El flujo magnético a través de la bobina del generador es

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos \theta = 0,5 \cdot 50 \cdot (0,1)^2 \cos(100t) \\ &= 0,25 \text{ Wb} \cos(100t), \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que inicialmente el eje de la bobina está alineado con el campo. Por tanto, la fem inducida es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0,25 \cdot 100 \sin(100t) = 25 \text{ V} \sin(100t).$$

De aquí, la fem de pico es

$$\mathcal{E}_0 = 25 \text{ V.}$$

La frecuencia es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} \simeq 15,9 \text{ Hz,}$$

y el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} \simeq 0,0628 \text{ s.}$$

13. Un transformador está formado por dos bobinas, la primera con 200 vueltas y la secundaria con 50 vueltas. Teniendo en cuenta que el voltaje y la corriente en el primario valen 200 V y 0,5 A, respectivamente, calcula el voltaje y la corriente en la bobina secundaria, así como la

potencia que suministra.

Sol. Por la ecuación del transformador,

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow V_s = \frac{V_p N_s}{N_p} = \frac{200 \cdot 50}{200} = 50 \text{ V.}$$

Para las corrientes, la ecuación es

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow I_s = \frac{I_p N_p}{N_s} = \frac{0,5 \cdot 200}{50} = 2 \text{ A.}$$

La potencia, suponiendo que el transformador es ideal, es la misma en la bobina primaria que en la secundaria. Por tanto,

$$P = I_p V_p = 0,5 \cdot 200 = 100 \text{ W.}$$

Capítulo 9

Circuitos de corriente alterna

En este tema estudiamos los circuitos de corriente alterna. En primer lugar, analizamos los circuitos más sencillos: una resistencia, un condensador o una bobina con una fuente alterna sinusoidal. Para considerar situaciones más complejas, usamos el concepto de fasor que es una cantidad compleja. Por ello, previamente hacemos un breve repaso a los números complejos. Mediante el uso de fasores, las resistencias, condensadores e inductores obedecen una ley de Ohm generalizada (con la resistencia sustituida por la impedancia correspondiente). Finalmente, estudiamos los conceptos de potencia activa, reactiva y aparente.

9.1. Resistencias en corriente alterna

Para ver cómo se comporta una resistencia en corriente alterna, consideremos un circuito muy simple formado por un generador de corriente alterna de fem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$ y una resistencia R , como en la figura 9.1. En el generador, \mathcal{E}_0 es su fem de pico y $\omega = 2\pi f$ es su frecuencia angular.

Por la regla de Kirchhoff de las mallas, la caída de tensión en la resistencia será igual a la fem del generador, es decir, $V_R(t) = \mathcal{E}(t)$, de manera que

$$V_R(t) = V_{R,0} \sin(\omega t + \alpha_0),$$

siendo $V_{R,0} = \mathcal{E}_0$ el valor de pico del voltaje en la resistencia. Por otro lado,

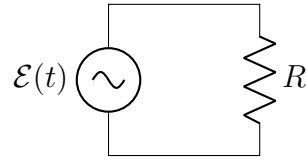


Figura 9.1: Circuito con una fem alterna y una resistencia.

por la ecuación característica de una resistencia (la ley de Ohm) tenemos

$$I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = I_{R,0} \sin(\omega t + \alpha_0),$$

donde la *corriente de pico* está dada por

$$I_{R,0} = \frac{V_{R,0}}{R}.$$

Se comprueba entonces que:

- Los valores de pico del voltaje y la corriente en una resistencia siguen la ley de Ohm $V_{R,0} = RI_{R,0}$.
- La corriente $I_R(t)$ en una resistencia está *en fase* con su voltaje $V_R(t)$, es decir, ambos tienen la misma dependencia angular $(\omega t + \alpha_0)$.

Ambas características definen el comportamiento de una resistencia en corriente alterna. Como veremos más adelante, no ocurre algo tan sencillo para los condensadores e inductores.

Potencia instantánea y potencia media disipada por una resistencia

La *potencia instantánea* $P_R(t)$ disipada por la resistencia en forma de calor es

$$P_R(t) = I_R(t)V_R(t) = I_{R,0}V_{R,0} \sin^2(\omega t + \alpha_0),$$

que es siempre positiva, pues la resistencia está consumiendo energía (casi) todo el rato.

Sin embargo, para evitar tener una dependencia temporal en la expresión de la potencia, es común referirse a la *potencia media* disipada en un periodo

$T = 1/f = 2\pi/\omega$, que se define mediante la integral

$$P_{R,m} = \frac{1}{T} \int_0^T P_R(t) dt.$$

Para una resistencia, la potencia media resulta

$$P_{R,m} = \frac{I_{R,0}V_{R,0}}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha_0) dt = \frac{I_{R,0}V_{R,0}}{2}.$$

Valores eficaces

La expresión de la potencia media disipada por una resistencia en corriente alterna sinusoidal, dada por

$$P_{R,m} = \frac{I_{R,0}V_{R,0}}{2},$$

se puede escribir de manera que se parezca a la fórmula de potencia en corriente continua. Para ello, se definen los *valores eficaces* de los voltajes y las corrientes.

El valor eficaz de la corriente en la resistencia es

$$I_{R,ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_R(t)]^2 dt} = \frac{I_{R,0}}{\sqrt{2}},$$

y el valor eficaz del voltaje en la resistencia es

$$V_{R,ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [V_R(t)]^2 dt} = \frac{V_{R,0}}{\sqrt{2}}.$$

Con ellos, la potencia media disipada en una resistencia en un circuito de corriente alterna sinusoidal es

$$P_{R,m} = I_{R,ef}V_{R,ef}.$$

Obtenemos exactamente la misma forma que en corriente continua. También la ley de Ohm se puede escribir en términos de valores eficaces como $V_{R,ef} = I_{R,ef}R$, así que la potencia media en una resistencia se puede escribir en cualquiera de las formas de la corriente continua,

$$P_{R,m} = I_{R,ef}V_{R,ef} = \frac{V_{R,ef}^2}{R} = I_{R,ef}^2 R.$$

En la red eléctrica española, la tensión de pico en los hogares es de unos 311 V y la frecuencia es $f = 50$ Hz, de manera que la fem instantánea se puede escribir como $\mathcal{E} = 311 \text{ V} \sin(100\pi t)$. La tensión eficaz es $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2} = 220 \text{ V}$. En las viviendas, los aparatos enchufados directamente a la red están en paralelo, de manera que todos soportan una tensión eficaz de 220 V. Muchos cableados domésticos soportan corrientes máximas del orden de 20 A, dado que una corriente mayor sobrecalentaría los cables. Para evitar este problema, cada circuito está equipado con un interruptor automático o fusible que salta, abriendo el circuito, cuando la corriente supera ese valor máximo. Para tener mayor potencia se suelen instalar varios circuitos, cada uno con su interruptor.

