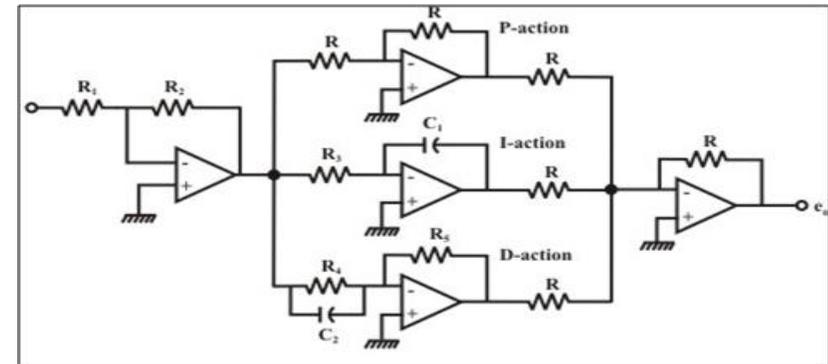
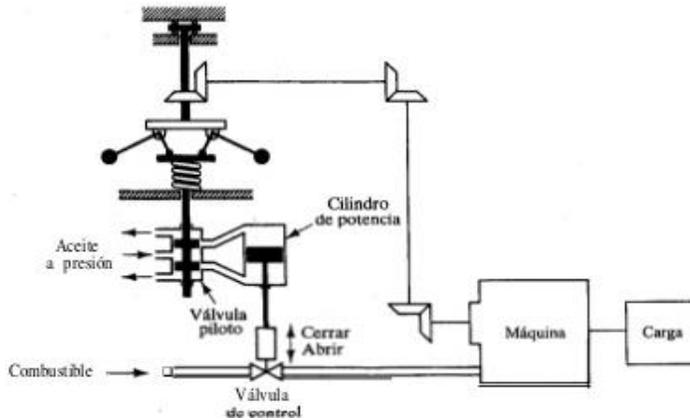
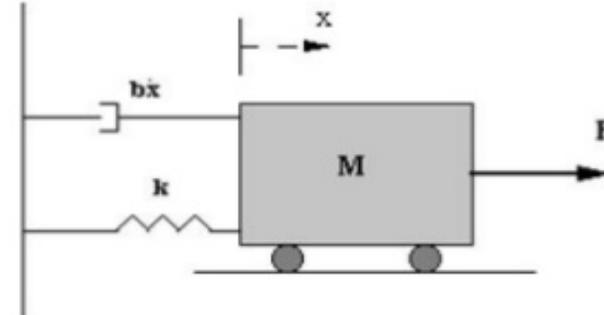
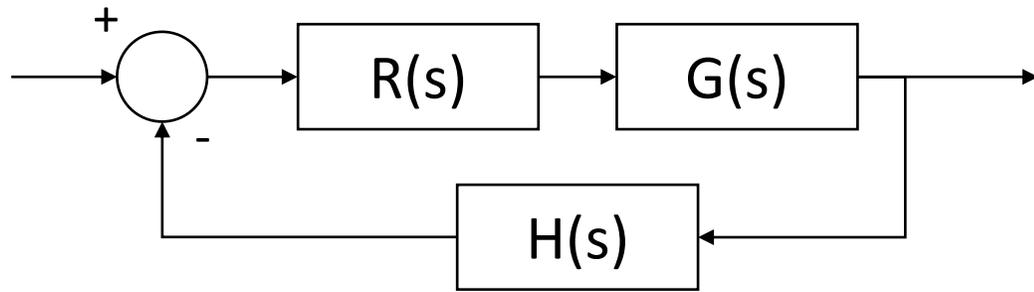


# Introducción a los sistemas de control en tiempo discreto

## TEMA 1

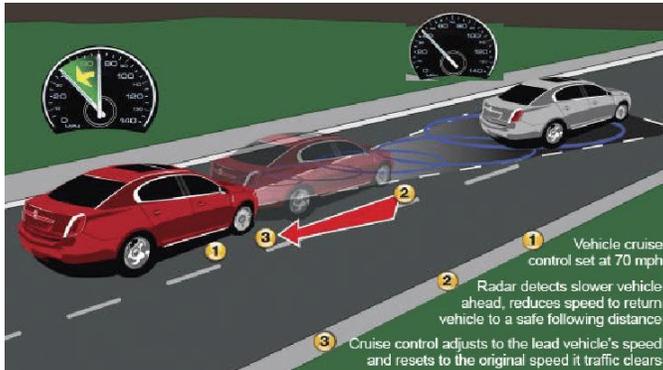
- Introducción
  - Características de los sistemas discretos frente a los sistemas continuos
  - Señales presentes en los sistemas discretos
- Sistemas de adquisición, conversión y distribución de datos
  - Estructura general
  - Conversión A/D: muestreo y retención
    - Errores asociados al proceso de discretización
  - Conversión D/A
    - Circuitos para la conversión D/A
    - Orden de la retención
- Ventajas e inconvenientes del control digital
- Planteamiento del problema de control discreto o de naturaleza digital



### Fundamentos necesarios: Conceptos básicos de control y automática

Diagramas de bloques, modelado de sistemas mecánicos y eléctricos, análisis de la respuesta temporal, diseño de controladores, análisis en el dominio de la frecuencia...

## Sistemas de control digitales/discretos



## Aparición y evolución de los computadores digitales

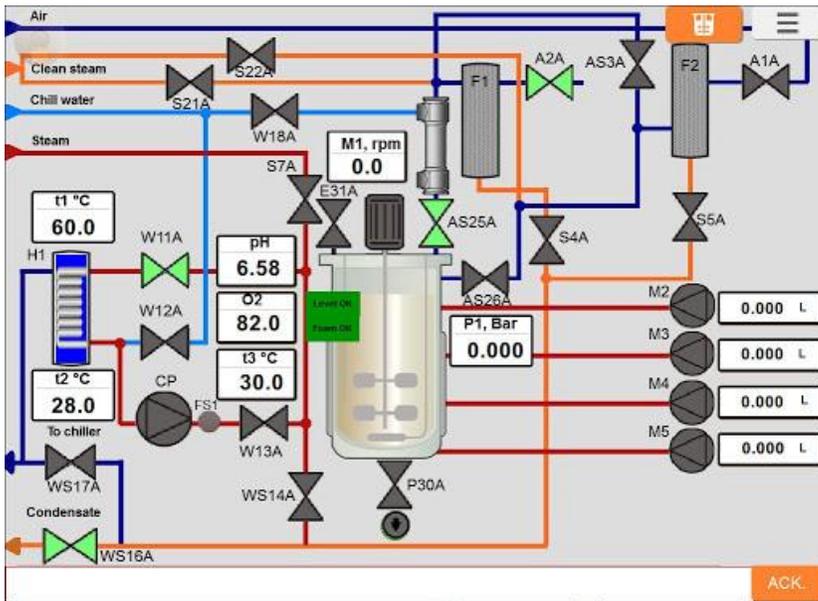


### Finales de la década de los 60's:

- Aparición de minicomputadoras (palabra de 16 bits, 8 a 124 KB de memoria y una unidad de disco).
- Se comienza a aplicar el control digital a proyectos cada vez más pequeños.

### Década de los 70's:

- Aparecen las microcomputadoras.
- Coste y consumo mínimos. Se hace rentable su empleo en gran número de aplicaciones. Se comienza a pensar en aplicar un microcomputador a cada conjunto de variables de un proceso.
- También en esta época hay grandes avances en la teoría de control y en desarrollo de sistemas de tiempo real.



## Características generales

- Sistemas de control digitales/discretos:
  - Controladores electrónicos: microcontrolador
  - Diferentes opciones de control:
    - Óptimo, mínima energía, multivariable...
  - Control de sistemas complejos: robots, vehículos, plantas industriales, etc.
  - “Barato” => electrodomésticos, electrónica de consumo, etc.

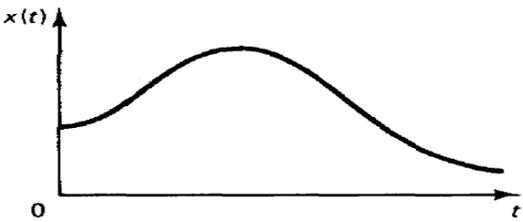
Ventajas }  
Inconvenientes } Proceso de conversión de analógico a digital (A/D)

## Características generales

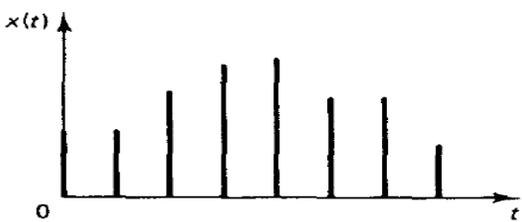
- Sistemas de control en tiempo discreto:
  - Ecuaciones diferenciales  $\Leftrightarrow$  Ecuaciones en diferencias
  - Las señales de control (sensores):
    - Sólo pueden cambiar en instantes discretos:  $(kT)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
    - Su valor está restringido a ciertos intervalos (cuantificación).
  - Periodo de muestreo  $T$  suficientemente corto.
- Proceso de transformación de la señal de trabajo continua a digital (muestreo-cuantificación):
  - Secuencia de valores en intervalos de tiempo discretos y equiespaciados.
  - Cuantización del valor en un intervalo discreto y equiespaciado.

# Señales presentes en los sistemas discretos

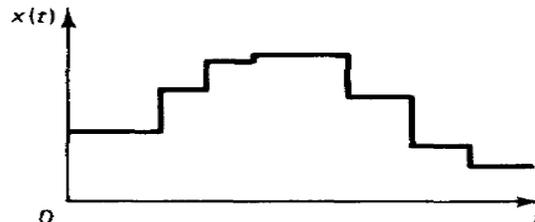
## Conversión Analógico/Digital



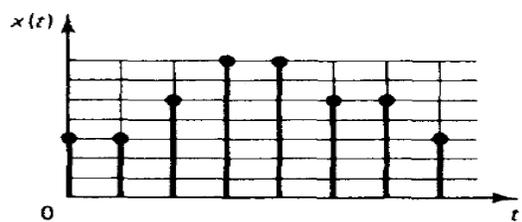
Continua en tiempo  
Continua en amplitud



Discreta en tiempo  
Continua en amplitud

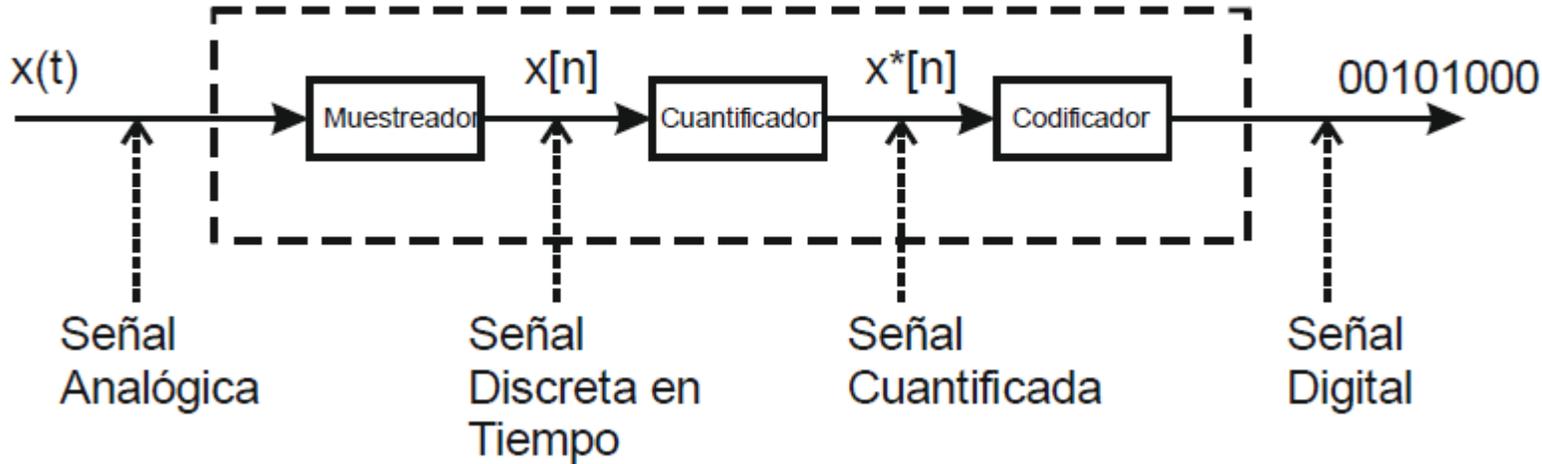


Continua en tiempo  
Discreta en amplitud



Discreta en tiempo  
Discreta en amplitud

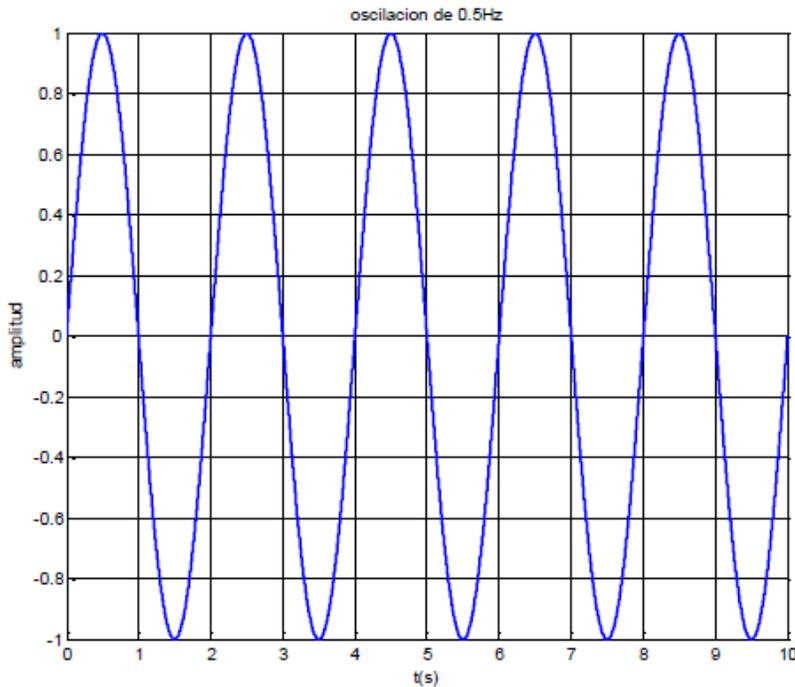
conversor A/D



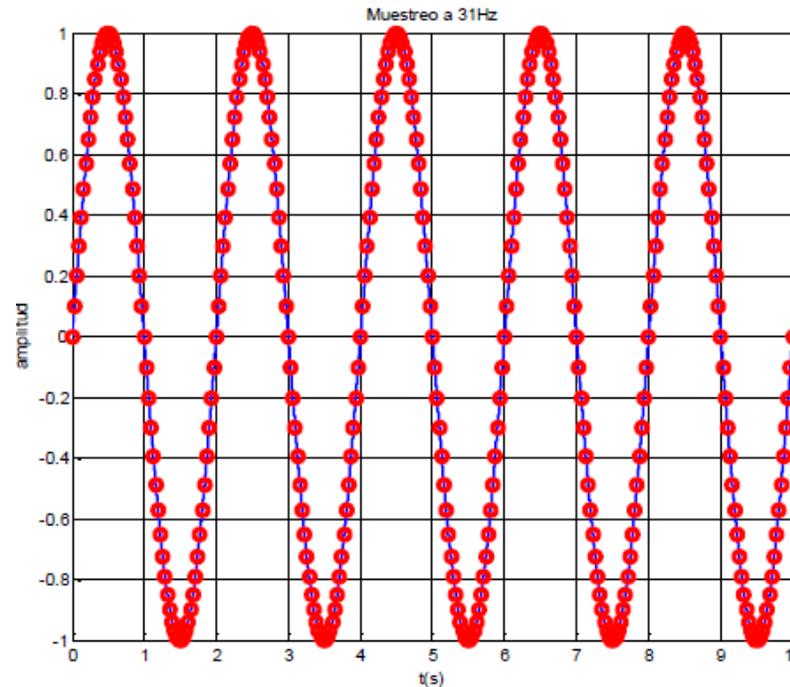
Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

# Señales presentes en los sistemas discretos

## Ejemplo: Muestreo

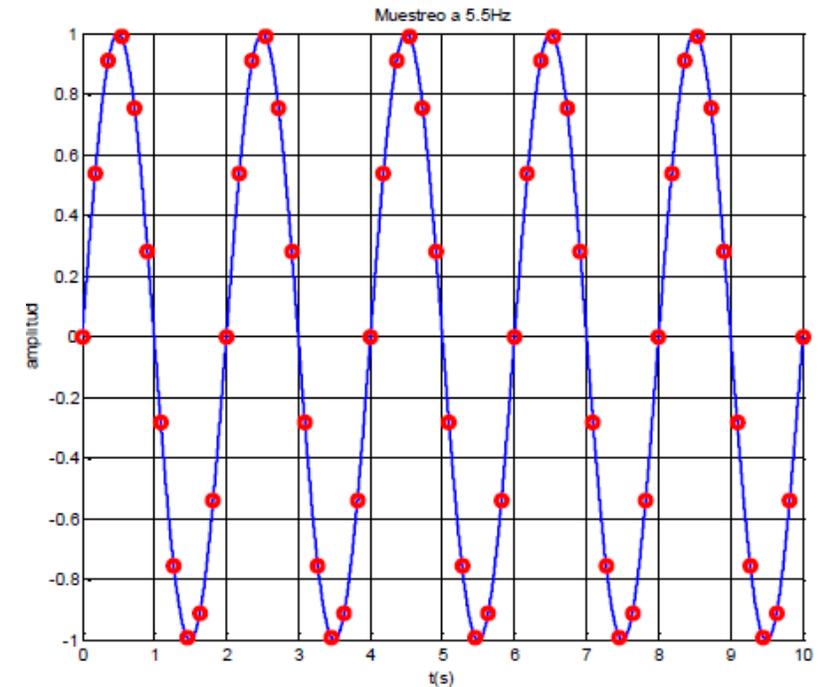


Señal continua original



Señales discretas reconstruidas

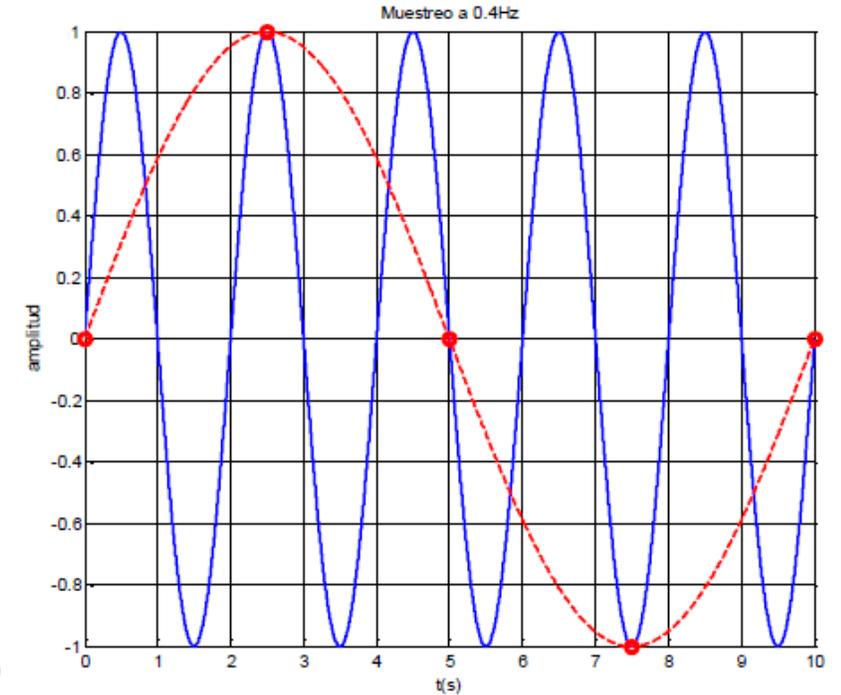
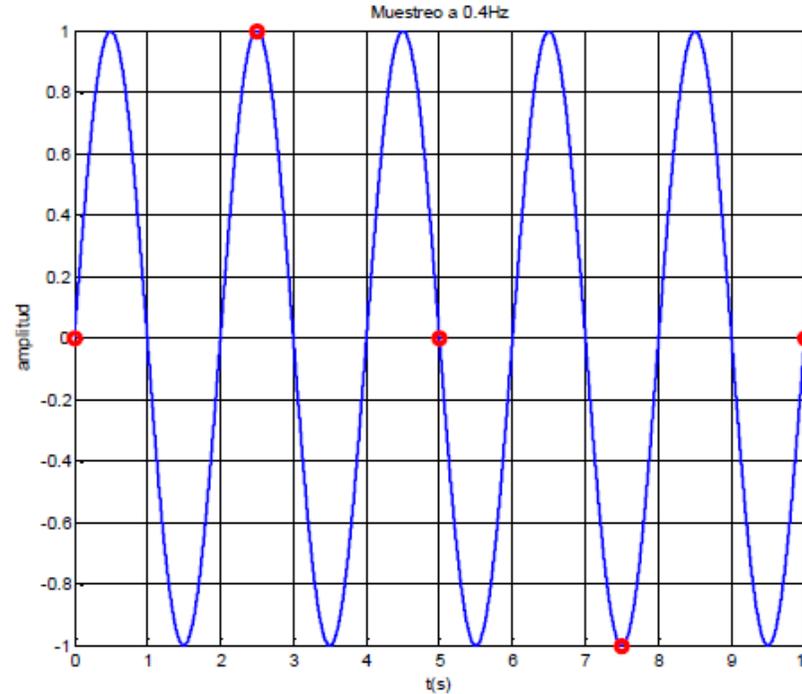
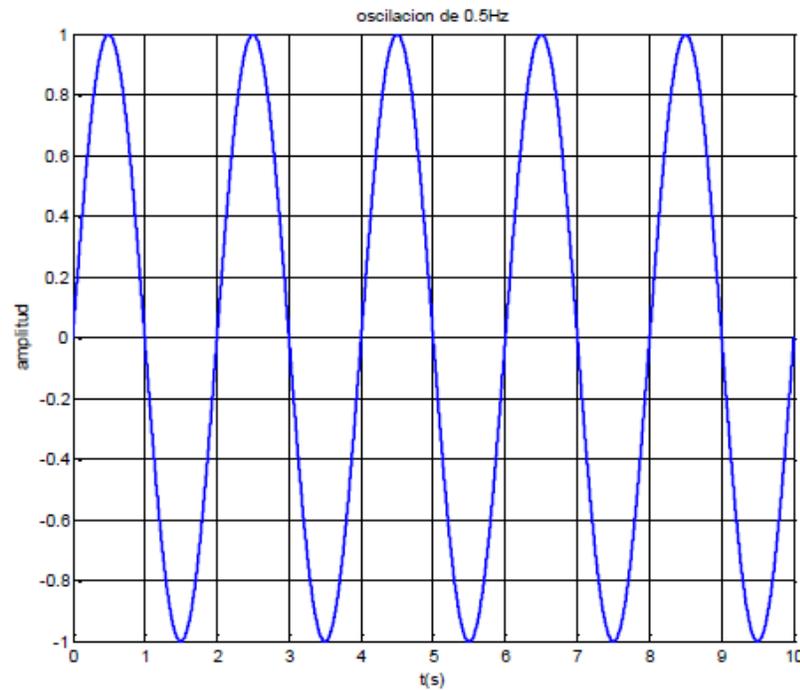
$f_{\text{muestreo}} \text{ rápida} = 31 \text{ Hz}$