Ejemplo 9.1.1 Consideremos un generador de corriente alterna, con 150 V de fuerza electromotriz de pico y 50 Hz de frecuencia, que está conectado a una resistencia de 5 k Ω . Calculemos el voltaje y corriente de pico así como la potencia media consumida.

Sol. Dado que la fem proporcionada por el generador es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = 150 \text{ V} \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t) = 150 \text{ V} \sin(100\pi t),$$

el voltaje de pico en la resistencia $R = 5 \text{ k}\Omega$ resulta

$$V_{R,0} = 150 \text{ V}$$

y la corriente de pico

$$I_{R,0} = \frac{V_{R,0}}{R} = \frac{150}{5 \cdot 10^3} = 0,03 \text{ A}.$$

Finalmente, la potencia media disipada en la resistencia es

$$P_{R,m} = \frac{1}{2} V_{R,0} I_{R,0} = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0,03 = 2,25 \text{ W}.$$

9.2. Condensadores en corriente alterna

Veamos cómo se comporta un condensador en corriente alterna sinusoidal. Como ya vimos, cuando se carga un condensador con una batería, la corriente se establece entre las placas del condensador durante un periodo de tiempo

muy breve, del orden de $5RC$. Después la corriente se va a cero. Si fuésemos capaces en ese momento de cambiar la polaridad de la batería, volvería a aparecer una corriente en sentido opuesto para descargar y luego cargar el condensador de acuerdo con la nueva conexión. Esto es, básicamente, lo que ocurre en corriente alterna, pues la polaridad del generador va cambiando y la carga fluye sin parar en un sentido y luego en el otro.

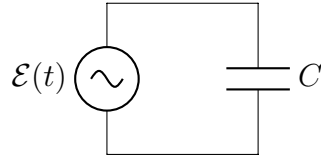


Figura 9.2: Circuito con una fem alterna y un condensador.

Para entenderlo, tomemos el circuito simple de la figura 9.2 formado por un generador de fem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$ y un condensador de capacidad C . Por la regla de Kirchhoff de las mallas, la diferencia de potencial entre las placas del condensador es igual a la fem del generador, es decir, $V_C(t) = \mathcal{E}(t)$, de manera que

$$V_C(t) = V_{C,0} \sin(\omega t + \alpha_0),$$

siendo $V_{C,0} = \mathcal{E}_0$ el valor de pico del voltaje. La ecuación característica de un condensador es $Q = C V_C$, o bien $I_C = C dV_C/dt$, lo que implica

$$I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} = \omega C V_{C,0} \cos(\omega t + \alpha_0).$$

Podemos escribir entonces la corriente entre las placas del condensador en la forma

$$I_C(t) = I_{C,0} \sin(\omega t + \alpha_0 + \pi/2).$$

Analicemos el resultado comparando las funciones armónicas $V_C(t)$ e $I_C(t)$ que hemos obtenido:

- Los valores de pico del voltaje y la corriente en un condensador en corriente alterna están relacionados mediante la expresión

$$V_{C,0} = X_C I_{C,0}$$

donde la cantidad

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (9.1)$$

se llama *reactancia capacitiva*. La relación entre valores eficaces $V_{C,ef} = V_{C,0}/\sqrt{2}$, $I_{C,ef} = I_{C,0}/\sqrt{2}$ es la misma, es decir,

$$V_{C,ef} = X_C I_{C,ef}.$$

La reactancia capacitiva juega aquí un papel similar a la resistencia, y tiene unidades de resistencia, pues es el cociente entre el voltaje de pico y la corriente de pico. Pero tiene una diferencia fundamental respecto a ella, que es la dependencia con la frecuencia. Cuando la frecuencia es muy grande, X_C tiende a cero, lo que implica que el condensador apenas ofrece oposición al paso de la corriente. En contraste, cuando la frecuencia tiende a cero (el límite de corriente continua), la reactancia capacitiva se hace infinita y no hay corriente, que era lo que pasaba en el régimen estacionario de corriente continua.

- A diferencia de lo que ocurre en una resistencia, el voltaje y la corriente en un condensador *están desfasados* en un ángulo de $\pi/2$ rad. Esto se debe a que lo que es proporcional al voltaje no es la corriente, sino la carga del condensador, y cuando el voltaje es máximo la carga lo es, por lo que la corriente es nula. Como vemos en las expresiones anteriores de $V_C(t)$ e $I_C(t)$, la corriente tiene un sumando $+\pi/2$ extra en la fase, y por eso se dice que, en un condensador en corriente alterna, la corriente está *adelantada* al voltaje en $+\pi/2$.

Potencia instantánea y potencia media en un condensador

La *potencia instantánea* $P_C(t)$ que consume un condensador en corriente alterna es

$$\begin{aligned} P_C(t) &= I_C(t)V_C(t) = I_{C,0}V_{C,0} \sin(\omega t + \alpha_0) \cos(\omega t + \alpha_0) \\ &= \frac{I_{C,0}V_{C,0}}{2} \sin(2\omega t + 2\alpha_0), \end{aligned}$$

es decir, *alcanza valores positivos y negativos*. En los instantes de valores positivos de la potencia, el condensador está tomando energía del generador para cargarse pero, en los instantes de valores negativos, el condensador devuelve energía al generador. Esto explica que la *potencia media* sea nula,

$$P_{C,m} = \frac{1}{T} \int_0^T P_C(t) dt = 0,$$

lo que implica que, en promedio, *el condensador no usa energía del generador en corriente alterna.*

Ejemplo 9.2.1 *Volvamos a tomar el generador de corriente alterna del ejemplo 9.1.1, pero conectémoslo ahora a un condensador de capacidad $C = 50 \text{ nF}$. Calculemos el voltaje y corriente de pico así como la potencia media consumida.*

Sol. *El voltaje de pico en el condensador es*

$$V_{C,0} = 150 \text{ V.}$$

Para calcular la corriente de pico, es necesaria la reactancia capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-9}} \simeq 6,36 \cdot 10^4 \Omega.$$

Con ella, tenemos

$$I_{C,0} = \frac{V_{C,0}}{X_C} \simeq \frac{150}{6,36 \cdot 10^6} \simeq 2,36 \text{ mA.}$$

La potencia media consumida por el condensador es $P_{C,m} = 0$.