$f_{\text{muestreo}} \text{ lenta} = 5,5 \text{ Hz}$

## Ejemplo: Muestreo

➤ **Problema:** pérdida de información en la “digitalización”

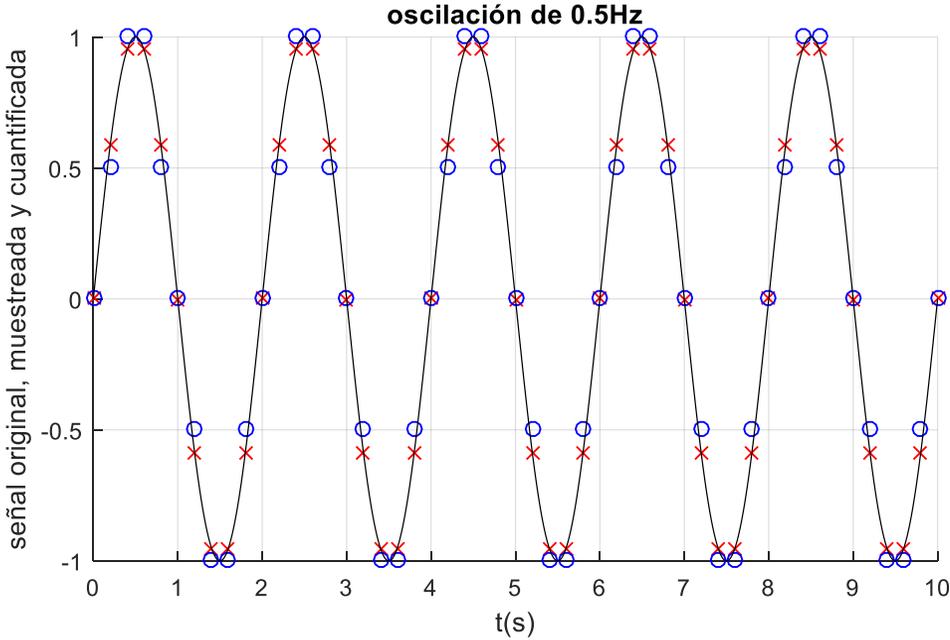
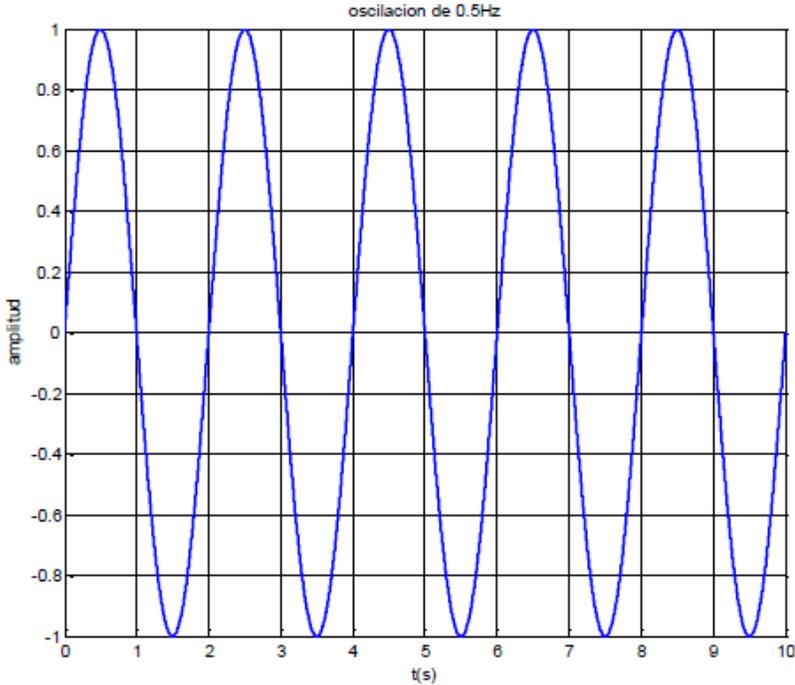
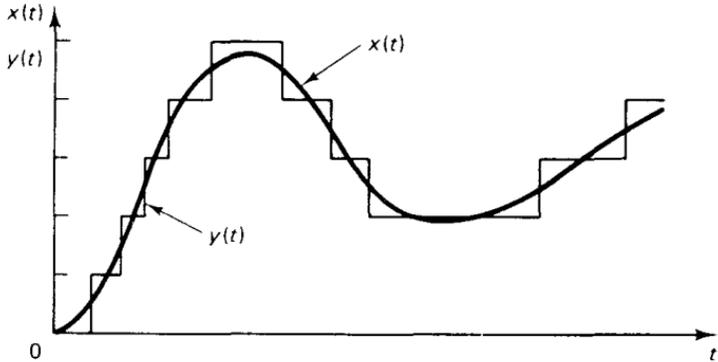
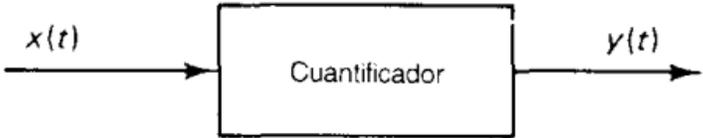


Existen diferentes tipos de muestreo:

- **Periódico:**  $t_k = kT$ ,  $k=0,1,2\dots$
- **De orden múltiple:** Patrón de los  $t_k$  se repite periódicamente
- **De tasa múltiple** dependiente de las características del lazo de control
- **Aleatorio**

# Señales presentes en los sistemas discretos

## Ejemplo: Cuantificación



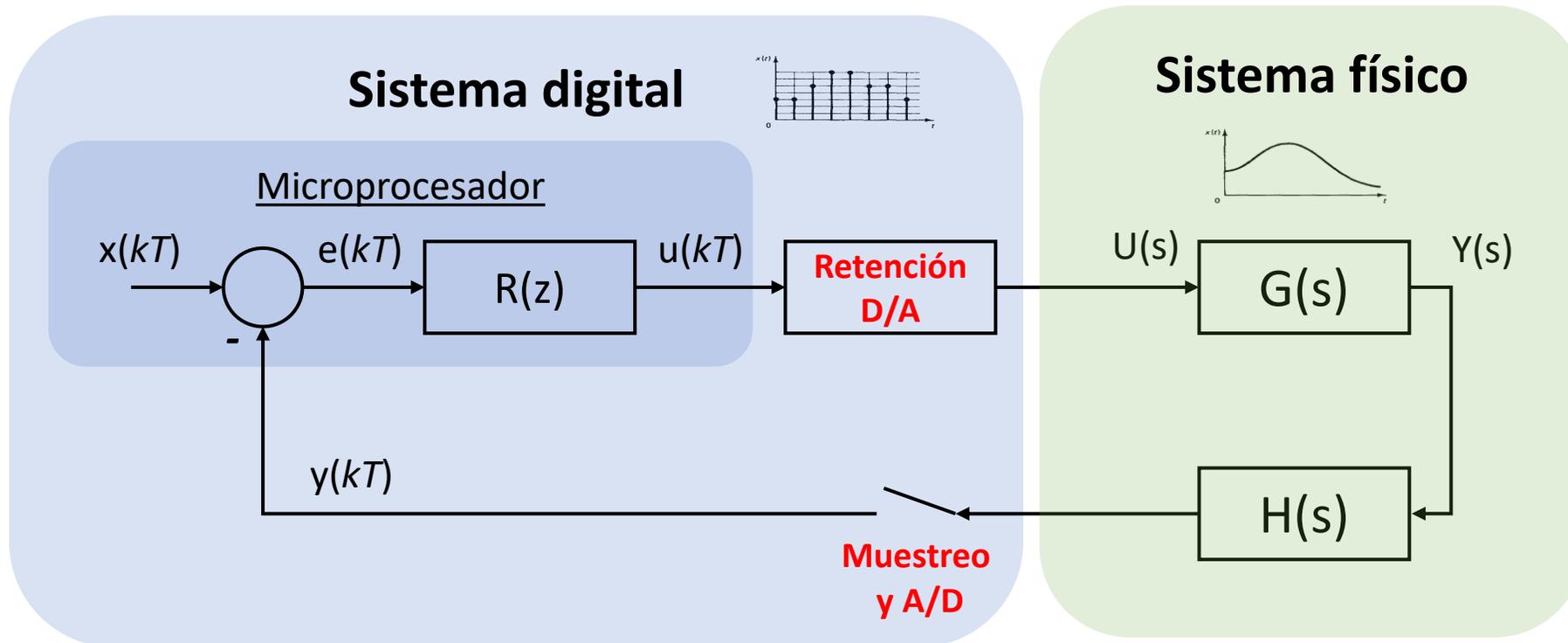
Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

### Comparativa de una señal digital vs. señal analógica:

- Inmunidad al ruido
- Facilidad para el procesamiento de la señal
- Amplificación sin ruido
- Pérdida de calidad/información
- Muestreo
  - Digitalización
  - Redondeo de operaciones/coeficientes
- Sincronización
- Retraso A/D

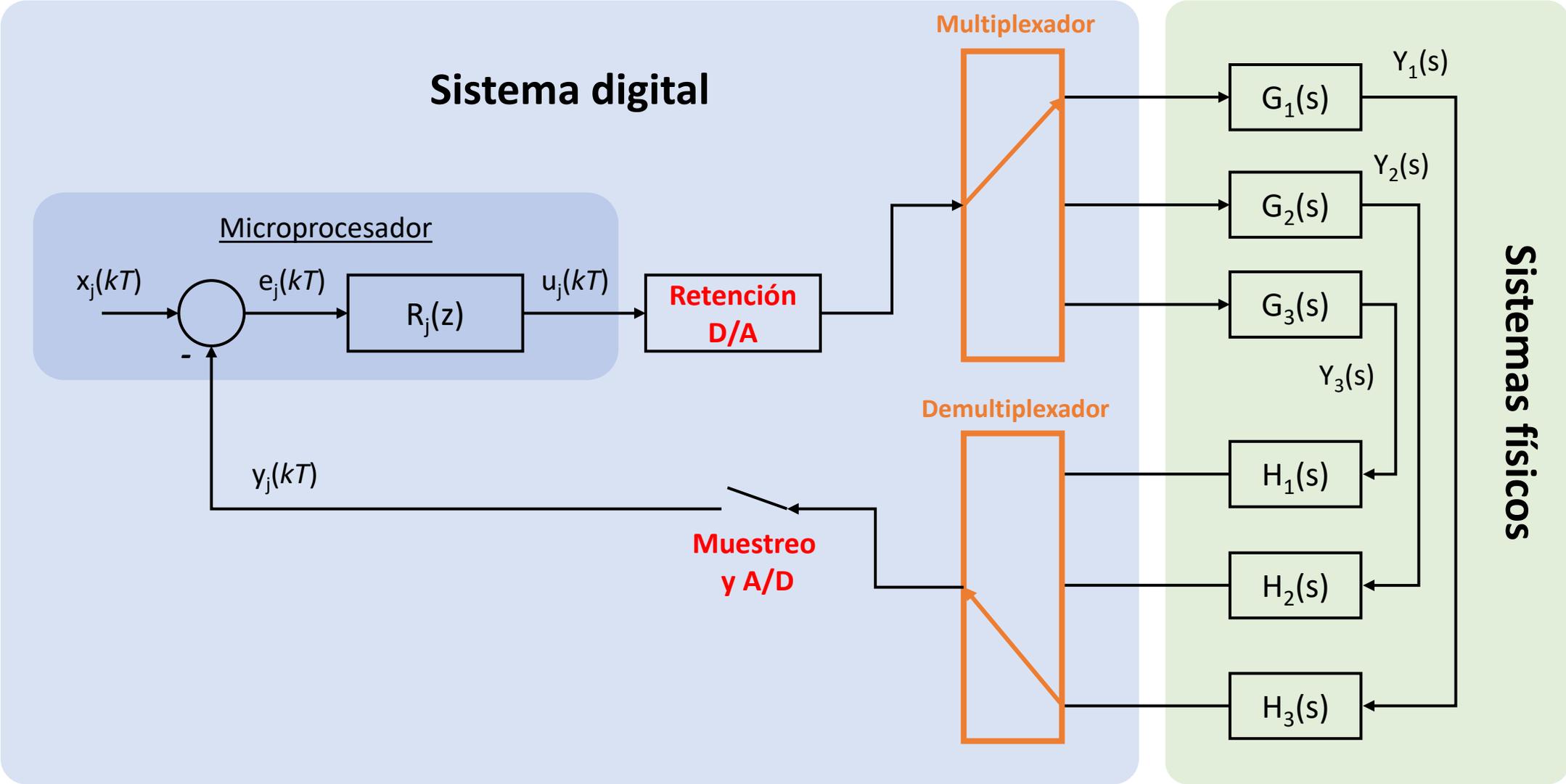
# Sistemas de adquisición, conversión y distribución de datos

## Estructura general de un sistema discreto de control (I)



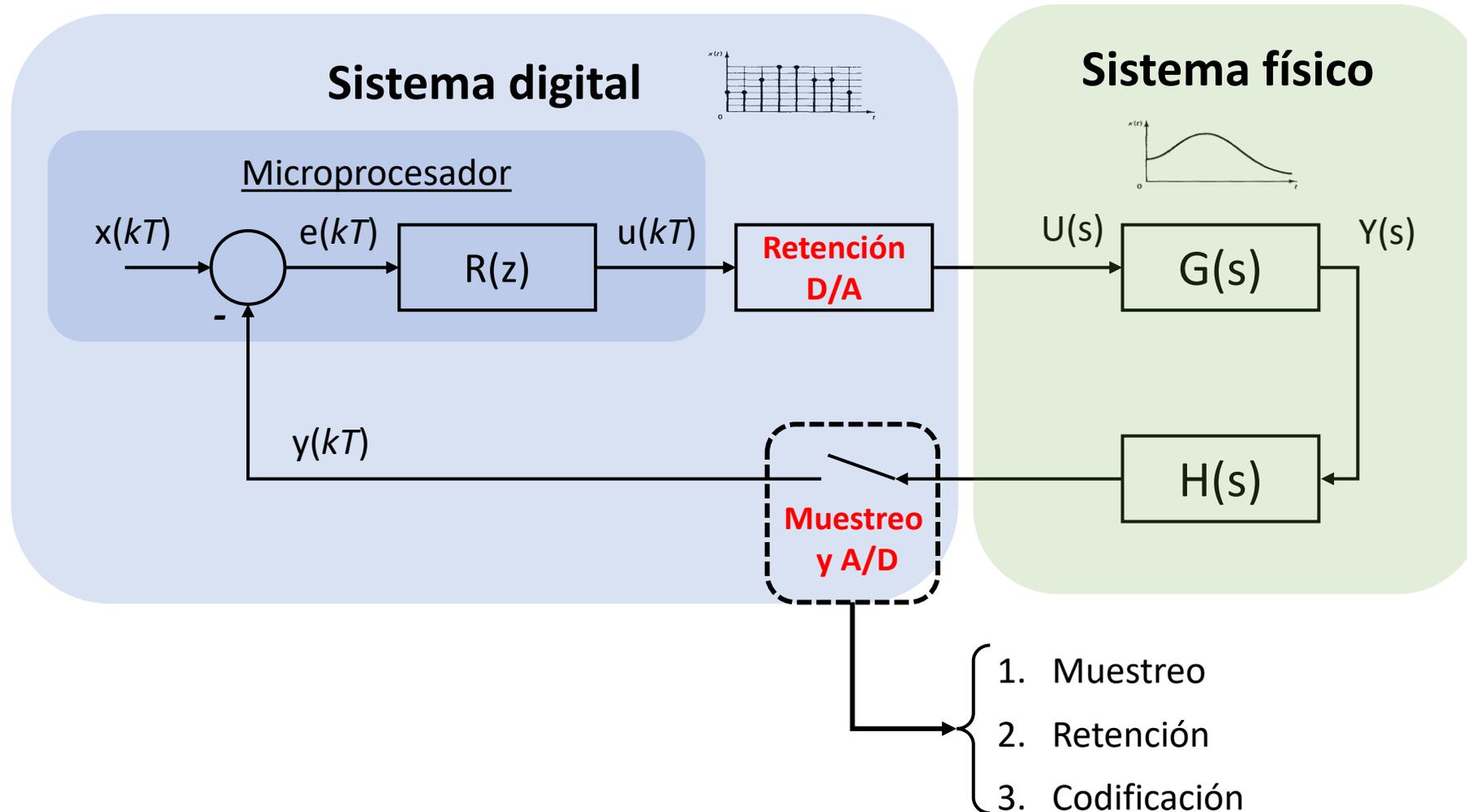
# Sistemas de adquisición, conversión y distribución de datos

## Estructura general de un sistema discreto de control (II)

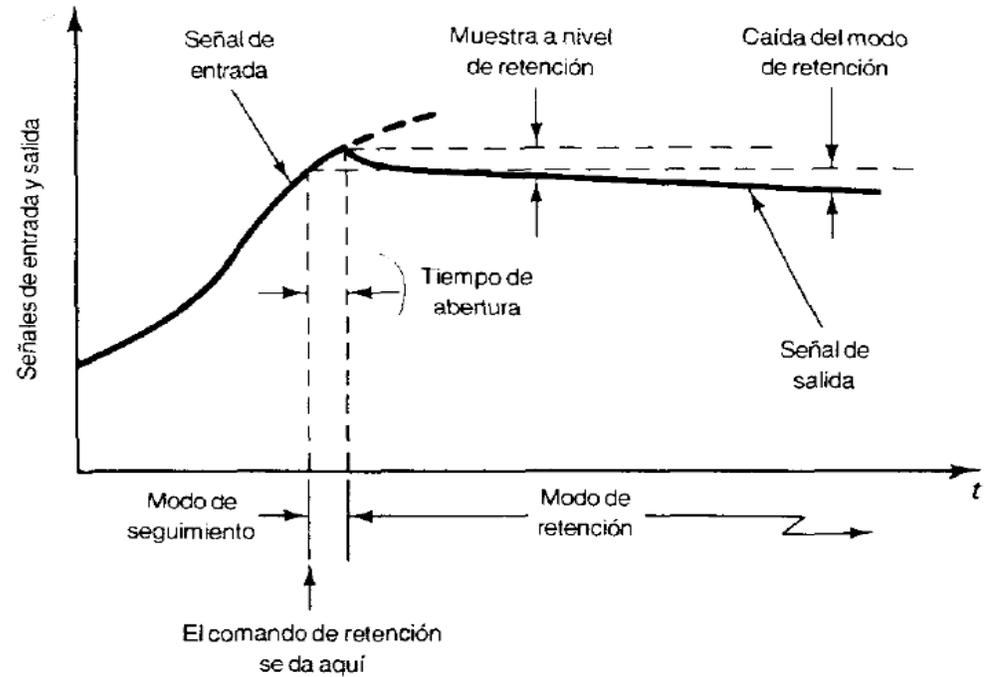
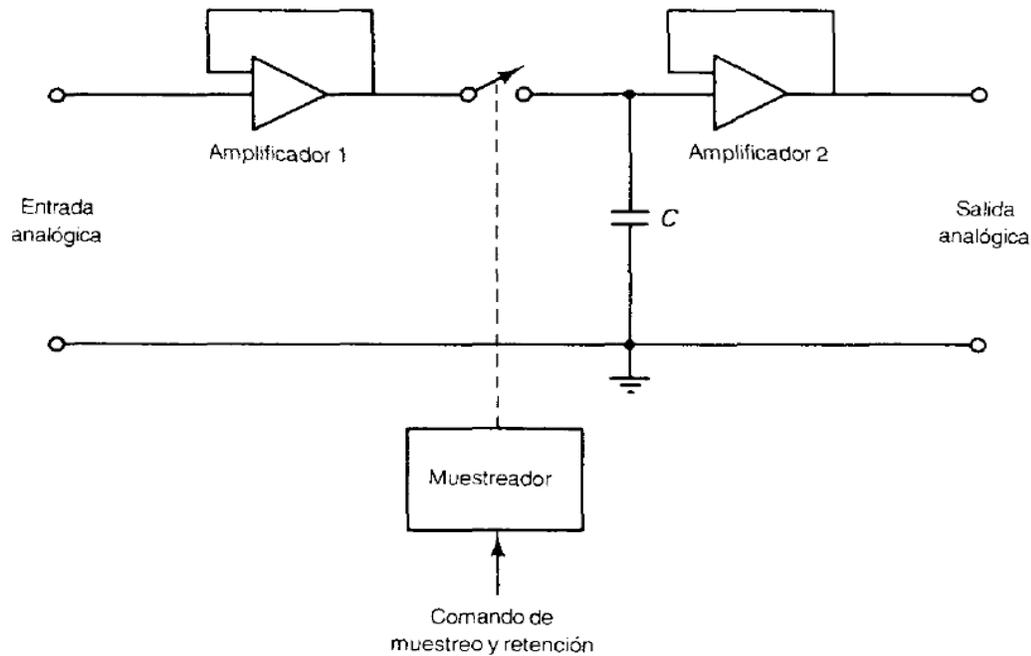


# Sistemas de adquisición, conversión y distribución de datos

Estructura general de un sistema discreto de control: Muestreo y conversión A/D



## Muestreo y retención



### Ejemplo de circuito S/H de muestro/retención: **Dispositivo de memoria de tensión**

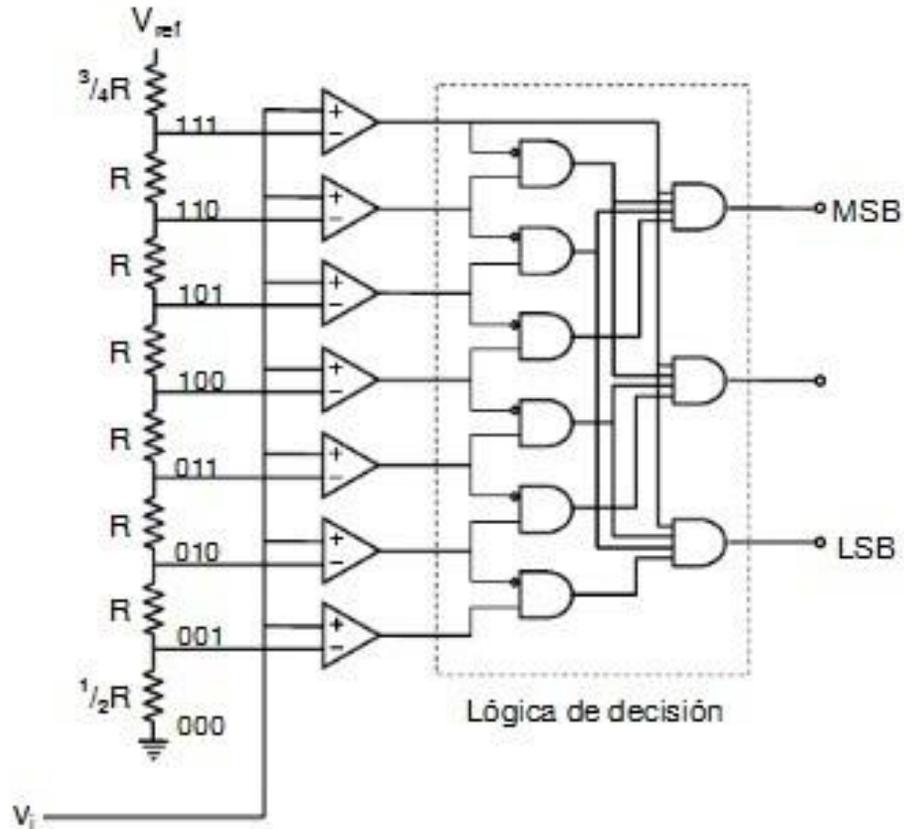
- Amplificador operacional 1: Aislamiento de la entrada (impedancia de entrada alta).
- Amplificador operacional 2: Aislamiento del voltaje en el condensador de retención.