9.3. Inductores en corriente alterna

Vamos ahora a examinar el comportamiento de los inductores o bobinas en corriente alterna. Para ello, consideremos un generador de fem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$ conectado a una bobina de autoinductancia L , como en la figura 9.3.

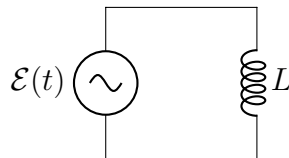


Figura 9.3: Circuito con una fem alterna y un inductor.

Como no hay nada más conectado entre ellos, la caída de tensión en la bobina es igual a la fem del generador, $V_L(t) = \mathcal{E}(t)$, de modo que

$$V_L(t) = V_{L,0} \sin(\omega t + \alpha_0),$$

siendo $V_{L,0} = \mathcal{E}_0$ el valor de pico del voltaje. La ecuación característica del inductor viene de la ley de Faraday, $V_L(t) = L dI_L/dt$. Integrando para obtener la corriente, encontramos

$$I_L(t) = \frac{1}{L} \int V_L(t) dt = \frac{-1}{\omega L} V_{L,0} \cos(\omega t + \alpha_0).$$

que podemos escribir como

$$I_L(t) = I_{L,0} \sin(\omega t + \alpha_0 - \pi/2).$$

Comparamos $V_L(t)$ e $I_L(t)$:

- Los valores de pico del voltaje y la corriente en una bobina en corriente alterna están relacionados mediante la expresión

$$V_{L,0} = X_L I_{L,0}$$

donde la cantidad

$$X_L = \omega L \tag{9.2}$$

se llama *reactancia inductiva*. También se cumple $V_{L,ef} = X_L I_{L,ef}$. La reactancia inductiva aparece de nuevo como una resistencia y tiene unidades de resistencia, pues es el cociente entre el voltaje de pico y la corriente de pico, pero depende de la frecuencia. Cuando la frecuencia es muy grande, X_L tiende a infinito y la bobina se comporta como un circuito abierto. Cuando la frecuencia tiende a cero (límite de corriente continua), la reactancia inductiva se hace nula y la bobina se comporta como un cortocircuito.

- El voltaje y la corriente en un inductor *están desfasados* en $\pi/2$ rad. La corriente tiene un sumando $-\pi/2$ extra en la fase, y por eso se dice que, en un inductor en corriente alterna, la corriente está *retrasada* respecto al voltaje en $-\pi/2$.

Potencia instantánea y potencia media en un inductor

La *potencia instantánea* $P_L(t)$ que consume una bobina en corriente alterna es

$$\begin{aligned} P_L(t) &= I_L(t)V_L(t) = -I_{L,0}V_{L,0} \sin(\omega t + \alpha_0) \cos(\omega t + \alpha_0) \\ &= -\frac{I_{L,0}V_{L,0}}{2} \sin(2\omega t + 2\alpha_0), \end{aligned}$$

y alcanza valores positivos y negativos. En los instantes de valores positivos de la potencia, el inductor toma energía del generador, y en los instantes de valores negativos, el inductor devuelve energía al generador. Como en el caso del condensador, la *potencia media* se anula,

$$P_{L,m} = \frac{1}{T} \int_0^T P_L(t) dt = 0,$$

lo que implica que, en promedio, *el inductor no usa energía del generador en corriente alterna.*

Ejemplo 9.3.1 *Volvamos a tomar el generador de corriente alterna del ejemplo 9.1.1, pero conectémoslo ahora a una bobina de autoinductancia $L = 50 \text{ mH}$. Calculemos el voltaje y corriente de pico así como la potencia media consumida.*

Sol. *El voltaje de pico en el inductor es*

$$V_{L,0} = 170 \text{ V.}$$

Con la reactancia inductiva

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \simeq 15,7 \Omega$$

obtenemos la corriente de pico como

$$I_{L,0} = \frac{V_{L,0}}{X_L} \simeq \frac{150}{15,7} \simeq 9,55 \text{ A.}$$

La potencia media consumida por la bobina es $P_{L,m} = 0$.

9.4. Números complejos

Debido a que, como hemos visto, los voltajes y las corrientes en condensadores e inductores están desfasados en corriente alterna, es muy útil estudiar este tipo de circuitos mediante una técnica que se basa en el uso de números complejos.

Un *número complejo* z es un par de números reales x e y escritos en la forma

$$z = x + iy,$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la llamada *unidad imaginaria*, tal que $i^2 = -1$. Se dice que x es la *parte real* de z e y es la *parte imaginaria* de z , y se escriben $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$.

Operaciones básicas con números complejos

Las operaciones más comunes con números complejos son:

- Para sumar o restar dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, se suman o restan sus partes real e imaginaria por separado,

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

- Para multiplicar dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, se multiplica cada factor usando que $i^2 = -1$,

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

- Se define el *conjugado* del número complejo $z = x + iy$ como el número complejo $z^* = x - iy$, obtenido con la misma parte real que z pero opuesta parte imaginaria. Se puede comprobar entonces que $z + z^* = 2 \text{Re}(z)$, $z - z^* = 2i \text{Im}(z)$.

- El producto de un número complejo $z = x + iy$ por su conjugado es un número real positivo,

$$z z^* = x^2 + y^2,$$

tal que su raíz cuadrada (con signo positivo) se llama *módulo* $|z|$ del número complejo z ,

$$|z| = +\sqrt{z z^*} = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, con $z_2 \neq 0$, el cociente se puede calcular como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Forma polar de un número complejo

La expresión de un número complejo como una pareja (x, y) de números reales recuerda la representación de un punto en un plano XY . Para este caso, este plano se llama *plano de Argand* y en él el eje X se llama *eje real* y el eje Y se llama *eje imaginario*. En la figura 9.4 podemos ver que la distancia al origen r es el módulo del número complejo z , es decir, $r = |z|$.

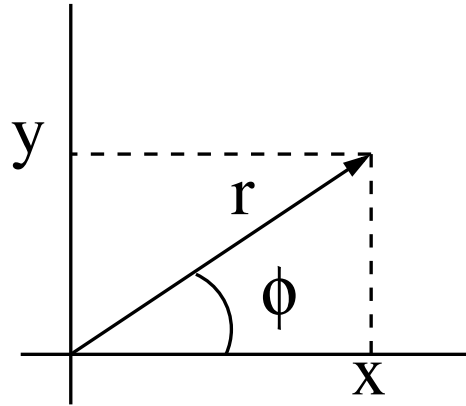


Figura 9.4: Representación del número complejo $z = x + iy$ en el plano de Argand. El módulo de z es r y su argumento ϕ .

Según la figura 9.4, podemos escribir el número complejo $z = x + iy$ como

$$z = x + iy = r \cos \phi + ir \sin \phi = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Esta última expresión se llama la *forma polar* del número complejo. El ángulo ϕ con el eje real positivo se llama *argumento* del número complejo z , $\arg(z)$, y, mediante trigonometría básica, se puede calcular como

$$\arg(z) = \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right),$$

cuyo *valor principal* es aquel valor ϕ que satisface $-\pi < \phi \leq \pi$.

Hagamos ahora uso de una igualdad muy importante al estudiar números complejos, que es la *identidad de Euler*. Dice que, si ϕ es un número real, entonces la exponencial de $i\phi$ cumple

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Combinando esta identidad con la igualdad $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, llegamos a que podemos representar cualquier número complejo z en forma polar como

$$z = |z| e^{i\phi},$$

siendo $|z|$ su módulo y ϕ su argumento.

9.5. Fasores, impedancias y ley de Ohm generalizada

Los circuitos de corriente alterna con *componentes reactivos* (es decir, con reactancia), como se conocen colectivamente a los condensadores e inductores, son más complicados que los circuitos resistivos (es decir, con resistencia). Esto se debe a que los circuitos reactivos tienen un comportamiento que depende de la frecuencia y, además, las señales se adelantan o retrasan unas de otras, impidiendo que se siga una ley proporcional.

Consideremos circuitos de corriente alterna con un sólo generador de frecuencia angular ω . Vamos a ver cómo, mediante los números complejos y la *representación en fasores* de voltajes y corrientes alternas, se puede generalizar la ley de Ohm y usarla tanto para componentes reactivos como para componentes resistivos, reemplazando la palabra resistencia por la palabra *impedancia*.

La representación en fasores se basa en las siguientes reglas:

- Asociamos a cada voltaje o corriente un número complejo definido mediante el valor de pico y la fase inicial, eliminando la frecuencia angular ω . Por ejemplo,

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \alpha_0) \quad \Rightarrow \quad \widehat{V} = V_0 e^{i\alpha_0}.$$

Estos números complejos que representan voltajes o corrientes se llaman *fasores*.

- Para volver a la forma sinusoidal del voltaje o la corriente, se multiplica el fasor por $e^{i\omega t}$ y se toma la parte imaginaria del resultado. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \widehat{V} = V_0 e^{i\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad V(t) &= \text{Im} \left(\widehat{V} e^{i\omega t} \right) = \text{Im} \left(V_0 e^{i(\omega t + \alpha_0)} \right) \\ &= V_0 \sin(\omega t + \alpha_0). \end{aligned}$$

Impedancia y ley de Ohm generalizada

El uso de fasores permite generalizar la ley de Ohm a circuitos de corriente alterna que contienen resistencias, condensadores e inductores. Veamos cada elemento en fasores.

- En el apartado dedicado a las resistencias, habíamos estudiado el circuito de la figura 9.1 formado por un generador de fem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ (tomamos $\alpha_0 = 0$ eligiendo el origen de tiempos de forma conveniente) y una resistencia R . El resultado para el voltaje en la resistencia era

$$V_R(t) = V_{R,0} \sin(\omega t),$$

con $V_{R,0} = \mathcal{E}_0$, y para la corriente

$$I_R(t) = I_{R,0} \sin(\omega t),$$

con $I_{R,0} = V_{R,0}/R$. Los fasores correspondientes a ambas cantidades son

$$\begin{aligned}\widehat{V}_R &= V_{R,0}, \\ \widehat{I}_R &= I_{R,0} = \frac{V_{R,0}}{R}.\end{aligned}$$

El cociente entre el fador voltaje y el fador corriente se llama *impedancia* Z del elemento. Así, la *impedancia resistiva* es, simplemente, la propia resistencia

$$Z_R = R, \tag{9.3}$$

y la resistencia sigue la *ley de Ohm generalizada*

$$\widehat{V}_R = Z_R \widehat{I}_R.$$

- Pasemos al caso de los condensadores. Teníamos el circuito de la figura 9.2 con un generador de fem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ y un condensador de capacidad C . El voltaje en el condensador resultaba

$$V_C(t) = V_{C,0} \sin(\omega t),$$

con $V_{C,0} = \mathcal{E}_0$, y la corriente

$$I_C(t) = I_{C,0} \sin(\omega t + \pi/2),$$

con $I_{C,0} = V_{C,0}/X_C$, donde la reactancia capacitiva estaba dada por $X_C = 1/(\omega C)$. Con estos datos, el fasor voltaje es

$$\widehat{V}_C = V_{C,0}$$

y el fasor corriente

$$\widehat{I}_C = I_{C,0} e^{i\pi/2} = \frac{V_{C,0}}{X_C} e^{i\pi/2}.$$

En consecuencia, la *impedancia capacitiva* resulta

$$Z_C = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{I}_C} = X_C e^{-i\pi/2} = -iX_C = \frac{-i}{\omega C}, \quad (9.4)$$

por lo que el condensador sigue la *ley de Ohm generalizada*

$$\widehat{V}_C = Z_C \widehat{I}_C.$$

- Terminamos con el caso de una bobina. En el circuito de la figura 9.3 con un generador de fem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ y una bobina de autoinductancia L , el voltaje en el inductor era

$$V_L(t) = V_{L,0} \sin(\omega t),$$

con $V_{L,0} = \mathcal{E}_0$, y la corriente era

$$I_L(t) = I_{L,0} \sin(\omega t - \pi/2),$$

con $I_{L,0} = V_{L,0}/X_L$ y la reactancia inductiva dada por $X_L = \omega L$. En el formalismo de fasores, el fasor voltaje es

$$\widehat{V}_L = V_{L,0}$$

y el fasor corriente es

$$\widehat{I}_L = I_{L,0} e^{-i\pi/2} = \frac{V_{L,0}}{X_L} e^{-i\pi/2}.$$

Se obtiene que la *impedancia inductiva* es

$$Z_L = \frac{\widehat{V}_L}{\widehat{I}_L} = X_L e^{i\pi/2} = iX_L = i\omega L \quad (9.5)$$

y la bobina sigue la *ley de Ohm generalizada*

$$\widehat{V}_L = Z_L \widehat{I}_L.$$

En conclusión, la relación entre los fasores de corriente y voltaje se puede expresar mediante una sola ley, que es la ley de Ohm generalizada

$$\widehat{V} = Z\widehat{I}. \quad (9.6)$$

Además, la impedancia Z de varios elementos conectados en serie o en paralelo obedece las mismas reglas que las asociaciones de resistencias, teniendo en cuenta que se opera ahora con números complejos, y podemos analizar los circuitos de corriente alterna con los mismos métodos aprendidos para los circuitos de corriente continua pero aplicados a los fasores: leyes de Kirchhoff, divisor de voltaje, equivalente de Thévenin o de Norton, etc.