### ➤ Modos de operación:

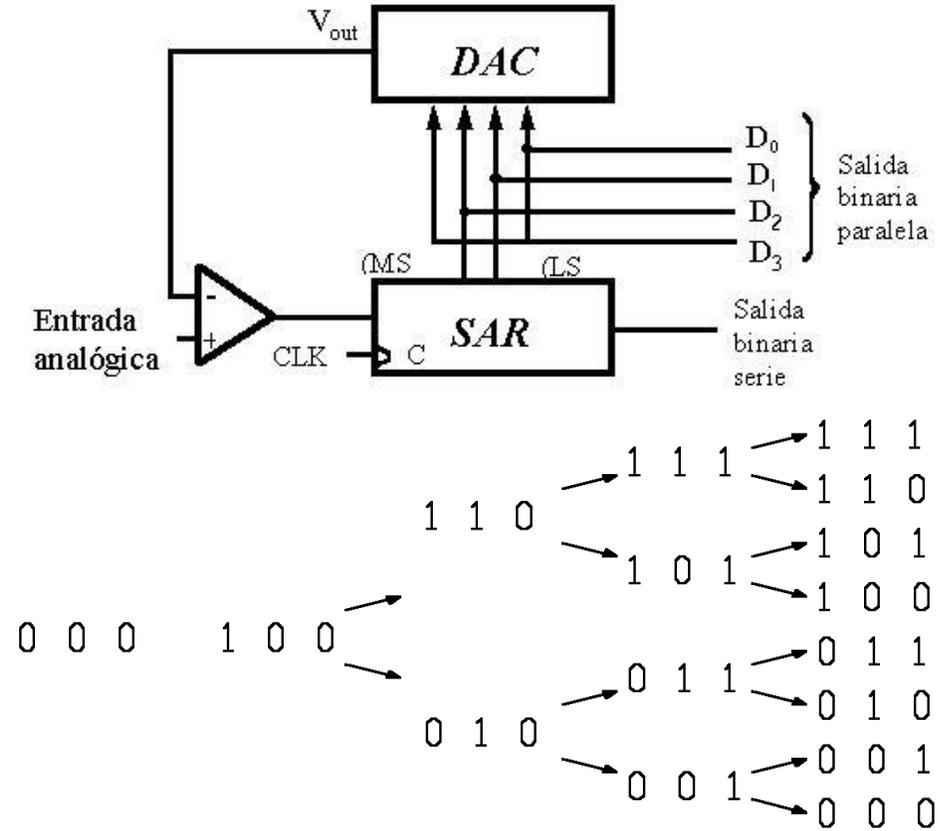
- Interruptor cerrado: Seguimiento de la entrada. El condensador se encuentra conectado a la misma.
- Interruptor abierto: Retención. La tensión del condensador se mantiene constante por un tiempo específico.

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Circuitos para la codificación



Convertidor tipo flash o paralelo  
(1 ciclo de reloj por conversión)



Convertidor por aproximaciones sucesivas  
(n ciclos de reloj por conversión)

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

# Errores debidos al proceso de “digitalización”

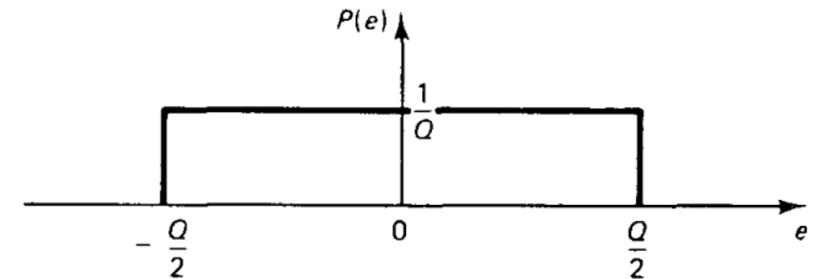
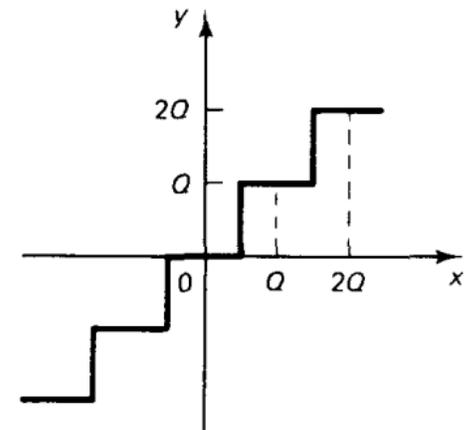
## Error de cuantificación ( $Q$ )

- Si  $n$  es suficientemente grande, se produce ruido blanco en el proceso, cuya varianza se encuentra en el intervalo  $0 \pm Q/2$ .
- Tomando la relación con el ancho de palabra, el valor promedio del error viene se puede obtener mediante RMS:

$$\overline{e(t)} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} e(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{\frac{Q}{2p} - \left(-\frac{Q}{2p}\right)} \int_{-Q/2p}^{Q/2p} (p \cdot t)^2 dt} = \frac{Q}{\sqrt{12}}$$

Por tanto, la varianza del error será:  $\sigma = \left(\frac{Q}{\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{Q^2}{12} = \frac{LSB^2}{12}$

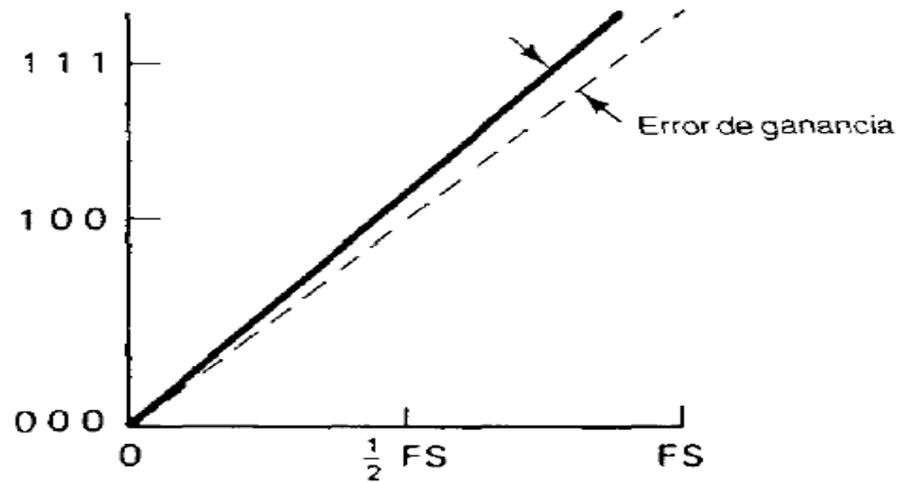
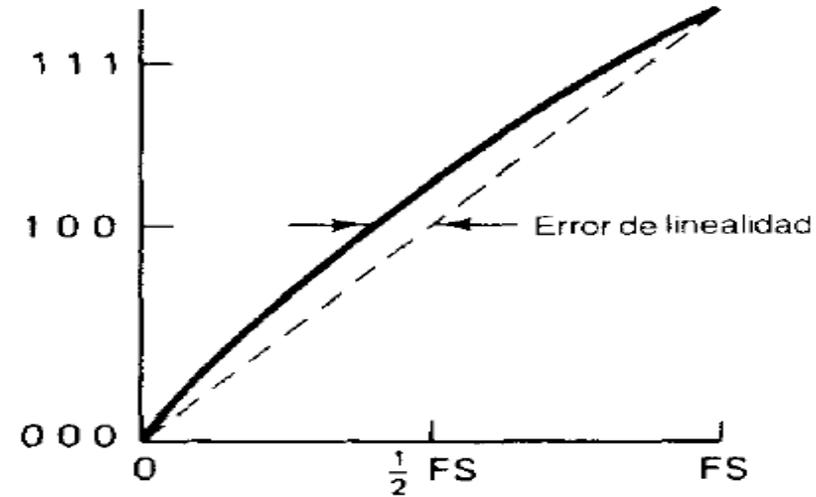
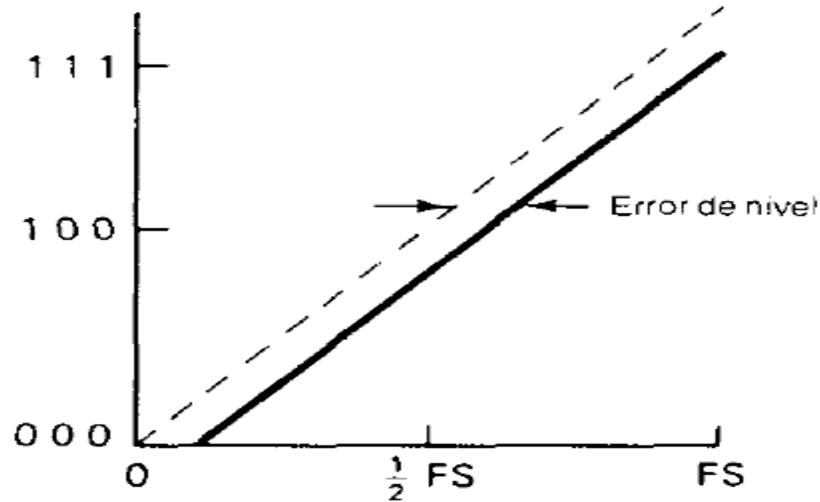
$$Q = \frac{FSR}{2^n} = LSB$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

# Errores debidos al proceso de "digitalización"

## Errores asociados a la conversión

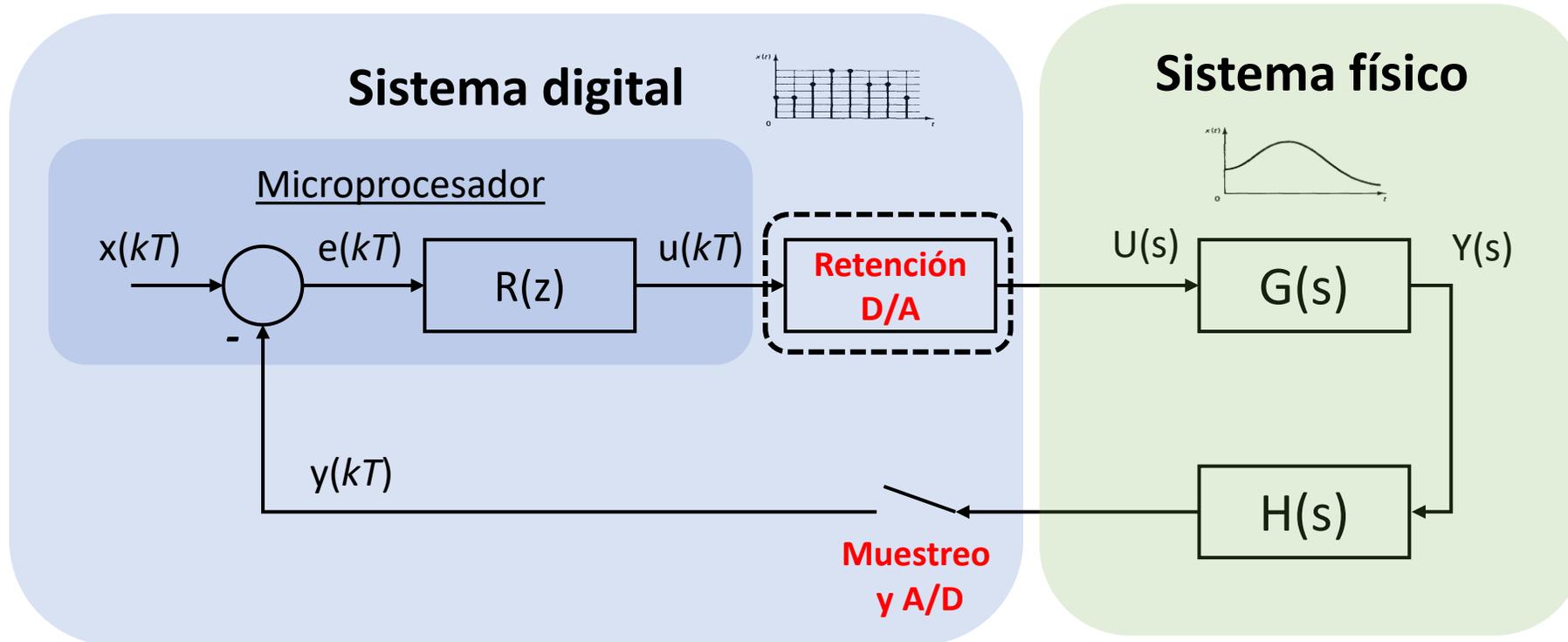


Los CAD reales difieren de los convertidores ideales en que los primeros siempre tienen algunos errores, tales como **errores de nivel, de linealidad y de ganancia**. Además, sus características cambian con el tiempo y la temperatura.

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

# Sistemas de adquisición, conversión y distribución de datos

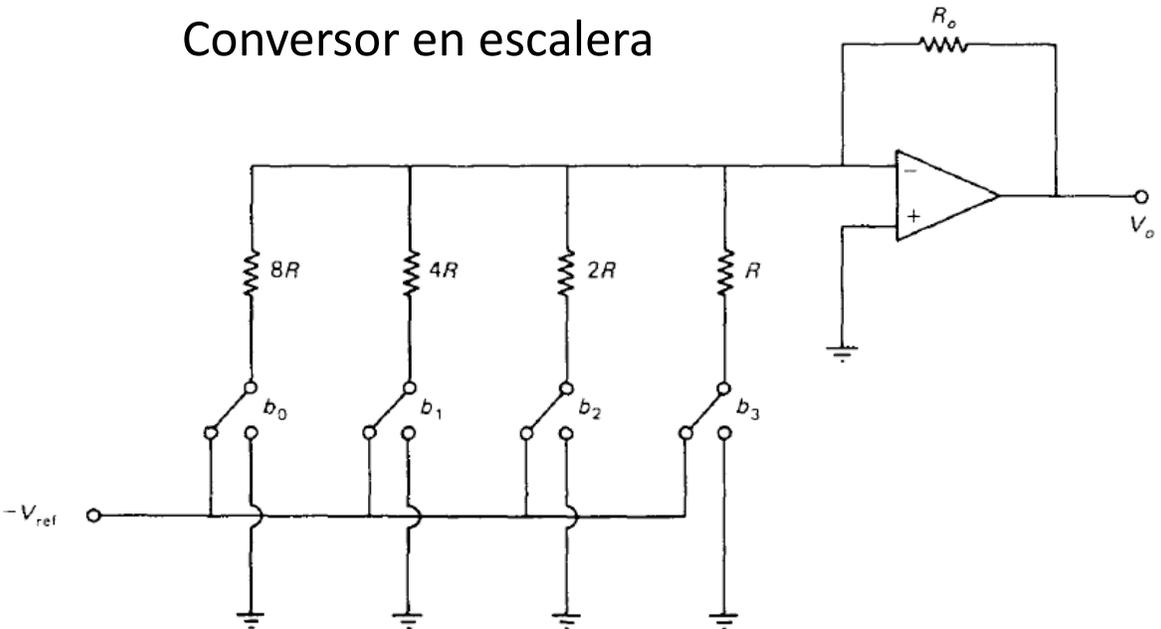
Estructura general de un sistema discreto de control: Retención D/A



# Conversión D/A: Retenedores

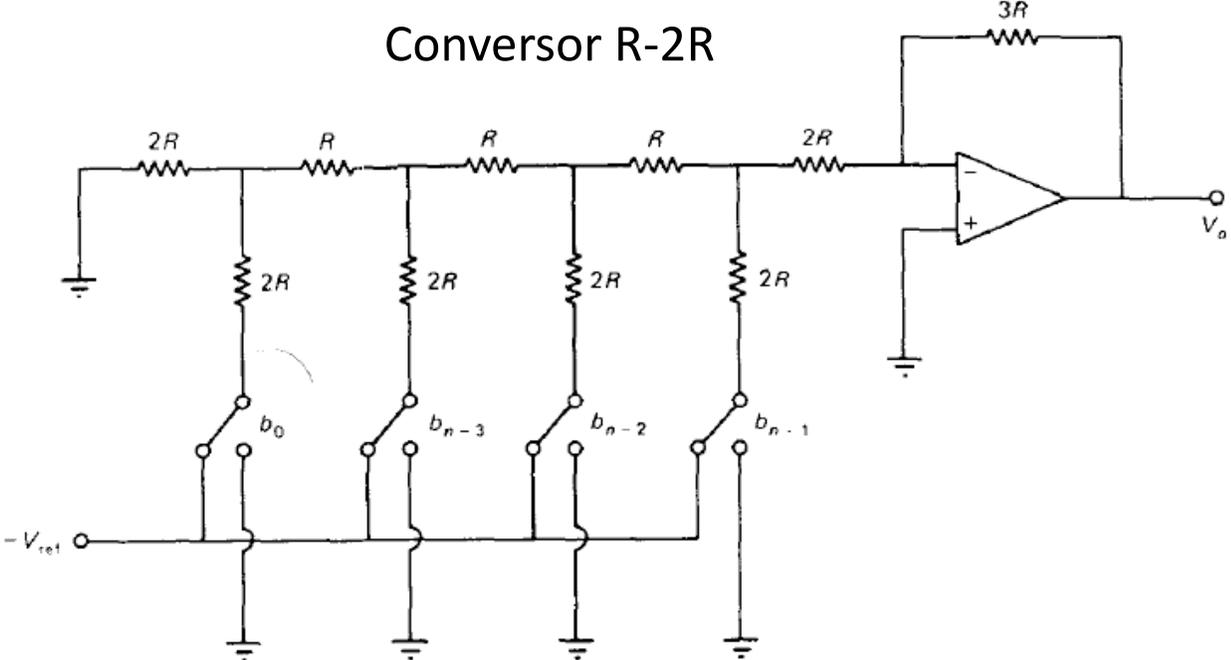
## Circuitos para la retención

Conversor en escalera



$$V_0 = \frac{R_0}{R} \left( b_3 + \frac{b_4}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8} \right) V_{Ref}$$

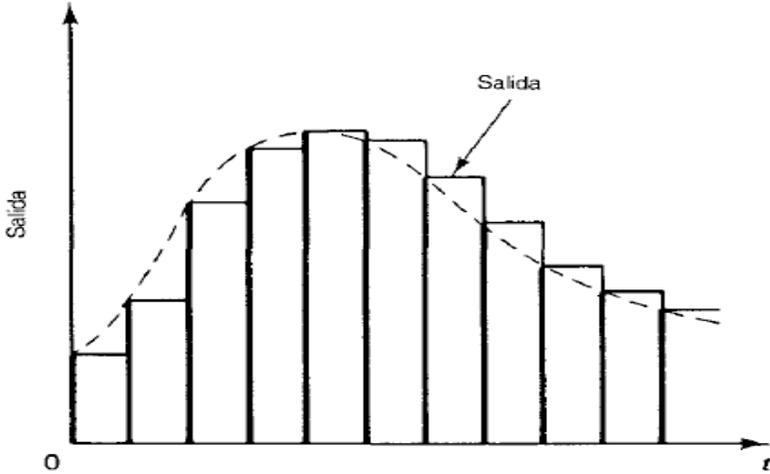
Conversor R-2R



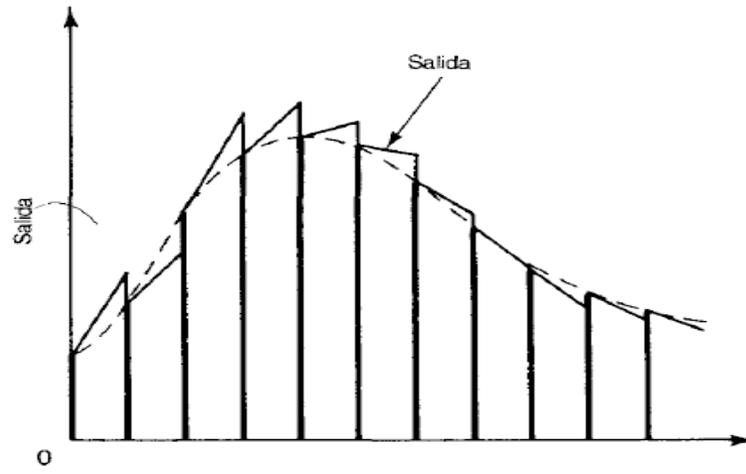
$$V_0 = \frac{1}{2} \left( b_3 + \frac{b_4}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8} \right) V_{Ref}$$

Katsuhiko OGATA, Discrete-time control systems. Prentice Hall (1994)

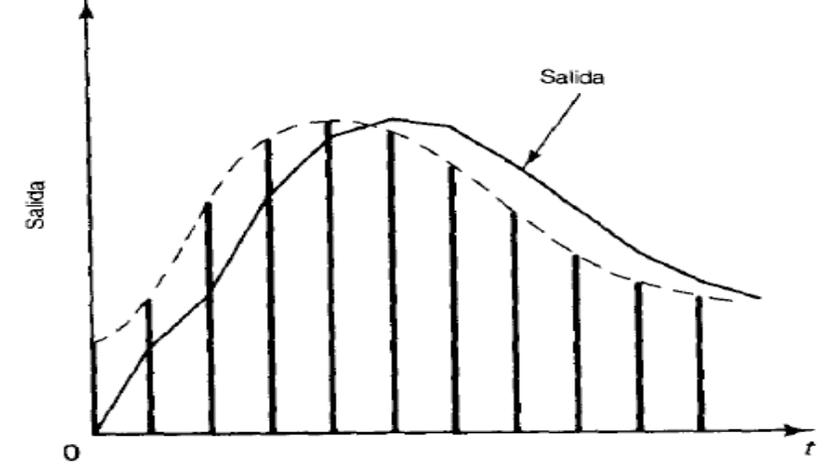
## Orden de la retención



Orden cero  
(ZOH)



Primer orden  
(FOH)



Polinomial

Genera la recta de interpolación entre cada dos valores obtenidos en instantes consecutivos:

$$f(t) = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{T} (t - kT) \text{ con } kT < t < (k + 1)T$$

**Señales no causales:** Para su realización en un sistema real es necesario conocer  $x_{k+1}$ . Se puede realizar aplicando un retardo en la muestra:

$$f(t) = x_k + \frac{x_k - x_{k-1}}{T} (t - kT) \text{ con } kT < t < (k + 1)T$$

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Ventajas

- **Precisión**: Se usan representaciones digitales de longitud finita (cuantificada) de las señales reales. La cuantificación implica un error de representación, pero menor que la degradación que pueden sufrir las señales analógicas (derivas con temperatura, con el paso del tiempo, sensibilidad a ruido eléctrico, etc.).
- **Errores de realización**: Trabajar con señales digitales implica realizar operaciones aritméticas con los valores almacenados. Los errores debido a la representación digital son despreciables frente al procesamiento analógico de señales (circuitos realizados con componentes eléctricos  $-R,L,C-$  con valores reales distintos de los ideales usados para el diseño).
- **Flexibilidad**: Los controladores digitales son realizaciones software. La modificación de los controladores es una reprogramación. Frente a ello, un controlador analógico se realiza en hardware y una modificación puede implicar el rediseño y construcción desde cero del nuevo controlador. Además, una ley de control compleja suele resultar mucho más sencilla de realizar en SW que fabricar el sistema HW que la realice.
- **Velocidad**: La respuesta de un controlador analógico, en teoría será siempre más rápida que la de un control discreto. No obstante, el avance de los computadores y la mejora de su velocidad de proceso ha hecho que la velocidad de respuesta de los controladores digitales sea equiparable a la de los analógicos (continuos) en determinadas aplicaciones.
- **Transmisión de datos**: La transmisión de datos a grandes distancias se puede llevar a cabo en formato digital a gran velocidad y por tanto sin introducir retrasos dinámicos, no así en sistemas analógicos.
- **Potencia de transmisión**: La potencia necesaria para transmitir datos de forma fiable es mucho menor en sistemas digitales que analógicos, evitando de esta forma la generación de perturbaciones y mejorando la robustez frente al ruido a igual potencia de transmisión.
- **Coste**: El desarrollo de las técnicas de miniaturización ha hecho posible desarrollar sistemas digitales cada vez más potentes y de menor precio. Esto ha hecho que el control digital se introduzca incluso en pequeñas aplicaciones de bajo coste.

## Inconvenientes

- **Margen de estabilidad del sistema:** Al usar una señal muestreada, no es posible detectar cambios de la señal en el periodo entre dos instantes de muestreo. Estas variaciones se detectan en el siguiente instante, lo cual en la práctica resulta en un retraso de la señal y la consiguiente disminución del margen de fase y por tanto el empeoramiento del margen de estabilidad del sistema.
- **Peligro de excesiva centralización:** El uso de un único computador para la realización de las acciones de control y supervisión de un sistema complejo entraña el peligro de que un fallo del computador afecte a todo el conjunto de procesos controlados. Este peligro puede mitigarse planteando una estrategia de control distribuido en el que el cooperen varios microprocesadores cada uno de los cuales se ocupa de una parte del proceso a controlar.

La realización del sistema de control de un proceso suele realizarse en base a unas **especificaciones de diseño** en las que normalmente se pretenden garantizar, entre otros, los siguientes aspectos de comportamiento:

- Respuesta transitoria en lazo cerrado.
- Comportamiento en régimen permanente en lazo cerrado.
- Rechazo a perturbaciones.
- Robustez frente a cambios en los parámetros de la planta.

El cumplimiento de estas especificaciones se lleva a cabo mediante un proceso de diseño, habitualmente iterativo, que cubre las siguientes etapas:

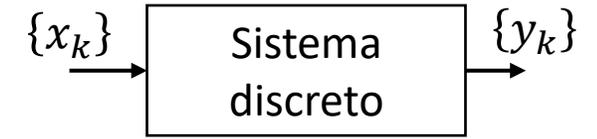
- Selección de los sensores encargados de medir las señales necesarias.
- Selección de los actuadores que actuarán sobre el sistema a controlar.
- Desarrollo del modelo matemático del proceso, sensores y actuadores.
- Selección de las especificaciones deseadas para el sistema controlado.
- Obtención de los parámetros del controlador a partir de los modelos matemáticos desarrollados y de las especificaciones de diseño deseadas.
- Realización analítica y simulación del sistema de control obtenido (posibles iteraciones).
- Realización física del sistema de control y prueba (posibles iteraciones).

# La transformada Z

## TEMA 2

- La transformada Z
  - Transformada Z de secuencias elementales
  - Propiedades de la transformada Z
- La transformada Z inversa
- Convolución de secuencias discretas
- Función de transferencia Z:  $G(z)$ 
  - Polos y ceros en el plano Z
- Resolución de ecuaciones en diferencias mediante la transformada Z

- El papel de la transformada Z en sistemas discretos es similar al de la transformada de Laplace en sistemas continuos:
  - La dinámica de los sistemas continuos se caracteriza matemáticamente por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes
    - *Dominio de s: las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas de variable compleja (polinomios en s).*
  - La dinámica de los sistemas discretos se modela matemáticamente a través de una ecuación en diferencias lineal
    - *Dominio de z: las ecuaciones en diferencias se transforman en ecuaciones algebraicas de variable compleja z.*



- **Secuencias:** un conjunto numerado de valores

$$\{x_{kT}\} = \{x_k\} = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

$k \in \mathbb{Z}$ , T: Periodo de muestreo.

$$\{-7, 2, 1_0, 2, 3, 5\}$$

- **Sistemas discretos:** un algoritmo que transforma una secuencia de entrada en otra de salida:  $\{y_k\} = f(\{x_k\})$

- Sistema estático: el elemento de la secuencia de salida sólo depende del elemento de la secuencia de entrada con el mismo índice:  $y_k = f(x_k)$
- Sistema dinámico: el elemento de la secuencia de salida depende de elementos de la secuencia de entrada con índices (igual) y diferentes
  - Sistema causal: el elemento de la secuencia de salida depende sólo de los elementos de la secuencia de entrada de índice igual o menor
  - Sistema no causal: el elemento de la secuencia de salida depende sólo de los elementos de la secuencia de entrada de índice igual, menor o mayor

## Definición

- En esta asignatura, tan sólo se considerará la transformada z de funciones del tiempo “definido positivo”:  $t \in (0, \infty)$
- La transformada z de una función en el dominio del tiempo  $x(t)$  se define como:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}$$

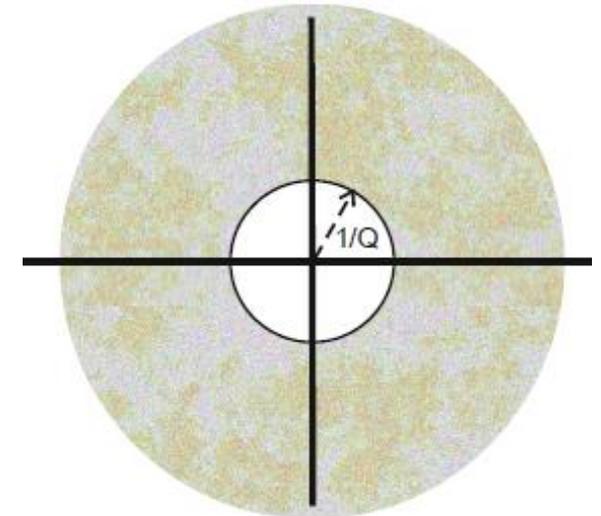
$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot z^{-k}$$

## Análisis de convergencia

La transformada Z de una secuencia  $\{x_k\}$  finita: ¿(la suma) es finita o infinita?, ¿converge?

- Para una serie potencias de variable compleja  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$  se demuestra que  $\exists Q \in \mathbb{R}; S(z)$  converge absolutamente  $\Leftrightarrow |z| < Q$  y diverge para  $|z| > Q$ 
  - $Q \equiv$  radio de convergencia

Si  $\{x_k\}$  es finita, entonces:  $X(z) = Z[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot z^{-k} = \frac{x_0}{z^0} + \frac{x_1}{z^1} + \frac{x_2}{z^2} + \dots$  converge absolutamente  $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < Q$  y diverge para  $\left|\frac{1}{z}\right| > Q$



## Transformada Z de secuencias elementales (I)

- **Impulso:**  $\delta(t) = 1$

- $\{\delta(kT)\} = \{\dots, 0, 1_0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$

- $X(z) = Z[\delta(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) \cdot z^{-k} = (1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \dots) = 1$

- **Escalón unitario:**  $u(t) = 1, \forall t \geq 0$

- $\{u(kT)\} = \{\dots, 0, 1_0, 1, 1, 1, 1, \dots\}$

- $X(z) = Z[u(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot z^{-k} = (1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

- Converge  $\Leftrightarrow |z| < 1$

- **Rampa unitaria:**  $x(t) = t, \forall t \geq 0$

- $\{x(kT)\} = \{\dots, 0, 0_0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

- $X(z) = Z[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} = (0 \cdot z^0 + 1T \cdot z^{-1} + 2T \cdot z^{-2} + \dots) = T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z-1)^2}$

- Converge  $\Leftrightarrow |z| < 1$

- **Función polinómica:**  $x(t) = a^t, \forall t \geq 0$

- $\{x(kT)\} = \{a_0^0, a^T, a^{2T}, a^{3T}, a^{4T}, \dots\}$

- $X(z) = Z[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k \cdot T} \cdot z^{-k} = (a^0 z^0 + a^T z^{-1} + a^{2T} z^{-2} + \dots) = \frac{1}{1 - a^T z^{-1}} = \frac{z}{z - a^T}$

- Converge  $\Leftrightarrow |a^T z^{-1}| < 1$

- **Función exponencial inversa:**  $x(t) = e^{-a \cdot t}, \forall t \geq 0$

- $\{x(kT)\} = \{e_0^0, e^{-aT}, e^{-2aT}, e^{-3aT}, e^{-4aT}, \dots\}$

- $X(z) = Z[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot z^{-k} = (e^0 z^0 + e^{-a \cdot T} z^{-1} + e^{-2 \cdot a \cdot T} z^{-2} + \dots) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$

- Converge  $\Leftrightarrow |e^{-aT} z^{-1}| < 1$

# La transformada Z

## Tablas de transformadas: dominios del tiempo, Laplace y z

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ o $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Delta de Kronecker $\delta_0(k)$ 1, $k = 0$ 0, $k \neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n - k)$ 1, $n = k$ 0, $n \neq k$	$z^{-k}$
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	$t^3$	$(kT)^3$	$\frac{T^3 z^{-1}(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b - a}{(s + a)(s + b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})(1 - e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s + a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$	$(1 - akT)e^{-akT}$	$\frac{1 - (1 + aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}$

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ o $x(k)$	$X(z)$
12.	$\frac{2}{(s + a)^3}$	$t^2 e^{-at}$	$(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2 e^{-aT}(1 + e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s + a)}$	$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{[(aT - 1 + e^{-aT}) + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2(1 - e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{sen } \omega t$	$\text{sen } \omega kT$	$\frac{z^{-1} \text{sen } \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{cos } \omega t$	$\text{cos } \omega kT$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$e^{-akT} \text{sen } \omega kT$	$\frac{e^{-aT} z^{-1} \text{sen } \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$
17.	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$e^{-akT} \text{cos } \omega kT$	$\frac{1 - e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$
18.		$- \int$	$a^k$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$
19.			$a^{k-1}$ $k = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}}$
20.			$ka^{k-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$
21.			$k^2 a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}$
22.			$k^3 a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1 + 4az^{-1} + a^2 z^{-2})}{(1 - az^{-1})^4}$
23.			$k^4 a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1 + 11az^{-1} + 11a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3})}{(1 - az^{-1})^5}$
24.			$a^k \text{cos } k\pi$	$\frac{1}{1 + az^{-1}}$
25.			$\frac{k(k-1)}{2!}$	$\frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3}$
26.			$\frac{k(k-1) \dots (k-m+2)}{(m-1)!}$	$\frac{z^{-m+1}}{(1 - z^{-1})^m}$
27.			$\frac{k(k-1)}{2!} a^{k-2}$	$\frac{z^{-2}}{(1 - az^{-1})^3}$
23.			$\frac{k(k-1) \dots (k-m+2)}{(m-1)!} a^{k-m+1}$	$\frac{z^{-m+1}}{(1 - az^{-1})^m}$

$x(t) = 0$ , para  $t < 0$ .

$x(kT) = x(k) = 0$ , for  $k < 0$ .

A menos que se indique otra cosa,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Las propiedades de la transformada z facilitan mucho la realización de transformadas más complejas
  - Estrategias similares al cálculo de transformadas de Laplace: manipulaciones algebraicas + uso de propiedades + uso de tablas de transformación entre dominios.
- Principales propiedades:
  - Multiplicación por una constante
  - Linealidad
  - Multiplicación por  $a^k$
  - Traslación real
  - Traslación compleja
  - Teorema del valor inicial
  - Teorema del valor final

Sea  $X(z)$  la transformada Z de  $x(t)$ . Entonces, se verifica que:

$$\mathbf{Z[ax(t)] = aZ[x(t)] = aX(z)}$$

➤ Demostración:

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot x(kT) \cdot z^{-k} \\ &= (a \cdot x(0) \cdot z^0 + a \cdot x(T) \cdot z^{-1} + a \cdot x(2T) \cdot z^{-2} + \dots) \\ &= a \cdot (x(0) \cdot z^0 + x(T) \cdot z^{-1} + x(2T) \cdot z^{-2} + \dots) = a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} = aZ[x(t)] \end{aligned}$$

Sean  $X(z)$  la transformada Z de  $x(t)$  e  $Y(z)$  la transformada Z de  $y(t)$ . Entonces, para cualesquiera dos escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se verifica que:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

➤ Demostración:

$$\begin{aligned} Z[\alpha x(t)] + Z[\beta y(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot x(kT) \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta \cdot y(kT) \cdot z^{-k} = \\ &\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} + \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot z^{-k} = \\ &\alpha Z[x(t)] + \beta Z[y(t)] \end{aligned}$$

Sea  $X(z)$  la transformada Z de  $x(k)$ . Entonces, se verifica que:

$$Z[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

➤ Demostración:

$$Z[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot x(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot (a^{-1} \cdot z)^{-k} = X(a^{-1}z)$$

Sea  $X(z)$  la transformada Z de  $x(t)$ . Entonces, se verifica que

- **Retardo  $n$  muestras:**  $Z[x(t - nT)] = z^{-n}X(z)$
- **Adelanto  $n$  muestras:**  $Z[x(t + nT)] = z^n(X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) \cdot z^{-k})$

➤ Demo retardo:

$Z[x(t - nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT) \cdot z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT) \cdot z^{n-k} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT) \cdot z^{-m}$ ,  
con  $m = k - n$ . Dado que  $X(z)$  es por definición definida semipositiva ( $x(mT) = 0, \forall m < 0$ ), por tanto, se puede acotar desde  $m=0$ :

$$Z[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot z^{-m} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}$$

➤ Demo adelanto:

$$Z[x(t + nT)] = z^n \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT) \cdot z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) \cdot z^{-k} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) \cdot z^{-k} \right] = z^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) \cdot z^{-k} \right]$$

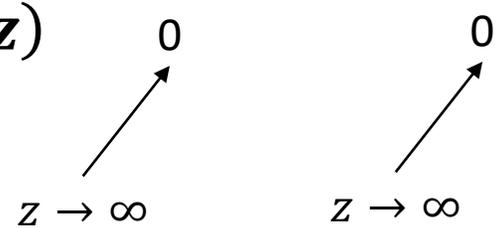
Sea  $X(z)$  la transformada Z de  $x(t)$ . Entonces, se verifica que:

$$\mathbf{Z}[e^{-at}x(t)] = \mathbf{X}(e^{at}z)$$

➤ Demostración:

$$Z[e^{-at} \cdot x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-akT} \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(z \cdot e^{aT})^{-k} = X(z \cdot e^{at})$$

Si  $x(t)$  tiene transformada Z de valor  $X(z)$ , y el  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  existe, entonces el valor inicial  $x(0)$  de  $x(t)$  o  $x(k)$  viene dado por:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$


➤ Demostración:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} = \{x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots\} = x(0)$$

## Teorema del valor final

Sea  $x(t)$  cuya transformada Z existe y tiene valor  $X(z)$ . Además, todos los polos de  $X(z)$  están dentro del círculo unitario ( $|z| < 1$ ). Entonces, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)]$$

➤ Demostración:

$$\lim_{z \rightarrow 1} [Z[x(k)] - Z[x(k-1)]] = \lim_{z \rightarrow 1} [X(z) - z^{-1}X(z)]$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x((k-1)T)z^{-k} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k) - x(k-1))z^{-k} =$$

$$= [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots + [x(\infty) - x(\infty - 1)] = x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

# La transformada Z inversa ( $Z^{-1}$ )

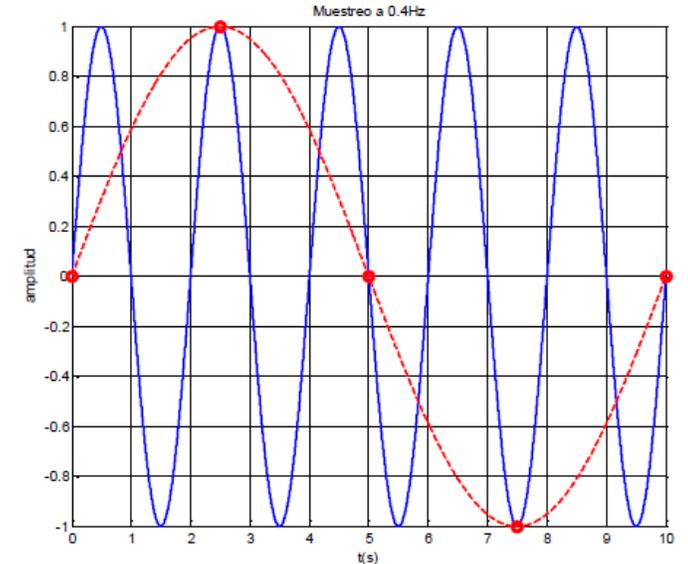
## Definición

Dada  $X(z)$  la transformada Z de  $x(t)$ . La transformada inversa de  $X(z)$  se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{k-1}dz = x\{kT\}$$

Siendo  $C$  una curva que rodea el origen del plano  $Z$  y está contenida en la región de convergencia de  $X(z)$

- La  $Z^{-1}$  da como resultado la correspondiente secuencia temporal  $x(kT)$ 
  - No se obtiene  $x(t)$ , si no la secuencia temporal.
  - $Z^{-1}$  da una única  $x(kT)$ , pero no una única  $x(t)$
  - En otras palabras,  $Z^{-1}$  proporciona los valores de  $x(t)$  en los intervalos discretos de tiempo  $kT$ , pero no puede reconstruirse los valores entre intervalos. Por tanto pueden existir muchas  $x(t)$  que coincidan con la secuencia temporal (teorema del muestreo).



### 1. Método de la integral de inversión

- Aconsejable cuando  $X(z)z^{k-1}$  no tiene polos en el origen ( $z = 0$ )
- Expresar  $X(z)$  en potencias positivas de  $z$

### 2. Descomposición en fracciones parciales

- Cuando son muy complejos/laboriosos, probar con el método de la integral de inversión
- Expresar  $X(z)$  en potencias positivas de  $z$

### 3. División directa

- Sólo proporciona los valores de la secuencia, no la forma de la función  $x(kT)$
- Sólo cuando no es posible encontrar una formulación cerrada de  $x(kT)$  y/o cuando sólo se desea obtener los primeros términos.