Ejemplo 9.5.1 Consideremos la asociación en serie de una resistencia de $1\text{ k}\Omega$ y una bobina $L = 2\text{ H}$ en un circuito con una frecuencia de 50 Hz . Calculemos la impedancia equivalente.

Sol. Las impedancias de la resistencia y la bobina son

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 10^3 \Omega \\ Z_C &= i\omega L = i2\pi \cdot 50 \cdot 2 = 100\pi i \Omega. \end{aligned}$$

Como están en serie, la impedancia equivalente, en forma binomial, es

$$Z = Z_R + Z_C = (1000 + 100\pi i) \Omega.$$

Para la forma polar, hay que calcular el módulo y argumento de Z ,

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{1000^2 + (100\pi)^2} \simeq 1048 \Omega, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{100\pi}{1000}\right) \simeq 0,304 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Con esto,

$$Z = |Z|e^{i\phi} \simeq (1048 e^{0,304i}) \Omega.$$

9.6. Potencias activa, reactiva y aparente

Hemos calculado ya las potencias instantáneas y medias consumidas por elementos tales como resistencias, condensadores y bobinas. Queremos calcular también la potencia media que proporciona un generador de corriente

alterna cuando está conectado a varios elementos. En relación con ello, se suele generalizar el concepto de potencia media en corriente alterna definiendo también potencias reactivas y aparentes.

Potencia media o activa de un elemento

Se define la *potencia media* o *potencia activa* proporcionada por un generador o consumida por un elemento con impedancia como

$$P_m = \frac{I_0 V_0}{2} \cos \phi = I_{ef} V_{ef} \cos \phi,$$

donde ϕ es la fase de la impedancia del elemento y el resto de magnitudes se refieren al elemento. En particular:

- Para una resistencia, $Z_R = R$, por lo que $\phi = 0$. De aquí, la potencia activa disipada por una resistencia es

$$P_{R,m} = \frac{I_{R,0} V_{R,0}}{2} = I_{R,ef} V_{R,ef}.$$

- Para un condensador, $Z_C = -i/\omega C$, por lo que $\phi = -\pi/2$ y se tiene

$$P_{C,m} = \frac{I_{C,0} V_{C,0}}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- Para un inductor, $Z_L = i\omega L$, por lo que $\phi = \pi/2$ y

$$P_{L,m} = \frac{I_{L,0} V_{L,0}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- Para calcular la potencia activa proporcionada por un generador de fem \mathcal{E} por el que pasa una corriente alterna sinusoidal I , se necesita el valor de la *impedancia total* o *equivalente* Z del circuito respecto del generador. Una vez calculada, se determina su fase ϕ y resulta

$$P_{\mathcal{E},m} = \frac{I_0 \mathcal{E}_0}{2} \cos \phi = I_{ef} \mathcal{E}_{ef} \cos \phi.$$

Potencia reactiva de un elemento

Se define la *potencia reactiva* P_r de un elemento como

$$P_r = \frac{I_0 V_0}{2} \sin \phi = I_{ef} V_{ef} \sin \phi,$$

donde, de nuevo, ϕ es la fase de la impedancia del elemento y el resto de magnitudes se refieren al elemento en cuestión. En particular:

- Para una resistencia, $\phi = 0$ y

$$P_{R,r} = \frac{I_{R,0} V_{R,0}}{2} \sin 0 = 0.$$

- Para un condensador, $\phi = -\pi/2$ y

$$P_{C,r} = \frac{I_{C,0} V_{C,0}}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{I_{C,0} V_{C,0}}{2} = -I_{C,ef} V_{C,ef}.$$

- Para un inductor, $\phi = \pi/2$ y

$$P_{L,r} = \frac{I_{L,0} V_{L,0}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{I_{L,0} V_{L,0}}{2} = I_{L,ef} V_{L,ef}.$$

- Para un generador que alimenta un circuito con impedancia total Z y fase ϕ ,

$$P_{\mathcal{E},r} = \frac{I_0 \mathcal{E}_0}{2} \sin \phi = I_{ef} \mathcal{E}_{ef} \sin \phi.$$

Potencia aparente de un elemento

Se define la *potencia aparente* P_a de un elemento como

$$P_a = \sqrt{P_m^2 + P_r^2} = \frac{I_0 V_0}{2} = I_{ef} V_{ef}.$$

Así:

- Para una resistencia,

$$P_{R,a} = \frac{I_{R,0} V_{R,0}}{2} = I_{R,ef} V_{R,ef}.$$

- Para un condensador,

$$P_{C,a} = \frac{I_{C,0}V_{C,0}}{2} = I_{C,ef}V_{C,ef}.$$

- Para un inductor,

$$P_{L,a} = \frac{I_{L,0}V_{L,0}}{2} = I_{L,ef}V_{L,ef}.$$

- Para un generador,

$$P_{\mathcal{E},a} = \frac{I_0\mathcal{E}_0}{2} = I_{ef}\mathcal{E}_{ef}.$$

Factor de potencia

Relacionado con las potencias que hemos definido está el llamado *factor de potencia*, que es el cociente entre la potencia activa o media y la potencia aparente:

$$\text{Factor de potencia} = \frac{P_m}{P_a} = \cos \phi.$$

El factor de potencia varía entre 0 para circuitos reactivos (que sólo tienen condensadores e inductores) y 1 para circuitos resistivos (sólo con resistencias). Las compañías eléctricas cobran a los hogares en función de la potencia media que gastan, pero a veces tienen en cuenta el factor de potencia para las industrias. Esto es porque los componentes reactivos, esencialmente bobinas, hacen que no se transmita toda la potencia a la carga, ya que almacenan la energía. El factor de potencia se puede mejorar, es decir, aumentar, colocando en los circuitos condensadores si la impedancia es inductiva (el caso más usual) y bobinas si es capacitiva.

9.7. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$V_0 = XI_0$ V_0 I_0 X	Ley para los valores de pico Voltaje de pico Corriente de pico Reactancia	
$X_R = R$ $X_C = \frac{1}{\omega C}$ ω C	Resistencia Reactancia capacitiva del condensador Frecuencia de la fuente Capacidad del condensador	(9.1)
$X_L = \omega L$ L	Reactancia inductiva de la bobina Autoinducción	(9.2)
$\hat{V} = Z\hat{I}$ \hat{V} Z \hat{I}	Ley de Ohm generalizada Fasor del voltaje Impedancia Fasor de corriente	(9.6)
$Z_R = R$	Impedancia resistiva	(9.3)
$Z_C = \frac{-i}{\omega C}$	Impedancia capacitiva	(9.4)
$Z_L = i\omega L$	Impedancia inductiva	(9.5)

9.8. Problemas resueltos

1. Calcula el voltaje y corriente de pico así como la potencia media consumida por un generador, de 120 V de fem de pico y 60 Hz de frecuencia, cuando se conecta a:

- a) Una resistencia de 5 k Ω .
- b) Un condensador de 10 pF.
- c) Una bobina de 20 mH.

Sol. La fem proporcionada por el generador es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = 120 \sin(2\pi \cdot 60 \cdot t) = 120 \text{ V} \sin(120\pi t).$$

- a) Si se conecta a una resistencia $R = 5 \text{ k}\Omega$, el voltaje de pico en la resistencia será

$$V_{R,0} = 120 \text{ V}$$

y la corriente de pico

$$I_{R,0} = \frac{V_{R,0}}{R} = \frac{120}{5 \cdot 10^3} = 24 \text{ mA}.$$

La potencia media disipada en la resistencia es

$$P_{R,m} = \frac{1}{2} V_{R,0} I_{R,0} = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 24 \cdot 10^{-3} = 2,88 \text{ W}.$$

- b) Si el generador se conecta a un condensador $C = 10 \text{ pF}$, el voltaje de pico en el condensador será

$$V_{C,0} = 120 \text{ V}.$$

Para calcular la corriente de pico, es necesaria la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} \simeq 2,65 \cdot 10^8 \Omega$$

Con ella,

$$I_{C,0} = \frac{V_{C,0}}{X_C} \simeq \frac{120}{2,65 \cdot 10^8} \simeq 4,52 \cdot 10^{-7} \text{ A}.$$

La potencia media consumida por el condensador es $P_{C,m} = 0$.

- c) Si se conecta a un inductor $L = 20 \cdot 10^{-3}$ H, el voltaje de pico en el inductor será

$$V_{L,0} = 120 \text{ V.}$$

La reactancia inductiva es

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 60 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \simeq 7,54 \Omega$$

y la corriente de pico resulta

$$I_{L,0} = \frac{V_{L,0}}{X_L} \simeq \frac{120}{7,54} \simeq 15,9 \text{ A.}$$

La potencia media consumida por la bobina es $P_{L,m} = 0$.

2. Un generador de corriente alterna de 50 Hz de frecuencia está conectado a una asociación en serie de una resistencia $R = 3 \text{ k}\Omega$ y un condensador $C = 15 \mu\text{F}$. Calcula la impedancia equivalente y expresa el resultado en forma de binomio y en forma polar.

Sol. Las impedancias de la resistencia y el condensador son

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 3 \cdot 10^3 \Omega, \\ Z_C &= \frac{-i}{\omega C} = \frac{-i}{2\pi \cdot 50 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} \simeq -212 i \Omega. \end{aligned}$$

Como la resistencia y el condensador están en serie, la impedancia equivalente es

$$Z = Z_R + Z_C \simeq (3000 - 212 i) \Omega.$$

Esta es la forma binomial de Z . Para la forma polar, hay que calcular el módulo y argumento de Z :

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{3000^2 + (-212)^2} \simeq 3007 \Omega, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{-212}{3000}\right) \simeq -0,0705 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Con esto, la impedancia resulta

$$Z = |Z| e^{i\phi} \simeq (3007 e^{-0,0705 i}) \Omega$$

3. Una resistencia $R = 3\text{ k}\Omega$ y un inductor $L = 2,4\text{ H}$ están conectados en paralelo en un circuito de corriente alterna con 50 Hz de frecuencia. Calcula la impedancia equivalente en forma de binomio y en forma polar.

Sol. Las impedancias de la resistencia y el inductor son

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 3 \cdot 10^3 \Omega, \\ Z_L &= i\omega L = i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 2,4 = 240\pi i \Omega. \end{aligned}$$

La impedancia equivalente cumple

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{3000} + \frac{1}{240\pi i} = \frac{1}{3000} - \frac{i}{240\pi} \simeq 3,33 \cdot 10^{-4} - 1,33 \cdot 10^{-3} i.$$

Para obtener Z , se ha de invertir el resultado anterior,

$$\begin{aligned} Z &\simeq \frac{1}{3,33 \cdot 10^{-4} - 1,33 \cdot 10^{-3} i} = \frac{3,33 \cdot 10^{-4} + 1,33 \cdot 10^{-3} i}{(3,33 \cdot 10^{-4})^2 + (1,33 \cdot 10^{-3})^2} \\ &\simeq (178 + 709 i) \Omega, \end{aligned}$$

donde hemos multiplicado, arriba y abajo, por el conjugado del denominador para pasar por la segunda igualdad. Para la forma polar, calculamos el módulo y argumento de Z ,

$$\begin{aligned} |Z| &\simeq \sqrt{178^2 + 709^2} \simeq 731 \Omega, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{709}{178}\right) \simeq 1,32 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Con esto,

$$Z = |Z| e^{i\phi} \simeq (731 e^{1,32i}) \Omega.$$

4. Calcula la corriente instantánea y la potencia instantánea proporcionada por el generador de un circuito formado por un generador eléctrico, de 120 V de fem de pico y 50 Hz de frecuencia, conectado a un condensador de $5\ \mu\text{F}$.

Sol. Con los datos del problema. la fem del generador es

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = 120\text{ V} \sin(100\pi t).$$

Pasamos el circuito a fasores e impedancias. El fasor de la fem del generador es

$$\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i \cdot 0} = 120\text{ V}$$

y la impedancia del condensador es

$$Z_C = \frac{-i}{\omega C} = \frac{-i}{100\pi \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \simeq -637 i \Omega.$$

Ahora, podemos resolver el circuito como si fuera de corriente continua con resistencias. El fasor corriente en el circuito es, por la ley de Ohm generalizada,

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{Z_C} \simeq \frac{120}{-637 i} = \frac{120}{637 e^{-i\pi/2}} \simeq (0,188 e^{i\pi/2}) \text{ A},$$

donde se ha usado que

$$-i = e^{-i\pi/2}.$$

Una vez encontrada la solución al circuito de fasores, pasamos el resultado de nuevo a valores de corriente alterna:

$$\begin{aligned} \hat{I} \simeq (0,188 e^{i\pi/2}) \text{ A} &\Rightarrow I(t) \simeq 0,188 \text{ A} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,188 \text{ A} \cos(120\pi t). \end{aligned}$$

La potencia instantánea proporcionada por el generador es

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)\mathcal{E}(t) \simeq 0,188 \text{ A} \cos(120\pi t) \cdot 120 \text{ V} \sin(100\pi t) \\ &\simeq 22,6 \text{ W} \sin(100\pi t) \cos(100\pi t) = 11,3 \text{ W} \sin(200\pi t). \end{aligned}$$

En la última igualdad, se ha usado que

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

para cualquier número α .