### 4. Métodos computacionales (Matlab y Simulink)

Aplicando el teorema de los residuos a la definición de la integral inversa, se obtiene el siguiente resultado:

$$x(kT) = K_1 + K_2 + \dots + K_m = \sum_{p=1}^m [\text{residuos de } X(z)z^{k-1} \text{ en el polo } z = z_p \text{ de } X(z)z^{k-1}]$$

- Residuo para un polo sencillo ( $q = 1$ ):

$$K_p = \lim_{z \rightarrow z_p} [(z - z_p) \cdot X(z)z^{k-1}]$$

- Residuo para un polo de multiplicidad  $q$ :

$$K_p = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow z_p} \left[ \frac{\partial^{q-1}}{\partial z^{q-1}} \left( (z - z_p)^q \cdot X(z)z^{k-1} \right) \right]$$

- La metodología es igual que en el caso de la transformada de Laplace: Se trata de descomponer un cociente de polinomios en  $z$  en una suma de fracciones simples que sean fácilmente identificables en la tabla de transformadas Z:

$$X(z) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{z-p_n}, \text{ con } p_n \text{ el } n\text{-ésimo polo de } X(z)$$

- Si  $X(z)$  tiene uno o más ceros en el origen, se calcula la descomposición en fracciones de  $\frac{X(z)}{z}$  y se deshace el cambio antes de identificar términos en las tablas.

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{z-p_n}, \text{ con } p_n \text{ el } n\text{-ésimo polo de } X(z)$$

# La transformada Z inversa ( $Z^{-1}$ )

## Descomposición en fracciones parciales (II)

- Para el cálculo de los coeficientes  $A_n$  se puede obtener mediante el residuo:

$$A_n = [(z - p_n)X(z)]_{z=p_n}$$

$$A_n = \left[ (z - p_n) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_n}$$

- En el caso de polos múltiples:  $\frac{B_r}{(z-p_1)^r} + \frac{B_{r-1}}{(z-p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{z-p_1}$

$$B_r = [(z - p_1)^r X(z)]_{z=p_1}$$

$$B_r = \left[ (z - p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_1}$$

$$B_{r-j} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial z^j} [(z - p_1)^r X(z)]_{z=p_1}$$

$$B_{r-j} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \left[ (z - p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} [(z - p_1)^r X(z)]_{z=p_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} \left[ (z - p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_1}$$

## Método de la división directa

- Sólo proporciona la serie de valores  $\{x_k\} = \{x_{kT}\}$ 
  - Serie finita o infinita => División sin/con resto.

- Si  $X(z)$  está expresada (expandida) en una serie de potencias  $z^{-k}$ , entonces:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(kT)z^{-kT}$$

- Recordando el teorema del desplazamiento,  $z^{-k}$  significa un retardo de  $k$ -muestras del factor al que multiplica: los coeficientes de  $z^{-k}$  son los valores de la serie  $\{x_k\} = \{x_{kT}\}$ .
- Dado que se buscan los coeficientes de los factores  $z^{-k}$ , la expresión  $X(z)$  debe estar en forma de potencias negativas de  $z$ .

# La transformada Z inversa ( $Z^{-1}$ )

## División directa

- Ejemplo:

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \text{ R.O.C.: } |z| > a$$

- Reordenando:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ R.O.C.: } |z| > a$$

- División:

$$\begin{array}{r} 1 \qquad \qquad \qquad | \ 1 - az^{-1} \\ -1 + az^{-1} \qquad \qquad 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\ 0 \quad az^{-1} \\ \quad -az^{-1} + a^2z^{-2} \\ \qquad \qquad 0 \quad a^2z^{-2} \\ \qquad \qquad \qquad -a^2z^{-2} + a^3z^{-3} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \quad a^3z^{-3} \end{array}$$

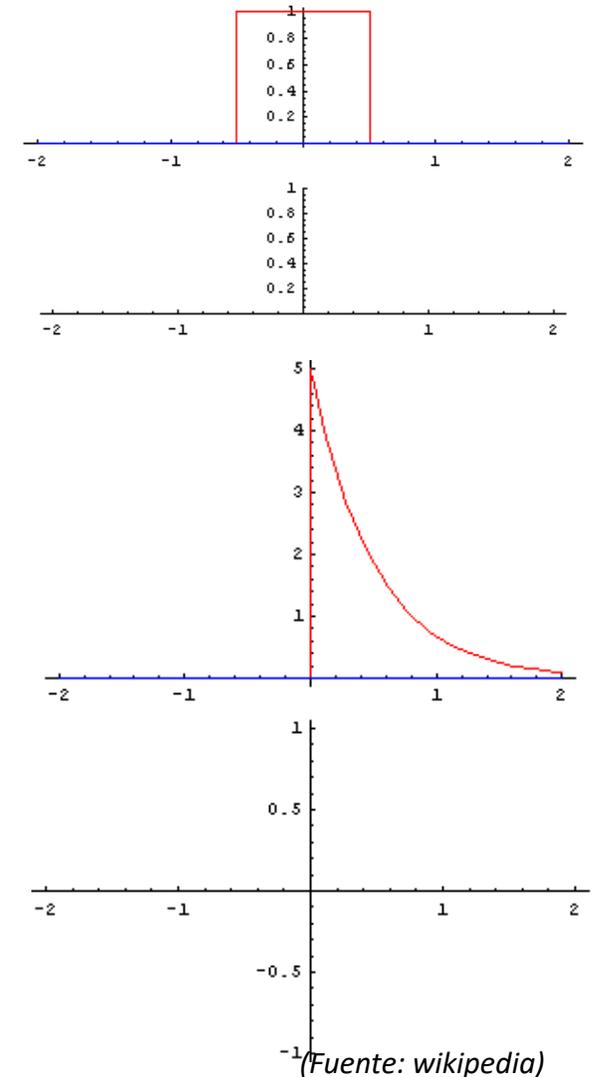
- $1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = Z\{a^k\}$

## Definición

- La convolución combina dos señales para producir una tercera señal. En el campo de las señales digitales es muy importante, ya que permite obtener la señal de salida de un sistema a partir de la señal de entrada y la respuesta al impulso.
- Con las secuencias discretas se cumple que la transformada del producto de la convolución de dos secuencias es el producto de sus transformadas:

$$Z[w(kT)] = Z[x(kT) * y(kT)] = Z(x) \cdot Z(y)$$

$$w(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot x(k-n)$$



## Propiedades

- Elemento neutro:  $x(kT) * \delta(kT) = x(kT)$
- Propiedad conmutativa:  $x(kT) * y(kT) = y(kT) * x(kT)$
- Propiedad asociativa:  $x(kT) * [y(kT) * z(kT)] = x(kT) * y(kT) * z(kT)$
- Propiedad distributiva:  $x(kT) * [y(kT) + z(kT)] = x(kT) * y(kT) + x(kT) * z(kT)$

Normalmente las funciones de transferencia se expresan mediante potencias de z con exponente negativo. Para el cálculo de polos y ceros de la FDT es conveniente expresarla en potencias con exponente positivo:

Sea  $X(z) = \frac{z(z+0,5)}{(z+1)(z+2)}$ . Claramente se observa que tiene dos ceros  $z=0$  y  $z=-0,5$  y dos polos:  $z=-1$  y  $z=-2$ .

Si se expresa mediante potencias negativas:

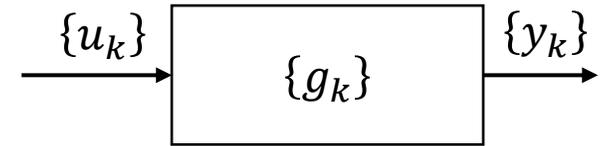
$$X(z) = \frac{z(z+0,5)}{(z+1)(z+2)} \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{z^2 + 0,5z}{z^2 + 3z + 2} \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{z^2/z^2 + 0,5z/z^2}{z^2/z^2 + 3z/z^2 + 2/z^2} = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

En este caso,  $X(z) = \frac{1+0,5z^{-1}}{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}$  tiene un cero en  $z=-0,5$  y dos polos:  $z=-1$  y  $z=-2$

El motivo es la indeterminación que causa la evaluación de  $z=0$  en el cálculo de los ceros/polos en el origen, al utilizar potencias negativas de z:

$$\left. \frac{(z+a)(z+b)}{(z+c)(z+d)} \right|_{z=0} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

$$\left. \frac{(1+az^{-1})(1+bz^{-1})}{(1+cz^{-1})(1+dz^{-1})} \right|_{z=0} = \frac{\infty \cdot \infty}{\infty \cdot \infty}$$



- La secuencia de ponderación de un sistema es la secuencia de salida del sistema cuando la secuencia de entrada es una secuencia impulso.
- La secuencia de ponderación contiene la información de la dinámica del sistema.
  - Permite calcular la respuesta del sistema ante cualquier secuencia de entrada a partir de la secuencia de ponderación mediante convolución discreta.

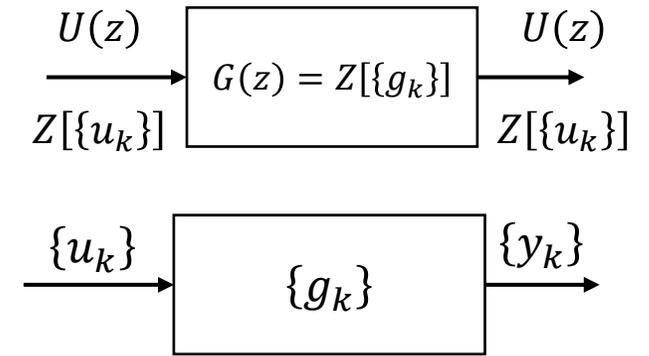
$$Z[y(kT)] = Z[u(kT) * g(kT)] = Z[u(kT)] \cdot Z[g(kT)]$$

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) \cdot g(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \cdot u(k-n)$$

# Función de transferencia Z

## Definición y principales propiedades

- $G(z)$  es la transformada Z de la secuencia de ponderación del sistema.
- $G(z)$  es la relación entre la transformada de la salida del sistema y la transformada de la entrada del sistema con condiciones iniciales nulas.
- Se calcula a partir de la ecuación en diferencias que define el sistema.



Sea una ecuación en diferencias de un sistema lineal con variable dependiente  $u$  e independiente  $y$ :

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m}$$

Esta ecuación es válida  $\forall k$ , por tanto al ser lineal y con coeficientes constantes, se puede verificar también para sus respectivas secuencias  $\{y_k\}$  y  $\{u_k\}$ :

$$\{y_k\} + a_1 \{y_{k-1}\} + a_2 \{y_{k-2}\} + \dots + a_n \{y_{k-n}\} = b_0 \{u_k\} + b_1 \{u_{k-1}\} + \dots + b_m \{u_{k-m}\}$$

Tomando la transformada Z de ambos términos de la ecuación, y aplicando el teorema del corrimiento:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z)$$

Reordenando:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} U(z) \Rightarrow G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

# Resolución de ecuaciones en diferencias mediante la transformada Z

- Las ecuaciones en diferencias pueden ser resueltas fácilmente mediante ordenador si se dispone de los valores de todos los coeficientes. Pero no se obtiene un valor cerrado para  $\{x_k\}$ . Sí se puede mediante el uso de la transformada Z.
- Para aplicar el método, se debe pasar de la ecuación en diferencias a la función de transferencia que la define, y aplicar los métodos de cálculo de la transformada Z inversa.

Función discreta	Transformada z
$x(k+3)$	$z^3 X(z) - z^3 x(0) - z^2 x(1) - z x(2)$
$x(k+2)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1)$
$x(k+1)$	$z X(z) - z x(0)$
$x(k)$	$X(z)$
$x(k-1)$	$z^{-1} X(z)$
$x(k-2)$	$z^{-2} X(z)$
$x(k-3)$	$z^{-3} X(z)$

©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

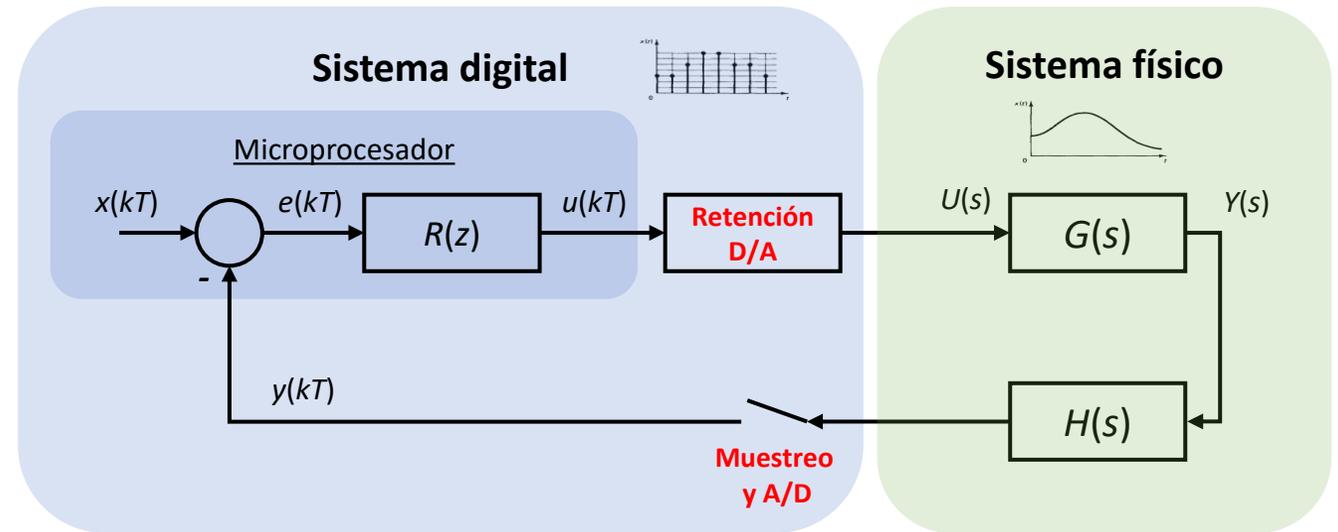
# Muestreo y retención de datos

TEMA 3 (parte 1)

- Introducción
- Muestreo mediante impulsos
- Retención de datos
- Cálculo de transformadas Z que involucran al retenedor
- La función de transferencia pulso
  - FDTP de sistemas en cascada y realimentados
- Métodos de discretización

Los sistemas discretos suelen tener señales en tiempo discreto y continuo:

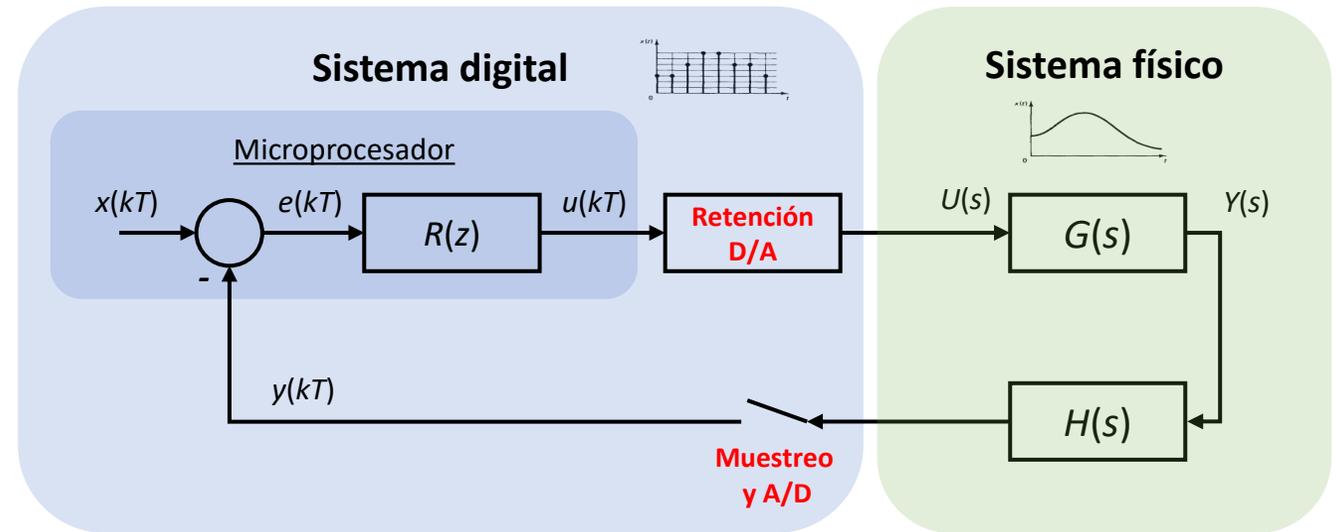
- Secuencia de valores o código numérico
- Funciones temporales
- Los reguladores son discretos:  $R(z)$
- Los actuadores, plantas y/o sensores son continuos:  $G(s)$ ,  $H(s)$



Es necesario homogeneizar el sistema para poder diseñar un regulador:

- Diseñar en tiempo continuo y discretizar el regulador:  $R(s) \rightarrow R(z)$
- Discretizar señales y sistemas en tiempo continuo y diseñar el regulador:  $G(s), H(s) \rightarrow G(z), H(z)$

- Los sistemas discretos tienen dos procesos fundamentales:
  - Discretización (muestreo y A/D)
  - Retención de datos (D/A)



- ¿Cuáles son sus representaciones matemáticas?
  - Estudiar el efecto de tomar la transformada de Laplace a los procesos de muestreo y retención: Relación transformada de Laplace (dominio  $s$ )  $\Leftrightarrow$  Transformada Z.
- ¿Cómo se aplican a los sistemas de control discretos?

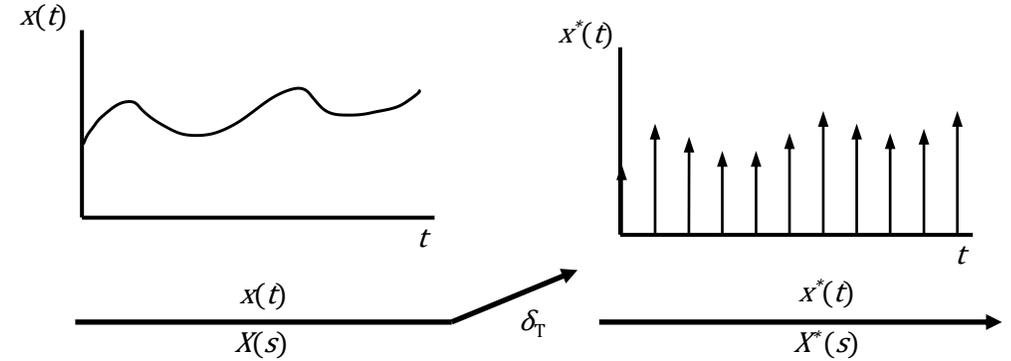
# Muestreo mediante impulsos

Muestreo: tren de impulsos que comienza en  $t = 0$  y presentan en magnitud el valor muestreado (aplicación lineal de la función  $\delta(t)$  con la función  $x(t)$ ):

- Tren de impulsos:  $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

- La función  $\delta(t)$  (no unitaria) se define como:  $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & \forall t \neq 0 \end{cases}$

- Magnitud:  $x(kT)$



$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

$$x^*(t) = x(0T) \cdot \delta(t - 0T) + x(T) \cdot \delta(t - T) + x(2T) \cdot \delta(t - 2T) + \dots + x(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[x(0T) \cdot \delta(t - 0T) + x(T) \cdot \delta(t - T) + x(2T) \cdot \delta(t - 2T) + \dots + x(kT) \cdot \delta(t - kT)]$$

$$X^*(s) = x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(T)\mathcal{L}[\delta(t - T)] + x(2T)\mathcal{L}[\delta(t - 2T)] + \dots + x(kT)\mathcal{L}[\delta(t - kT)]$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \\ \mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kTs}}$$

# Muestreo mediante impulsos

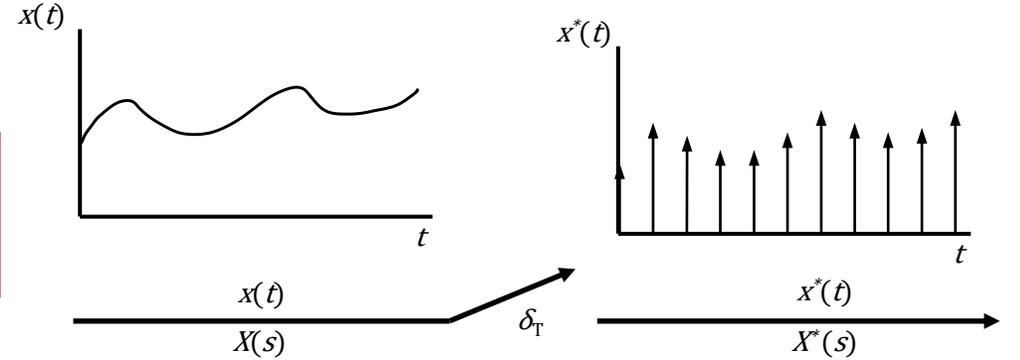
Muestreo mediante impulsos:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kTs}$$

Definición de transformada Z:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}$$

$$e^{Ts} = z \Leftrightarrow s = \frac{1}{T} \ln z$$

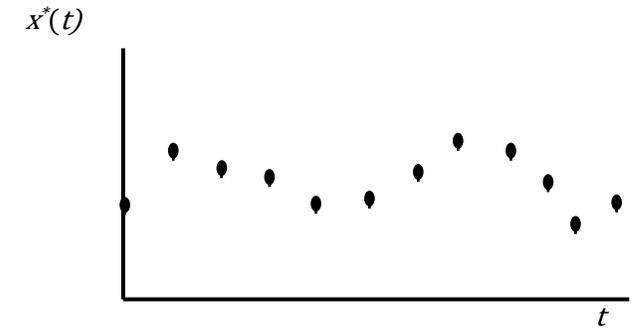


$$X^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-kT}$$

La transformada de Laplace de la señal muestreada mediante impulsos  $x^*(t)$  es la misma que la transformada Z de la señal  $x(t)$  si se realiza el cambio de variable:  $z = e^{Ts}$

Debe tenerse en cuenta que  $X(z) \neq X(s = z)$ , si no que  $X(z) = X^* \left( s = \frac{1}{T} \ln z \right)$

- La retención de datos genera una señal en tiempo continuo  $h(t)$  a partir de una secuencia en tiempo discreto  $x(kT)$  mediante la interpolación entre muestras



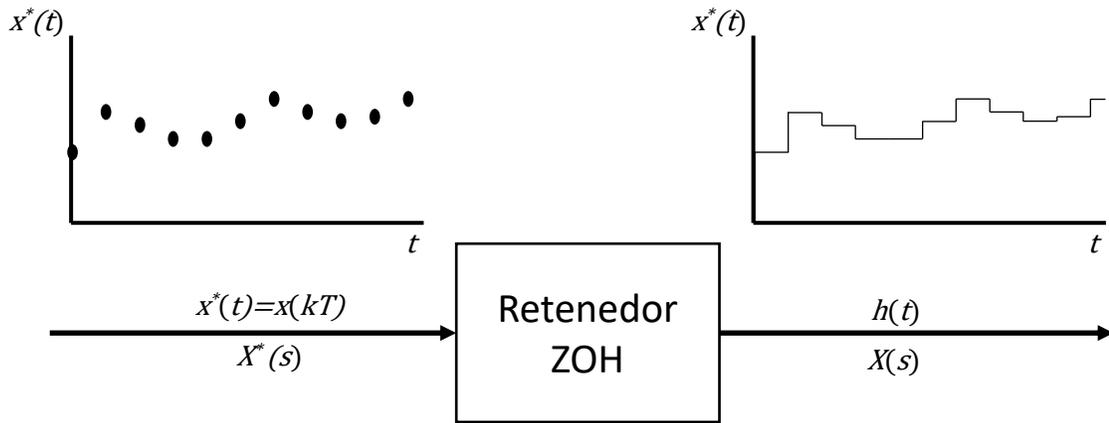
- La señal  $h(t)$  entre intervalos de muestreo ( $kT \leq t \leq (k+1)T$ ) se aproxima mediante un polinomio de grado  $n$ :

$$h(kT + \tau) = (a_0 = x(kT)) + a_1\tau + \dots + a_n\tau^n$$

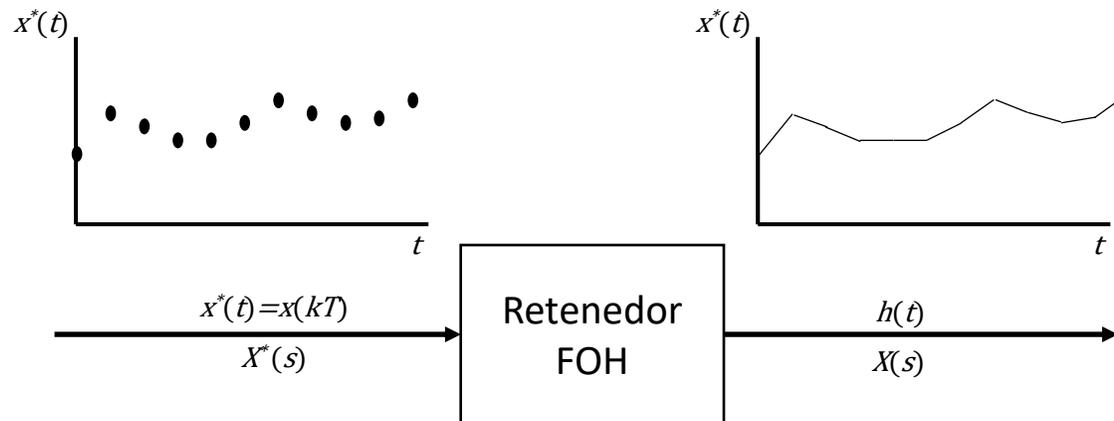
con  $\tau \in (0, T)$  y  $k = \{0, 1, 2, \dots\}$

- Debido a que el polinomio de orden  $n$  utiliza las  $n - 1$  muestras anteriores para calcular el valor en  $n$ , aumentar el grado del polinomio implica mayor precisión en la retención, pero un retraso mayor.
  - Habitualmente los circuitos electrónicos para la retención de datos implementan retenedores de orden 0 o 1, por tanto:

$$\text{ZOH (m=0): } \mathbf{h(kT + \tau) = x(kT)}$$
$$\text{FOH (m=1): } \mathbf{h(kT + \tau) = a_1\tau + x(kT)}$$



$$\text{ZOH (n=0): } h(kT + \tau) = x(kT)$$

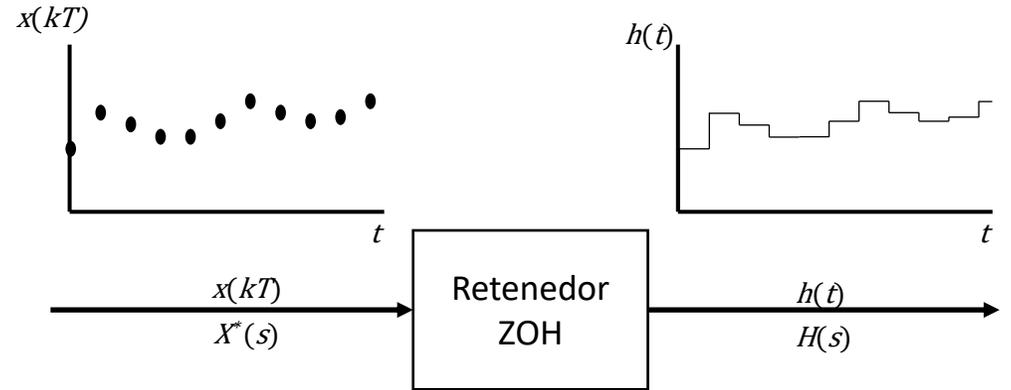


$$\text{FOH (n=1): } h(kT + \tau) = a_1\tau + x(kT)$$

## Función de transferencia del retenedor

$$h(t) = x(0)(1 - 1(t - T)) + x(T)(1(t - T) - 1(t - 2T)) + x(2T)(1(t - 2T) - 1(t - 3T)) + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[f(t - \tau)] &= F(s)e^{-\tau s} \end{aligned} \right\} \mathcal{L}[1(t - kT)] = \frac{e^{-kTs}}{s}$$



$$h(kT + \tau) = x(kT) \\ kT \leq \tau < (k + 1)T$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathbf{H}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ x(kT) \cdot \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kTs}}_{X^*(s)} = ZOH(s) \cdot X^*(s)$$

Función de transferencia del ZOH:  $G_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$

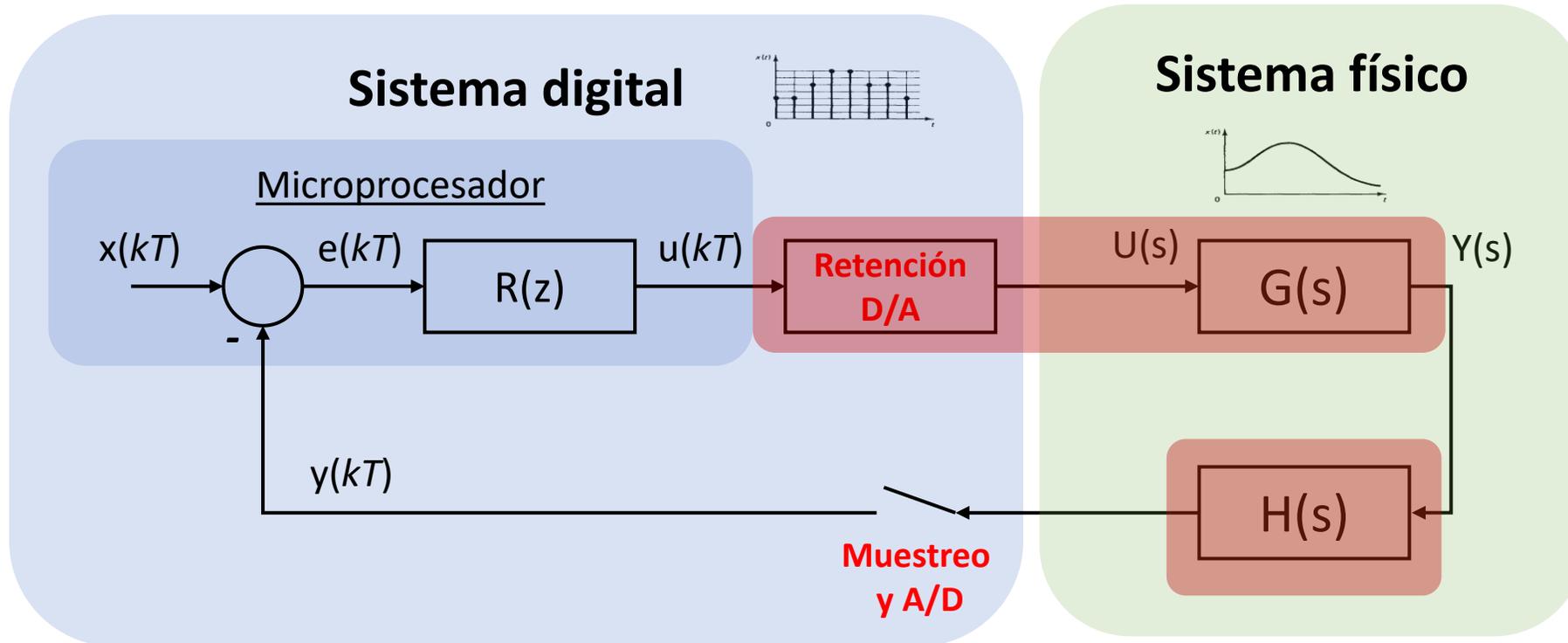
De manera similar, para el FOH:  $G_1(s) = \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right)^2 \frac{Ts + 1}{T}$

$$X^*(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z}$$

Señal muestreada a la **entrada** del retenedor

# Cálculo de transformadas que involucran al retenedor

## Estructura general de un sistema discreto de control



Nos va a permitir **discretizar** funciones de transferencia y señales en tiempo continuo

Pasar del dominio de Laplace al dominio Z

# Cálculo de transformadas que involucran al retenedor

$$F(s) = \frac{1 - e^{-kTs}}{s} G(s)$$

$$F(z) = Z[F(s)] = Z\left[\frac{1 - e^{-kTs}}{s} G(s)\right] = Z\left[(1 - e^{-kTs}) \frac{G(s)}{s}\right] =$$

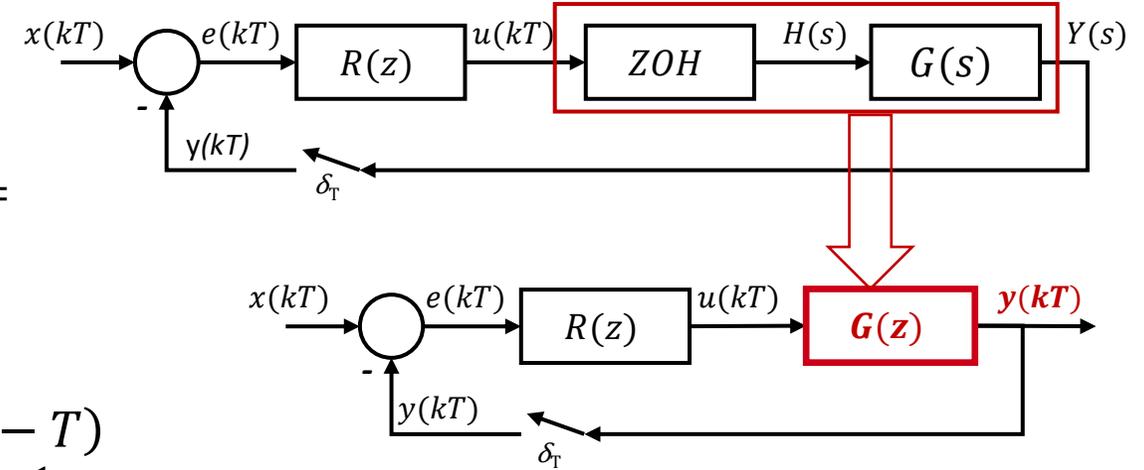
$$= Z[(G'(s) - G'(s)e^{-kTs})], \text{ con } G'(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Dado que  $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G'(s)e^{-kTs}] = g'(t - T)$

Tomando el teorema de desplazamiento:  $Z[g'(t - T)] = z^{-1}Z[G'(s)]$

Volviendo a la expresión anterior inicial:

$$Z[(G'(s) - z^{-1}Z[G'(s)])] = (1 - z^{-1})Z[G'(s)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

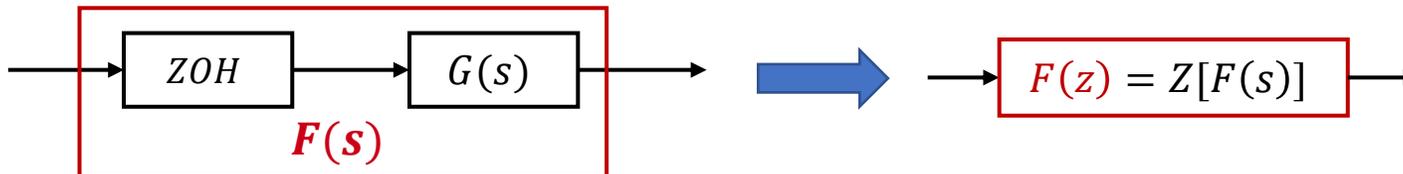


$$F(z) = Z[F(s)] = Z[ZOH \cdot G(s)]$$

$$= (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

**Discretización mediante FOH:**

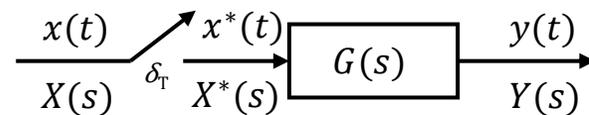
$$G(z) = (1 - z^{-1})^2 Z\left[\frac{Ts + 1}{Ts^2} G(s)\right]$$



## Definición

- La función de transferencia (en el dominio de Laplace) relaciona las transformadas de Laplace de las señales de entrada y salida de un sistema:  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$
- La función de transferencia (en el dominio Z) relaciona las transformadas Z de las señales de entrada y salida de un sistema:  $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

¿Qué hacemos con una función de transferencia continua (Laplace) cuya señal de entrada es una señal discreta?



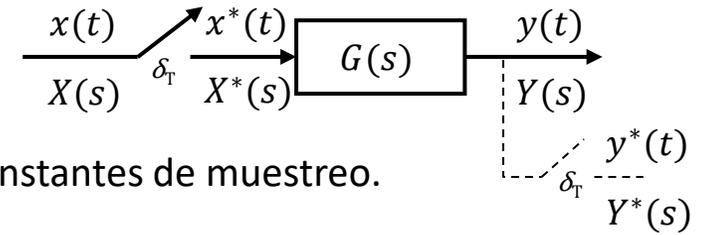
$$¿ G(s) = \frac{Y(s)}{X^*(s)} ?$$

# La función de transferencia pulso

## Análisis

- Para analizar el sistema, suponemos un muestreador ficticio a la salida del sistema

- No hay ningún muestreador físico. Sólo tomamos en consideración el valor de  $y(t)$  en los instantes de muestreo.



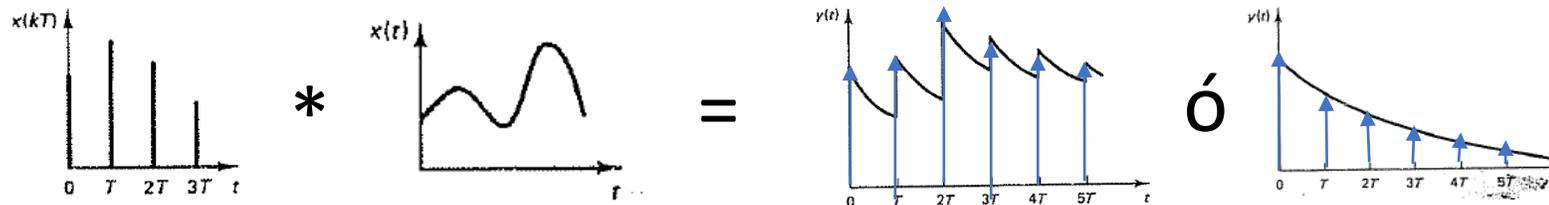
- Tomamos la transformada Z de las ecuaciones resultantes del sistema ( $Y(s) = G(s)X^*(s)$ ):

$$Z[Y(s)] = Z[G(s)X^*(s)] \rightarrow Y^*(s) = Y(z) = Z[G(s)X^*(s)]$$

- La transformada Z (ninguna transformada) tiene la propiedad distributiva: A priori no se puede desacoplar  $G(s)X^*(s)$
- Sin embargo,  $G(s)X^*(s)$  representa la convolución de dos señales: la respuesta al impulso con una señal muestreada. Si se aplica la integral de convolución, y dado que se ha introducido el muestreador ficticio a la salida, se puede demostrar que:

$$Y(z) = Z[G(s)X^*(s)] = Z[G(s)]Z[X^*(s)] = G^*(s)X(z) = G(z)X(z)$$

A  $G^*(s)$  se le denomina función de transferencia pulso

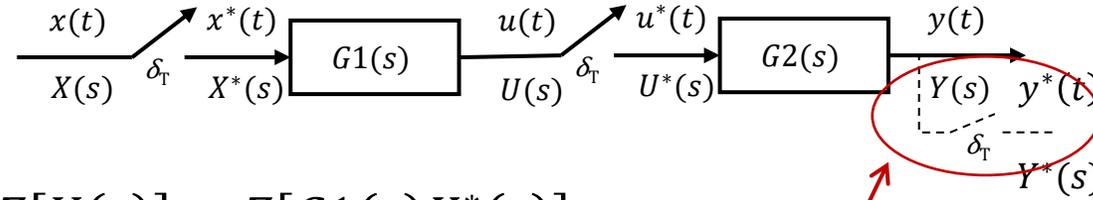


*Al calcular la transformada  $L^*$  de un producto de transformadas, donde unas son  $L$  y otras  $L^*$ , las transformadas que ya son  $*$  (muestreadas o discretas) se pueden factorizar de la operación  $L^*$*

# La función de transferencia pulso

## Sistemas en cascada

Calcular la FDTP:  $\frac{Y(z)}{X(z)}$



$$U(s) = G1(s)X^*(s) \rightarrow Z \rightarrow Z[U(s)] = Z[G1(s)X^*(s)]$$

$$\text{Factoriza } X^*(s): Z[U(s)] = Z[G1(s)]Z[X^*(s)] \leftrightarrow U^*(s) = Z[G1(s)]X^*(s)$$
$$U(z) = Z[G1(s)]X(z)$$

$$Y(s) = G2(s)U^*(s) \rightarrow Z \rightarrow Z[Y(s)] = Z[G2(s)U^*(s)]$$

Factoriza  $U^*(s)$ :

$$Z[Y(s)] = Z[G2(s)]Z[U^*(s)] \leftrightarrow Y^*(s) = Z[G1(s)]U^*(s)$$
$$Y(z) = Z[G2(s)]U(z)$$

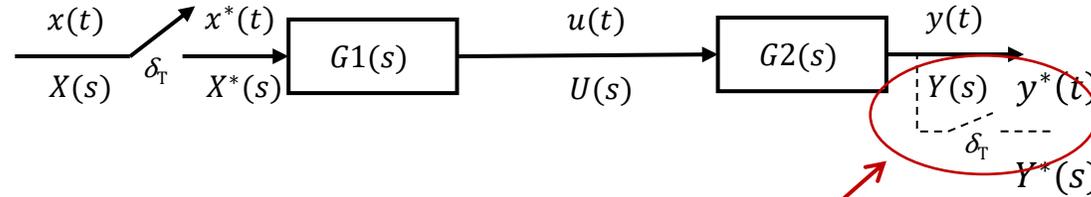
Por tanto:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z[G2(s)]U(z)}{U(z) / Z[G1(s)]} = Z[G1(s)]Z[G2(s)]$$

# La función de transferencia pulso

## Sistemas en cascada

Calcular la FDTP:  $\frac{Y(z)}{X(z)}$



$$U(s) = G1(s)X^*(s) \rightarrow Z \rightarrow Z[U(s)] = Z[G1(s)X^*(s)]$$

No existe  $U^*(s)$ . Sólo puedo calcular considerando  $G1(s)$  y  $G2(s)$  en serie ( $Y(s)/X^*(s)$ ):

$$Y(s) = G1(s)G2(s)X^*(s) \rightarrow Z \rightarrow Z[Y(s)] = Z[G1(s)G2(s)X^*(s)]$$

Factorizo  $X^*(s)$ :

$$Z[Y(s)] = Z[G1(s)G2(s)]X^*(s) \leftrightarrow Y^*(s) = Z[G1(s)G2(s)]X^*(s) \leftrightarrow Y(z) = Z[G1(s)G2(s)]X(z)$$

Por tanto,

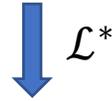
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = Z[G1(s)G2(s)]$$

# La función de transferencia pulso

## Sistemas realimentados

Calcular la FDTP:  $\frac{Y(z)}{R(z)}$

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= G1(s)G2(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \end{aligned} \right\} E(s) = R(s) - H(s)G1(s)G2(s)E^*(s)$$



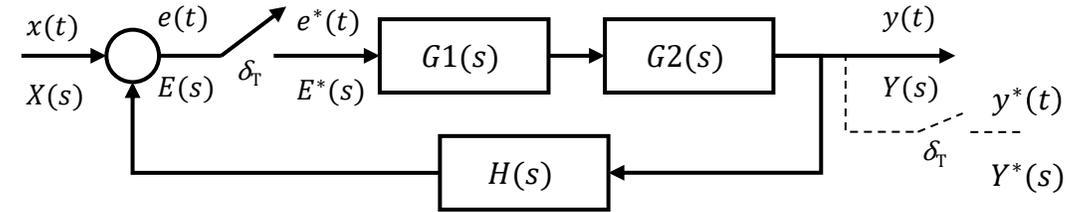
$$E^*(s) = Z[R(s)] - Z[H(s)G1(s)G2(s)]E^*(s)$$

Puedo considerar que existe una correspondiente  $R^*(s) = R(z)$  dado que hay un muestreador tras el punto de suma al cual se alimenta  $R(s)$ .