5. Calcula la corriente instantánea y la potencia instantánea proporcionada por el generador de un circuito formado por un generador eléctrico, de 120 V de fem de pico y 50 Hz de frecuencia, conectado a un inductor de 5 H.

Sol. La fem del generador es

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = 120 \text{ V} \sin(100\pi t).$$

Pasamos el circuito a fasores e impedancias. El fasor de la fem del generador es

$$\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 = 120 \text{ V}$$

y la impedancia del inductor es

$$Z_L = i\omega L = i \cdot 100\pi \cdot 5 = 500\pi i \Omega.$$

Ahora, mediante la ley de Ohm generalizada, el fasor corriente en el circuito es

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{Z_L} = \frac{120}{500\pi i} = \frac{120}{500\pi e^{i\pi/2}} \simeq (0,0764 e^{-i\pi/2}) \text{ A},$$

donde se ha usado que

$$i = e^{i\pi/2}.$$

Pasamos el resultado de nuevo a valores de corriente alterna:

$$\begin{aligned} \hat{I} \simeq (0,0764 e^{-i\pi/2}) \text{ A} &\Rightarrow I(t) \simeq 0,0764 \text{ A} \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -0,0764 \text{ A} \cos(100\pi t). \end{aligned}$$

La potencia instantánea proporcionada por el generador es

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)\mathcal{E}(t) = -0,0764 \text{ A} \cos(100\pi t) \cdot 120 \text{ V} \sin(100\pi t) \\ &\simeq -9,17 \text{ W} \sin(100\pi t) \cos(100\pi t) \simeq -4,58 \text{ W} \sin(200\pi t). \end{aligned}$$

Así, a modo de ejemplo, en el instante $t_1 = 0,007 \text{ s}$, la potencia proporcionada por el generador es

$$P_1 \simeq -4,58 \text{ W} \sin(200\pi \cdot 0,007) \simeq 1,42 \text{ W},$$

mientras que en el instante $t_2 = 0,009 \text{ s}$ resulta

$$P_2 \simeq -4,58 \text{ W} \sin(200\pi \cdot 0,009) \simeq -3,71 \text{ W}.$$

6. Calcula la corriente y el voltaje de pico en cada elemento de un circuito RC en serie. Ten en cuenta que el que generador tiene una fem de pico de 311 V con una frecuencia de 50 Hz , el condensador tiene una capacidad de $75 \mu\text{F}$ y la resistencia es de 300Ω .

Sol. Las impedancias de la resistencia y el condensador son:

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 300 \Omega, \\ Z_C &= \frac{-i}{\omega C} = \frac{-i}{2\pi \cdot 50 \cdot 75 \cdot 10^{-6}} \simeq -42,4 i \Omega. \end{aligned}$$

La impedancia equivalente en serie es

$$Z = Z_R + Z_C \simeq (300 - 42,4i) \Omega.$$

El ejercicio nos pide valores de pico. Para calcularlos, no hace falta obtener los fasores. Basta con usar valores de pico y módulos de impedancias. Por ejemplo, el valor de pico de la corriente en el circuito es

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \simeq \frac{311}{\sqrt{300^2 + (-42,4)^2}} \simeq 1,03 \text{ A}.$$

Los valores de pico de los voltajes en la resistencia y el condensador son, por la ley de Ohm generalizada,

$$\begin{aligned} V_{R0} &= I_0 |Z_R| \simeq 1,03 \cdot 300 \simeq 308 \text{ V}, \\ V_{C0} &= I_0 |Z_C| \simeq 1,03 \cdot 42,4 \simeq 43,5 \text{ V}. \end{aligned}$$

7. Calcula la corriente y el voltaje instantáneos en cada elemento de un circuito RL en paralelo. Ten en cuenta que el generador tiene una fem de pico de 311 V y una frecuencia de 50 Hz, la bobina tiene una autoinductancia de 2 H y la resistencia es de 500 Ω .

Sol. Las impedancias son:

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 500 \Omega, \\ Z_L &= i\omega L = i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 2 = 200\pi i \Omega. \end{aligned}$$

La impedancia equivalente en paralelo cumple

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{500} + \frac{1}{200\pi i} = \frac{1}{500} - \frac{i}{200\pi} \simeq 2 \cdot 10^{-3} - 1,59 \cdot 10^{-3} i.$$

Invirtiendo el resultado anterior,

$$\begin{aligned} Z &\simeq \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} - 1,59 \cdot 10^{-3} i} = \frac{2 \cdot 10^{-3} + 1,59 \cdot 10^{-3} i}{(2 \cdot 10^{-3})^2 + (1,59 \cdot 10^{-3})^2} \\ &\simeq (306 + 244i) \Omega. \end{aligned}$$

En forma polar, dado que

$$\begin{aligned} |Z| &\simeq \sqrt{306^2 + 244^2} \simeq 391 \Omega, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{244}{306}\right) \simeq 0,673 \text{ rad}, \end{aligned}$$

tenemos

$$Z \simeq (391 e^{0,673i}) \Omega.$$

La fem instantánea proporcionada por el generador es la misma que el voltaje de la resistencia y el inductor, pues todos los elementos están en paralelo:

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) = V_L(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = 311 \text{ V} \sin(100\pi t).$$

Dado que el ejercicio nos pide valores instantáneos, hemos de usar fasores. El fasor de los voltajes en el generador, resistencia y bobina es

$$\widehat{\mathcal{E}} = \widehat{V}_R = \widehat{V}_L = 311 \text{ V}.$$

A partir de aquí y del valor de las impedancias, los fasores de las corrientes en el generador, la resistencia y la bobina son

$$\begin{aligned} \widehat{I} &= \frac{\widehat{\mathcal{E}}}{Z} \simeq \frac{311}{391 e^{0,673i}} \simeq (0,795 e^{-0,673i}) \text{ A}, \\ \widehat{I}_R &= \frac{\widehat{V}_R}{Z_R} = \frac{311}{500} = 0,622 \text{ A}, \\ \widehat{I}_L &= \frac{\widehat{V}_L}{Z_L} = \frac{311}{200\pi i} \simeq (0,469 e^{-i\pi/2}) \text{ A}. \end{aligned}$$

Sólo resta pasar estos fasores a señales alternas:

$$\begin{aligned} I(t) &\simeq 0,795 \text{ A} \sin(100\pi t - 0,673), \\ I_R(t) &\simeq 0,622 \text{ A} \sin(100\pi t), \\ I_L(t) &\simeq 0,4695 \text{ A} \sin(100\pi t - \pi/2). \end{aligned}$$

8. Un generador de corriente alterna, de 220 V de fem eficaz y 50 Hz de frecuencia, está conectado a una red de impedancia equivalente igual $(150 + 200i) \Omega$. Calcula la corriente instantánea a través del generador así como las potencias media, reactiva y aparente proporcionadas por el generador.

Sol. Como fem de pico del generador es

$$\mathcal{E}_{ef} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathcal{E}_0 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{ef} = \sqrt{2} \cdot 220 \simeq 311 \text{ V},$$

la fem instantánea resulta

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) \simeq 311 \text{ V} \sin(100\pi t).$$

Por otro lado, el módulo y argumento de la impedancia equivalente son

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{(150)^2 + (200)^2} = 250 \Omega, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{200}{150}\right) \simeq 0,644 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Así, en forma polar, la impedancia Z es

$$Z = (250 e^{0,644i}) \Omega.$$

Para calcular la corriente instantánea a través del generador, utilizamos fasores. El fasor de la fem es

$$\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \simeq 311 \text{ V}.$$

El fasor de la corriente total, por la ley de Ohm generalizada, es

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{\mathcal{E}}}{Z} \simeq \frac{311}{250 e^{0,644i}} \simeq (1,24 e^{-0,644i}) \text{ A}.$$

La corriente instantánea resulta

$$I(t) \simeq 1,24 \text{ A} \sin(100\pi t - 0,644).$$

Las potencias media, reactiva y aparente proporcionadas por el generador son

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \phi \simeq \frac{1}{2} \cdot 311 \cdot 1,24 \cdot \cos 0,644 \simeq 308 \text{ W}, \\ P_r &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \sin \phi = \frac{1}{2} \cdot 311 \cdot 1,24 \cdot \sin 0,644 \simeq 232 \text{ W}, \\ P_a &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \simeq \frac{1}{2} \cdot 311 \cdot 1,24 = 386 \text{ W}. \end{aligned}$$

9. El generador de un circuito de corriente alterna proporciona unas potencias reactiva y aparente de 50 W y 100 W, respectivamente. Además, la parte imaginaria (reactiva) de la impedancia equivalente del circuito es 500Ω . Calcula:

- a) El factor de potencia del circuito.
- b) La potencia media proporcionada por el generador.
- c) La parte real (resistiva) de la impedancia total.

Sol.

- a) Las potencias reactiva y aparente, que son datos del ejercicio, se pueden escribir como

$$P_r = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \sin \phi,$$

$$P_a = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0.$$

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$\sin \phi = \frac{P_r}{P_a} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

De aquí, el factor de potencia es

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866.$$

Nótese que tomamos sólo la solución en que $\cos \phi$ es positivo. Ha de serlo porque la potencia media lo es.

- b) La potencia media o activa se puede escribir como

$$P_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \phi = P_a \cos \phi = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 86,6 \text{ W}.$$

- c) Las partes resistiva (real) y reactiva (imaginaria) de la impedancia total se pueden obtener a partir de la forma polar de la impedancia,

$$Z = |Z| e^{i\phi} = |Z| (\cos \phi + i \sin \phi),$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z) &= |Z| \cos \phi, \\ \operatorname{Im}(Z) &= |Z| \sin \phi. \end{aligned}$$

Despejando $|Z|$ de la segunda ecuación y sustituyendo el resultado en la primera,

$$\operatorname{Re}(Z) = |Z| \cos \phi = \operatorname{Im}(Z) \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = 500 \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} \simeq 866 \Omega.$$

10. Tenemos un circuito formado por una fuente de corriente alterna, de fem eficaz igual a 220 V y frecuencia 50 Hz, en serie con una resistencia de 100Ω , un condensador de $10 \mu\text{F}$ de capacidad y una bobina de $0,5 \text{ H}$. Calcula la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia suministrados por la fuente. Además, determina qué elemento debemos conectar en serie con el resto para hacer el factor de potencia igual a 1.
Sol. Se trata de un circuito RCL en serie. Las impedancias de los elementos son

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 100 \Omega, \\ Z_C &= \frac{-i}{\omega C} = \frac{-i}{2\pi \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \simeq -318 i \Omega, \\ Z_L &= i \omega L = i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,5 \simeq 157 i \Omega. \end{aligned}$$

La impedancia equivalente es

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L \simeq 100 - 318 i + 157 i \simeq (100 - 161 i) \Omega.$$

El módulo y argumento de Z son

$$\begin{aligned} |Z| &\simeq \sqrt{100^2 + (-161)^2} \simeq 190 \Omega, \\ \phi &\simeq \arctan\left(\frac{-161}{100}\right) = -1,01 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Con esto,

$$Z = |Z| e^{i\phi} \simeq (190 e^{-1,01 i}) \Omega.$$

La corriente efectiva a través del generador puede obtenerse con la ley de Ohm generalizada,

$$I_{ef} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{|Z|} \simeq \frac{220}{190} \simeq 1,16 \text{ A.}$$

Con todo lo anterior, ya podemos calcular las potencias proporcionadas por el generador:

$$\begin{aligned} P_m &= \mathcal{E}_{ef} I_{ef} \cos \phi \simeq 220 \cdot 1,16 \cdot \cos(-1,01) \simeq 135 \text{ W}, \\ P_r &= \mathcal{E}_{ef} I_{ef} \sin \phi = 220 \cdot 1,16 \cdot \sin(-1,01) \simeq -216 \text{ W}, \\ P_a &= \mathcal{E}_{ef} I_{ef} \simeq 220 \cdot 1,16 \simeq 255 \text{ W}. \end{aligned}$$

El factor de potencia resulta

$$\cos \phi \simeq \cos(-1,01) \simeq 0,532.$$

Dado que $Z \simeq (100 - 161i) \Omega$, para mejorar el factor de potencia (hacerlo igual o cercano a 1), se puede colocar, en serie con el resto de elementos, un dispositivo con una impedancia igual a

$$Z' \simeq 161i \Omega.$$

Dado que la impedancia es imaginaria pura y su parte imaginaria es positiva, este dispositivo es un inductor con una autoinductancia dada por

$$Z' = i\omega L' \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{Z'}{i\omega} \simeq \frac{161i}{i100\pi} \simeq 0,481 \text{ H.}$$