El muestreador muestrea tanto  $R(s)$  como  $Y(s)H(s)$ , por lo que, de manera similar al muestreador ficticio de la salida, se puede considerar que existe  $R^*(s) = R(z)$

$$\left. \begin{aligned} E^*(s) &= \frac{R(z)}{1 + Z[H(s)G1(s)G2(s)]} \\ Y(z) &= Z[G1(s)G2(s)]E^*(s) \end{aligned} \right\} \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Z[G1(s)G2(s)]}{1 + Z[H(s)G1(s)G2(s)]}$$

Sólo se considera la salida del sistema



# La función de transferencia pulso

## Sistemas realimentados

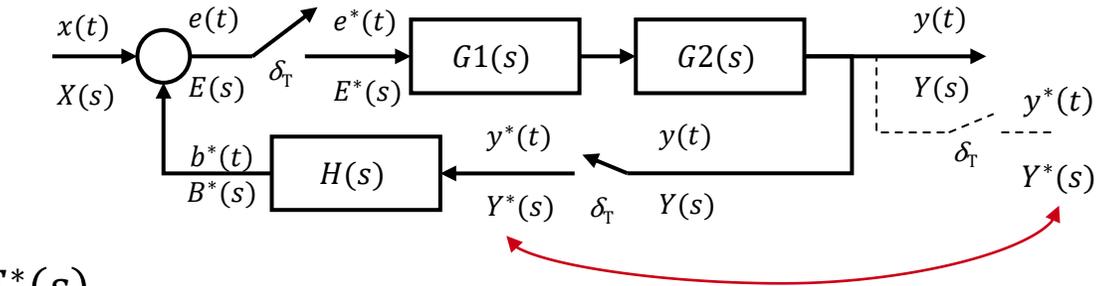
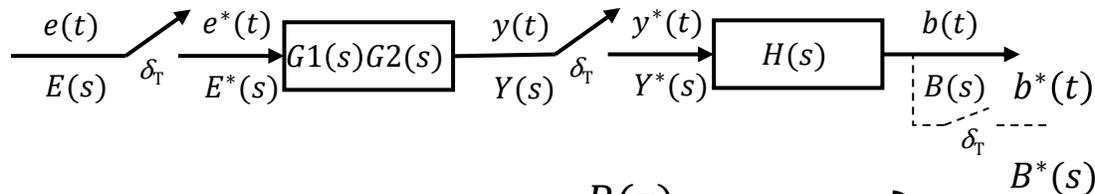
Calcular la FDTP:  $\frac{Y(z)}{R(z)}$

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= G1(s)G2(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)Y^*(s) \\ Y^*(s) &= G1(s)G2(s)E^*(s) \end{aligned} \right\} E(s) = R(s) - H(s)G1(s)G2(s)E^*(s)$$

$\downarrow \mathcal{L}^*$

$$E^*(s) = Z[R(s)] - Z[H(s)G1(s)G2(s)]E^*(s)$$

Al existir un muestreador entre G2(s) y H(s) hay que analizar el sistema equivalente en serie:



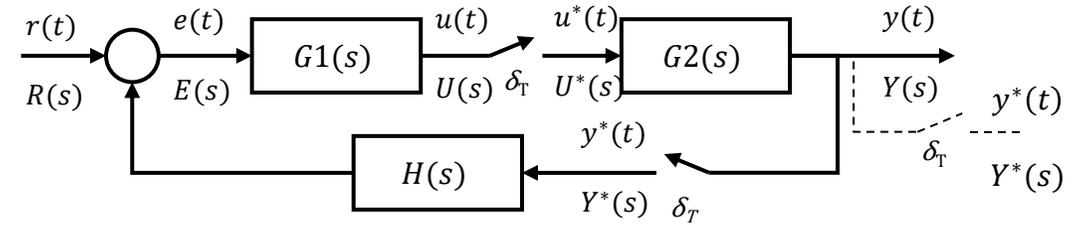
$$\frac{B(z)}{E(z)} = \frac{Z[H(s)]Y(z)}{Y(z) / Z[G1(s)G2(s)]} = Z[G1(s)G2(s)]Z[H(s)]$$

$$\left. \begin{aligned} E^*(s) &= \frac{R(z)}{1 + Z[G1(s)G2(s)]Z[H(s)]} \\ Y(z) &= Z[G1(s)G2(s)]E^*(s) \end{aligned} \right\} \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z[G1(s)G2(s)]}{1 + Z[H(s)]Z[G1(s)G2(s)]}$$

# La función de transferencia pulso

## Sistemas realimentados

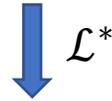
~~Calcular la FDTP:  $\frac{Y(z)}{R(z)}$~~



$$Y(s) = G2(s)U^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s) \quad E(s) = R(s) - H(s)G2(s)U^*(s)$$

$$U(s) = G1(s)E(s)$$

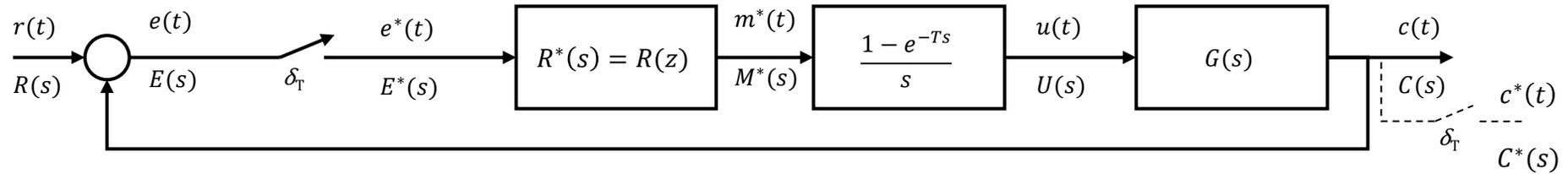
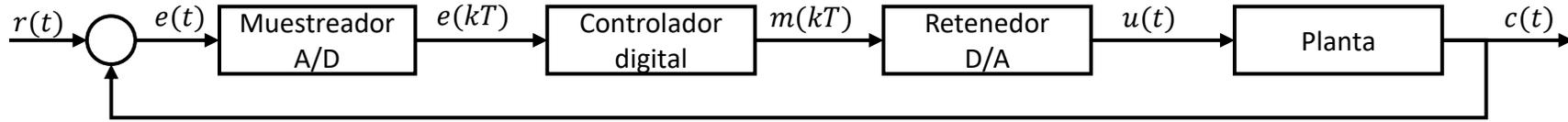


No existe  $Z[E^*(s)]$ , por lo tanto tampoco  $Z[R^*(s)]$ . Opero para eliminar  $U^*(s)$ :

$$\left. \begin{aligned} U(s) &= G1(s)R(s) - G1(s)H(s)Y^*(s) \rightarrow \mathcal{L}^* \rightarrow U^*(s) = Z[G1(s)R(s)] - Z[G1(s)H(s)]Y^*(s) \\ Y(s) &= G2(s)U^*(s) \rightarrow \mathcal{L}^* \rightarrow Y^*(s) = Z[G2(s)]U^*(s) \rightarrow U^*(s) = \frac{Y^*(s)}{Z[G2(s)]} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &Y^*(s) \\ &= \frac{Z[G1(s)R(s)]Z[G2(s)]}{1 + Z[G1(s)H(s)]Z[G2(s)]} \end{aligned}$$

*Quando no hay muestreo tras el punto suma (la entrada al regulador),  
**no existe función de transferencia pulso**: La entrada  $R(s)$  queda  
"acoplada" (no puede factorizarse) a los elementos del interior del lazo*

# La función de transferencia pulso de un sistema de control digital

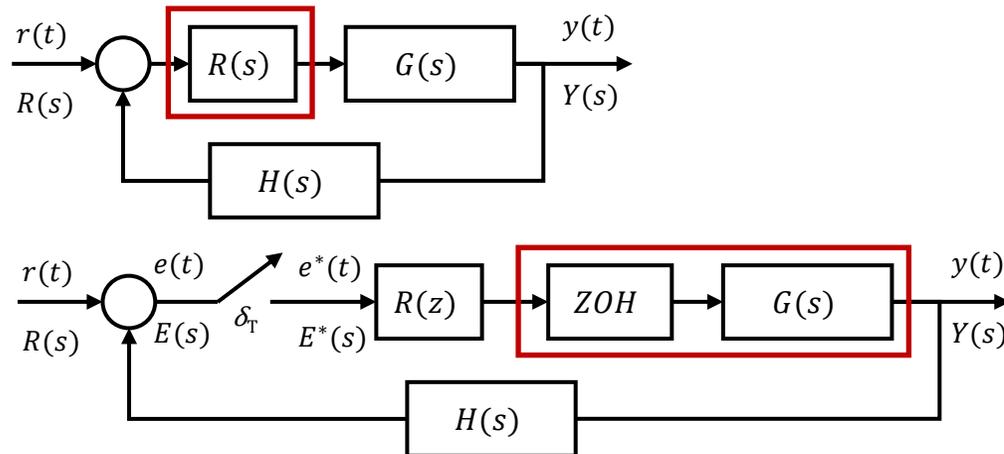


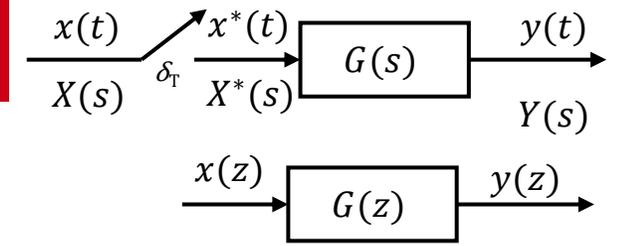
Definiendo  $G'(z)$  como la  $Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right]$  (discretización de la planta mediante ZOH), se tiene la siguiente FDTP:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{R(z)G'(z)}{1 + R(z)G'(z)}$$

- La operación de discretización se puede realizar:
  - Sobre el regulador continuo para pasar a regulador discreto
  - Sobre la planta continua para pasar a sistema totalmente discreto

- Métodos de discretización:
  - Discretización mediante retenedor (diap. 11)
  - Método de la integral de inversión
  - Método de la aproximación de la derivada (método de Euler)
  - Método de la integración trapezoidal (método de Tustin)
  - Equivalencia polo-cero





Aplicando la integral de convolución a un sistema formado por un muestreador en serie con una función de transferencia continua  $G(s)$ , se tiene que:

$$Z[G(s)] = G(z) = K_1 + K_2 + \dots + K_m = \sum_{p=1}^m \left[ \text{residuos de } \left( G(s) \frac{z}{z - e^{-Ts}} \right) \text{ en los polos de } G(s) \right]$$

- Residuo para polos sencillos ( $q = 1$ ):  $K_p = \lim_{s \rightarrow s_p} \left[ (s - s_p) \cdot G(s) \frac{z}{z - e^{-Ts}} \right]$

- Residuo para polos de multiplicidad  $q$ :  $K_p = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{s \rightarrow s_p} \left[ \frac{\partial^{q-1}}{\partial z^{q-1}} \left( (s - s_p)^q \cdot G(s) \frac{z}{z - e^{-Ts}} \right) \right]$

El cálculo de la integral de convolución implica el cálculo de residuos, por tanto el grado del denominador debe ser superior al del numerador (en reguladores tipo PID no se cumple)

Se aplican directamente sobre la  $G(s)$ , sin considerar la topología específica del sistema.

- Discretización mediante la aproximación de la derivada (método de Euler):

- Cambio de variable:  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$

- Discretización mediante integración trapezoidal (método de Tustin):

- Cambio de variable:  $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$

- Discretización mediante equivalencia polo-cero:

- Sustitución de polos/ceros: sustituir  $(s + a)$  por  $(z - e^{-Ta})$

- La ganancia estática debe ser tal que cumpla con el valor final:  $K = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})R(z)$

©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# Correspondencia Plano S $\Leftrightarrow$ Plano Z

TEMA 3 (parte 2)

- Introducción
- Ecuación de transformación
- Transformaciones:
  - Eje Imaginario
  - Eje Real
  - Región de estabilidad
  - Lugares de atenuación constante
  - Lugares de frecuencia amortiguada constante
  - Lugares de amortiguamiento constantes
  - Ábaco

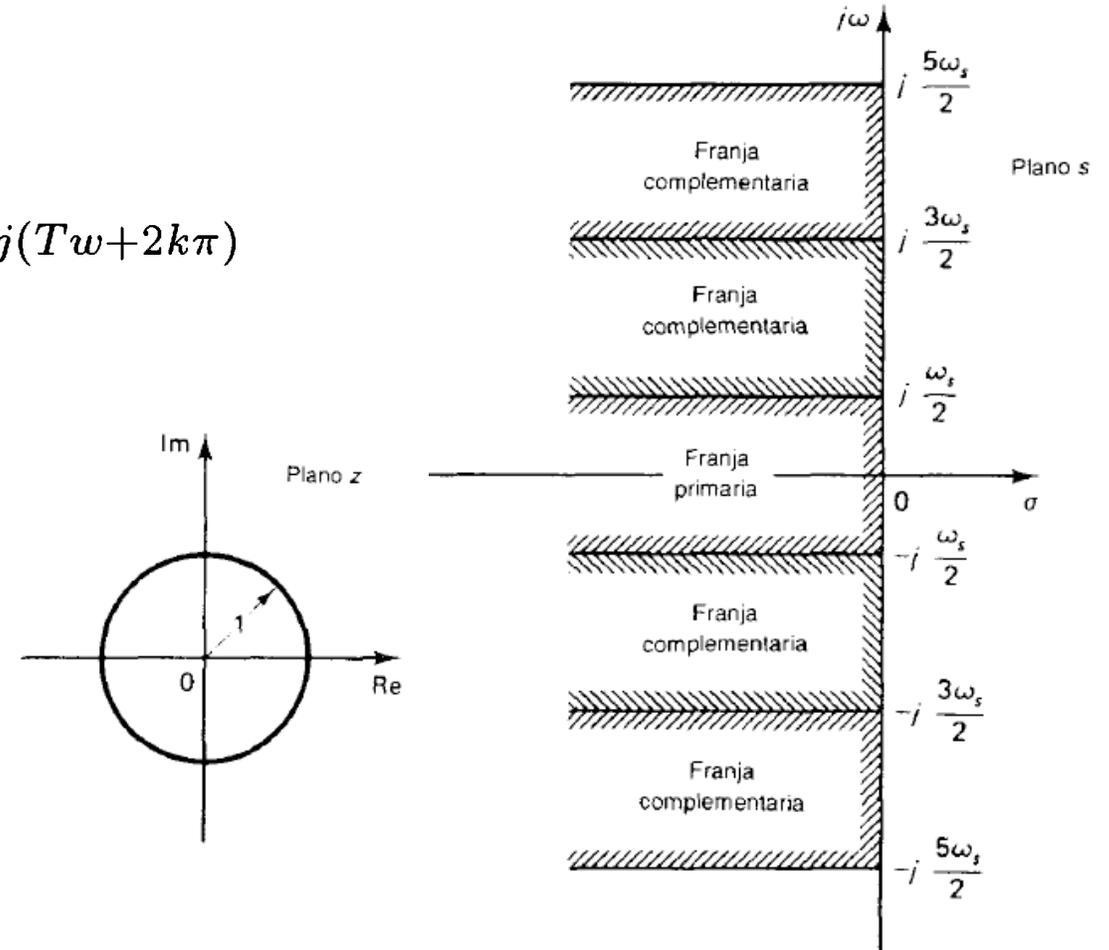
- Los polos y ceros en lazo abierto en el plano S: Conocimiento del comportamiento dinámico del sistema
  - Estabilidad (absoluta, relativa)
  - Diseño de controladores
- Usar la misma estrategia en el plano Z

# Ecuaciones de transformación

$$z = e^{Ts}$$

$$s = \sigma + j\omega \Rightarrow z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} \cdot e^{j(T\omega + 2k\pi)}$$

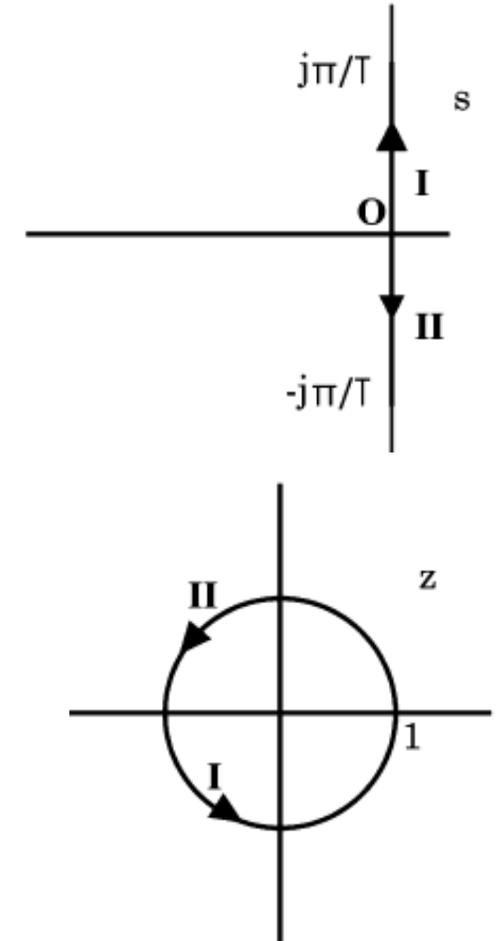
- Polos/ceros en el dominio de  $s$ , donde las frecuencias difieran en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo ( $2\pi/T$ ) se corresponden con mismas posiciones del plano  $Z$ .
- Por cada polo/cero en el plano  $Z$  se tienen infinitos polo/ceros en el dominio de  $s$ .
- Los valores periódicos de  $G(s)$  se superponen en  $Z$ .



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

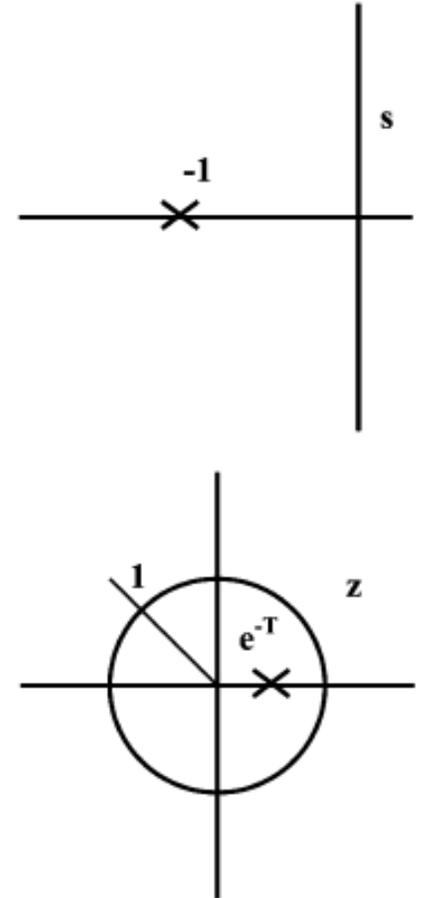
## Eje Imaginario ( $s = -\sigma \pm j\omega$ )

- $s = j\omega$ , con  $\omega = (-\infty, \infty)$ . Si varia en el intervalo  $[\frac{-\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ 
  - $z = e^{j\omega T}$
  - Variará sobre una circunferencia de radio unidad con argumento  $[-\pi, \pi]$ . Como la transformada es periódica, se recorrerán sucesivos círculos.
- El eje imaginario  $j\omega$  se transforma en la circunferencia unidad en el plano z. Al recorrer el eje imaginario se recorre infinitas veces  $(\frac{2\pi}{T})$  la circunferencia unidad



## Semiplano negativo ( $s = -\sigma \pm j\omega$ )

- Dado que  $\sigma < 0 \Rightarrow |z| = e^{(-\sigma T)} < 1$ 
  - $\uparrow \sigma \Rightarrow \downarrow |z|$
- El semiplano izquierdo en s corresponde al interior del círculo unitario, cuyos límites son:
  - $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow |z| = 1$
  - $\sigma \rightarrow -\infty \Rightarrow |z| = 0$



## Región de estabilidad del plano S

Recorrer el semiplano negativo.

I.  $s = j\omega$ , para  $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$   $\longrightarrow$

II.  $s = -\sigma + j\pi/T$ , para  $\sigma \leq c \leq 0$   $\longrightarrow$

III.  $s = -c + j\omega$ , con  $c = \text{cte}$ , y  $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$   $\longrightarrow$

IV.  $s = \sigma - j\omega$ , para  $\sigma \leq c \leq 0$   $\longrightarrow$

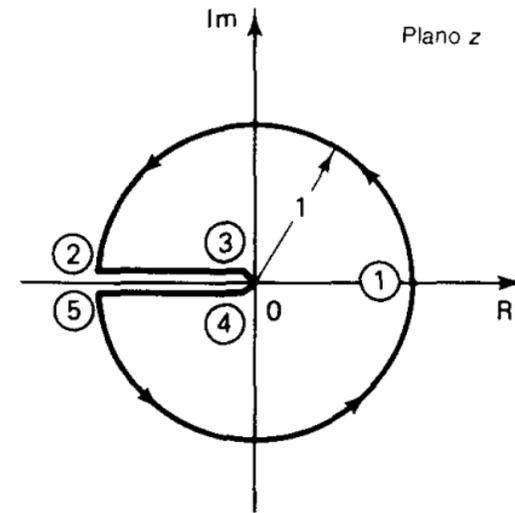
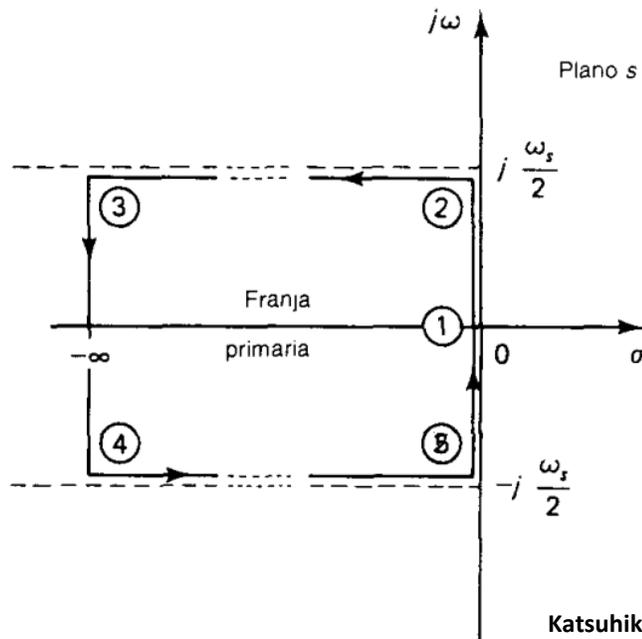
Transformar en el plano z:

I.  $z = e^{(j\omega T)}$

II.  $z = e^{(\sigma + j\pi/T)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\pi} = -e^{\sigma T} \angle \pi$

III.  $z = e^{(c + j\omega)T} = e^{cT} \cdot e^{j\omega T}$

IV.  $z = e^{(\sigma - j\pi/T)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{-j\pi} = -e^{\sigma T} \angle \pi$

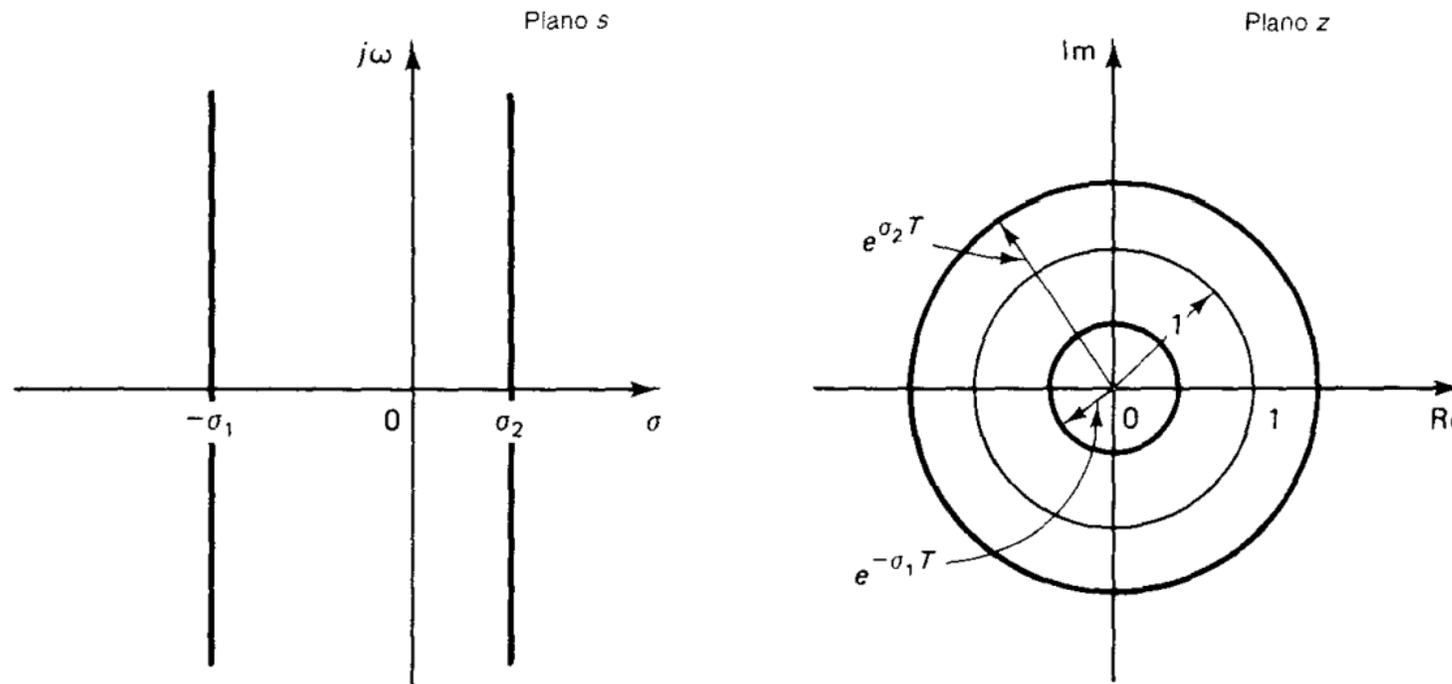


Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Lugar geométrico de atenuación constante

- Lugares en s con parte real constante  $\Rightarrow$  Círculos con radio constante en z

$$s = -c \pm j\omega \quad \longrightarrow \quad z = e^{(-c \pm j\omega T)} = e^{-cT} e^{\pm j\omega T} = c_2 \cdot e^{\pm j\omega T}$$

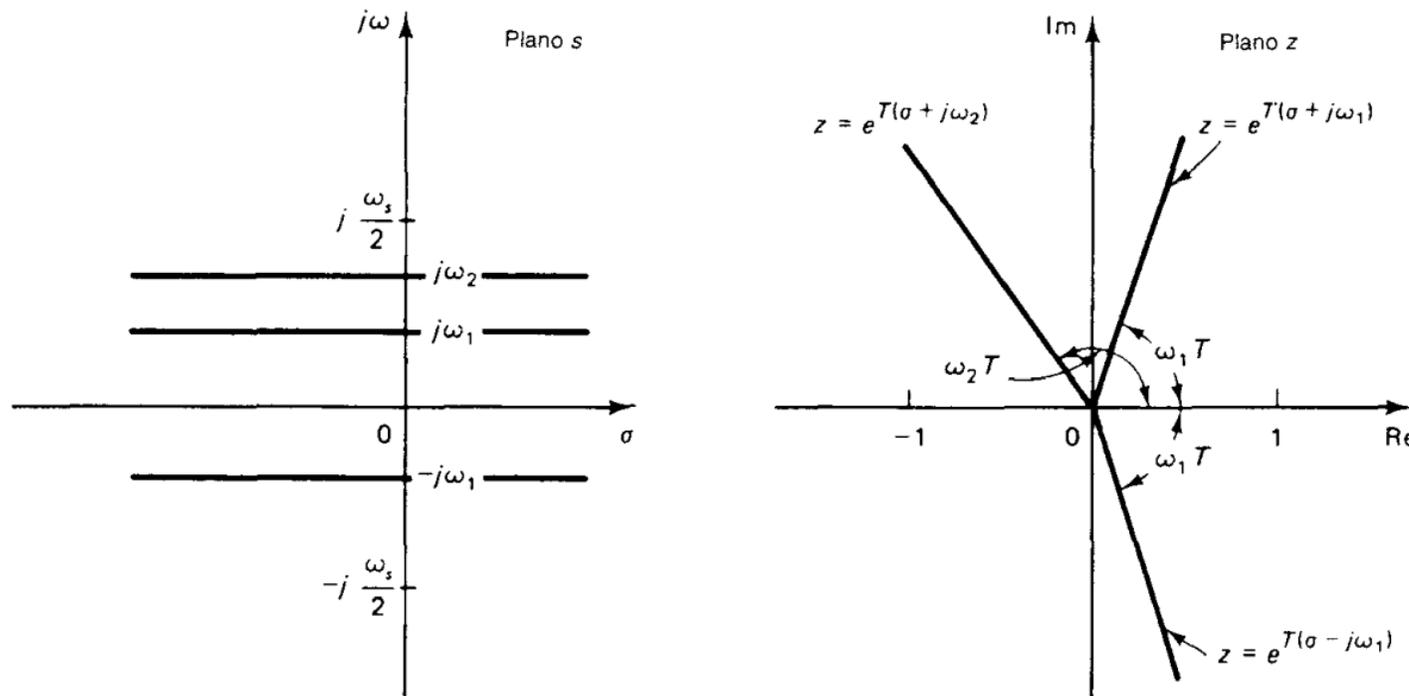


Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Lugar geométrico de frecuencia amortiguada constante

- Corresponden a lugares en S con parte imaginaria ( $j\omega_d$ ) constante  $\Rightarrow$  Rectas con ángulo (Re) constante

$$s = -\sigma \pm j\omega_d \longrightarrow z = e^{(-\sigma \pm j\omega_d)kT} = e^{-\sigma T} \cdot e^{\pm j\omega_d T} = e^{-\sigma T} \angle \omega_d kT$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

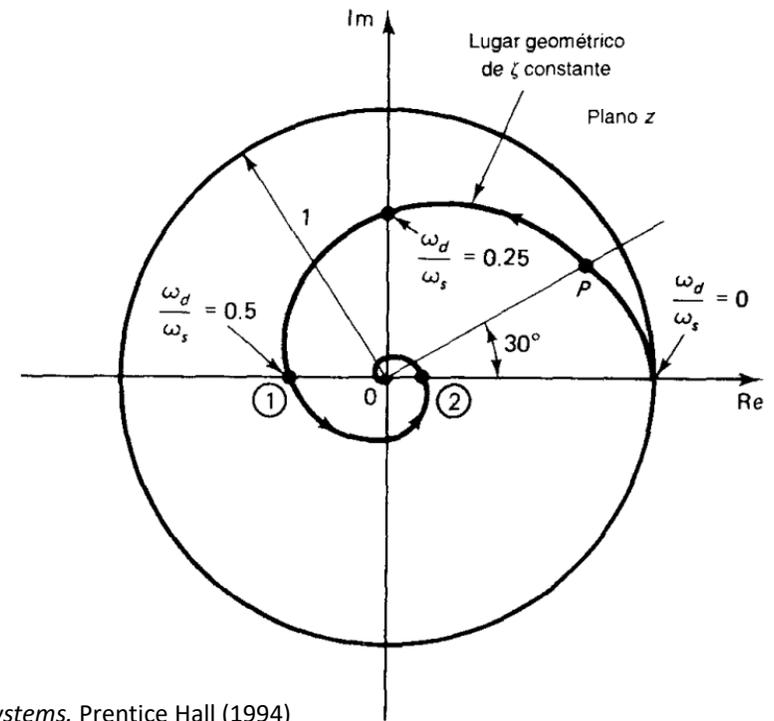
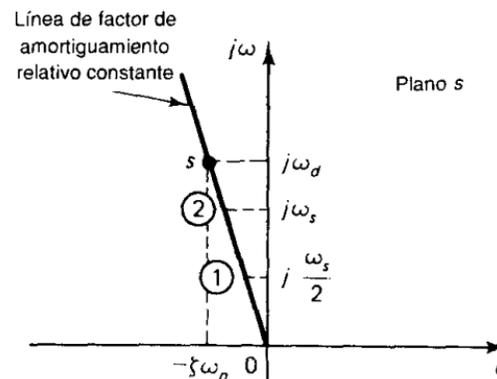
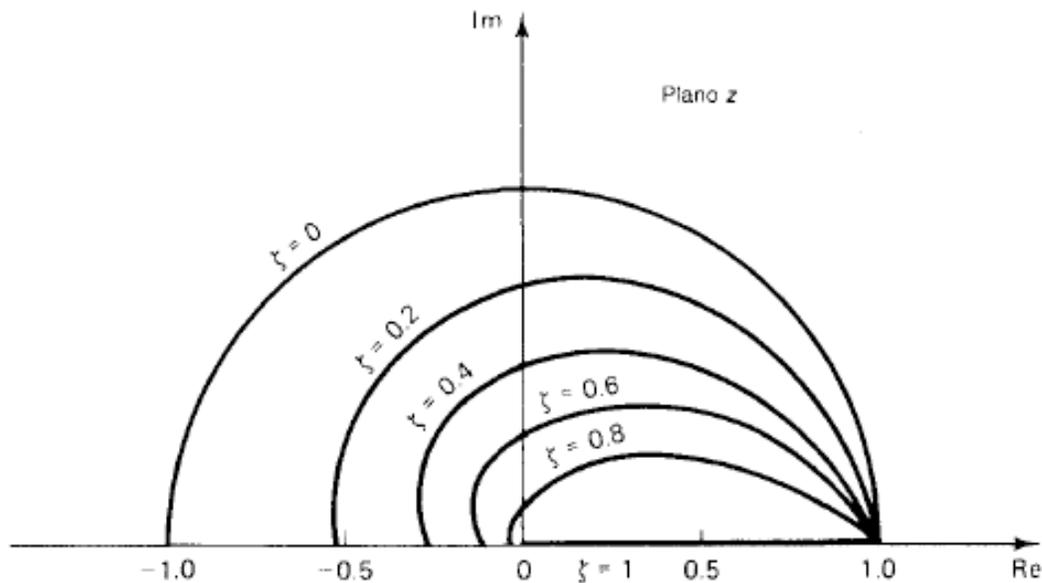
## Lugar geométrico de amortiguamiento constante

- Corresponden a lugares en S con ángulo  $\zeta = \cos(\varphi)$  constante (rectas que pasan por el origen)  $\Rightarrow$  espirales logarítmicas

$$s = -\sigma \pm j\omega_k = \lambda \cdot (-1 + m \cdot j)$$

$m$  constante,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

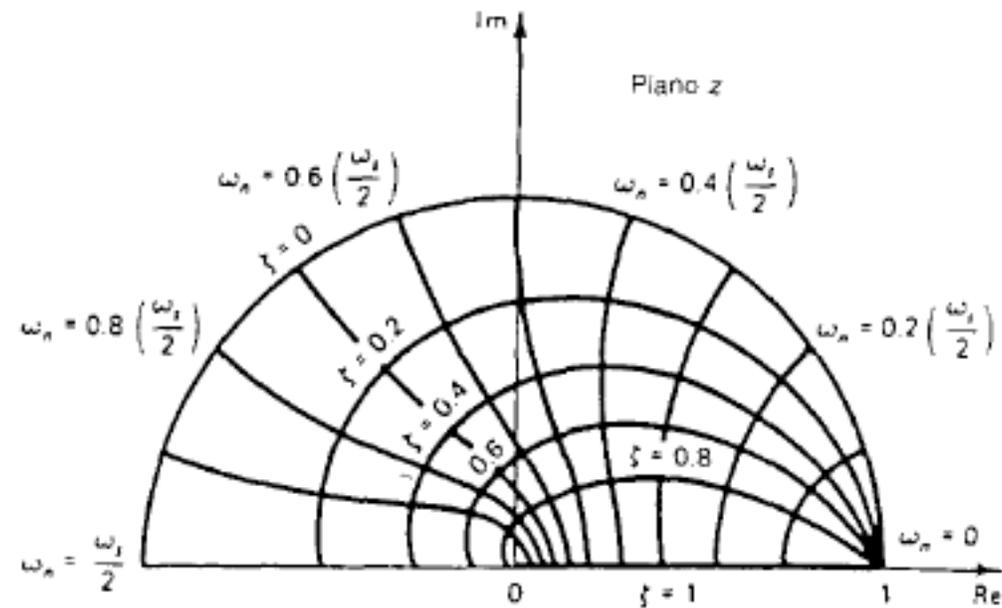
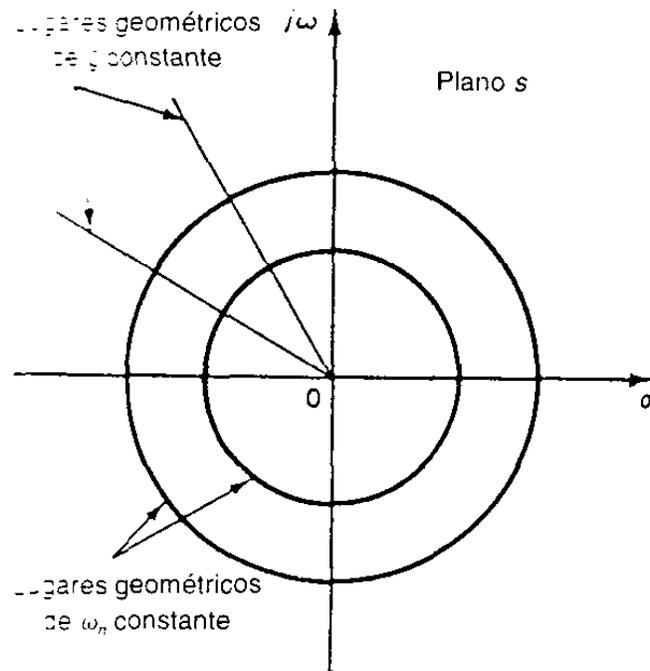
$$z = e^{(Ts)} = e^{-\lambda T} \cdot e^{j\lambda m T} = e^{-\lambda T} \angle \lambda m T$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

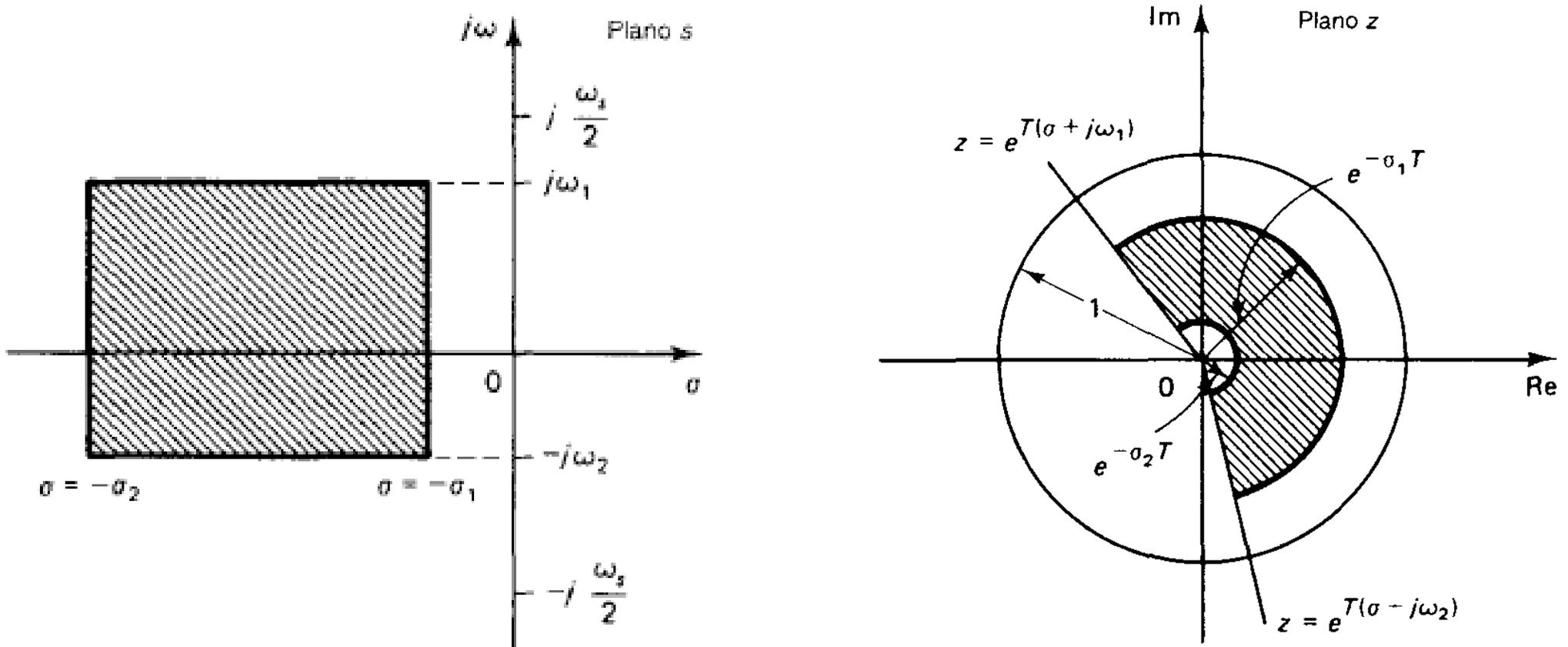
## Ábaco de diseño:

- Las curvas de  $\sigma$  constante y  $\zeta$  constante son perpendiculares



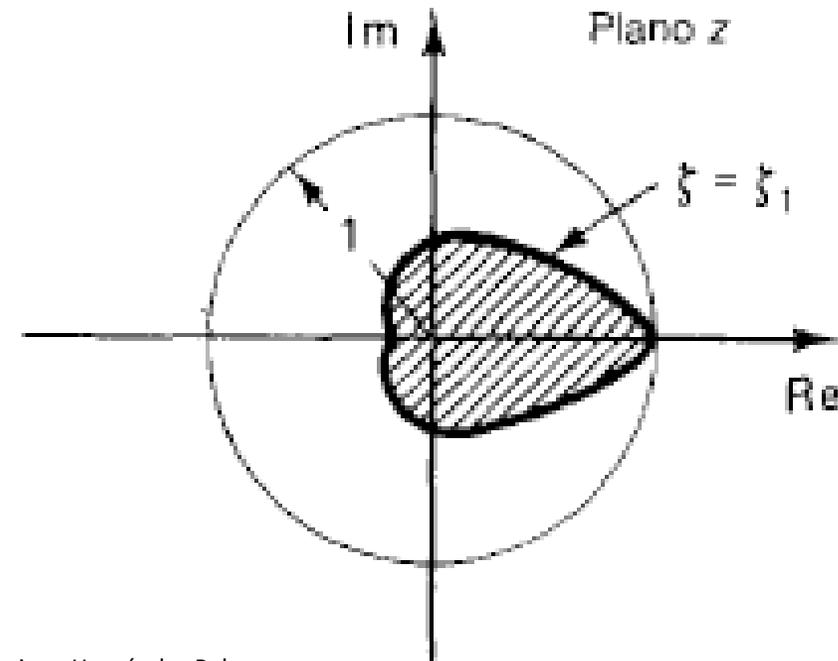
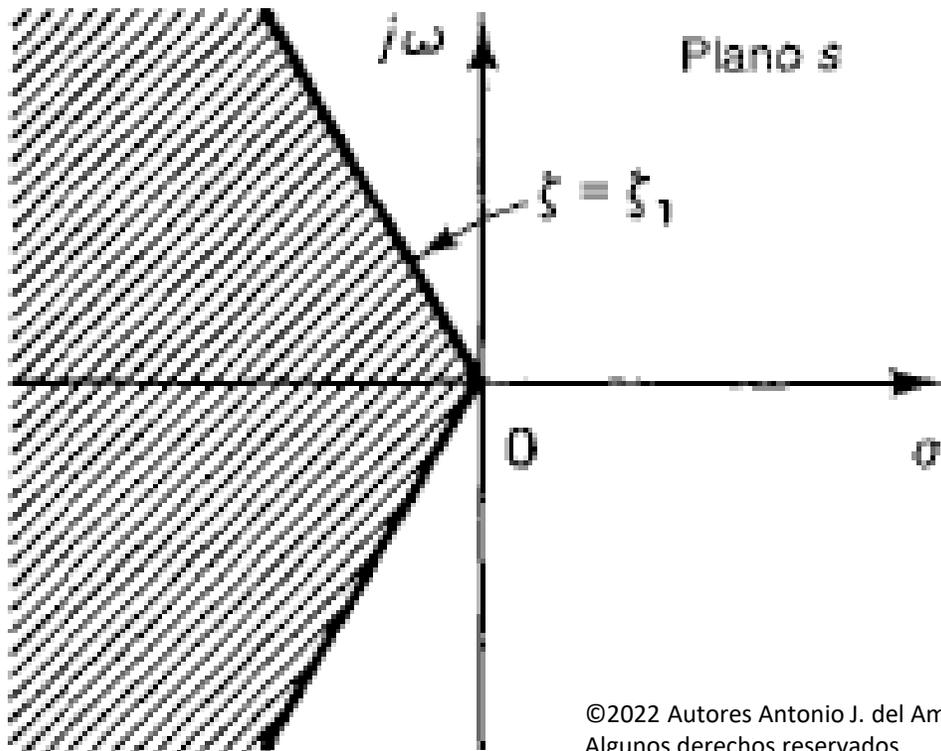
## Ejemplo (I)

Obtener la transformación en el plano z de la región limitada de la figura:



## Ejemplo (II)

Obtener la transformación en el plano z de la región limitada de la figura:



©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

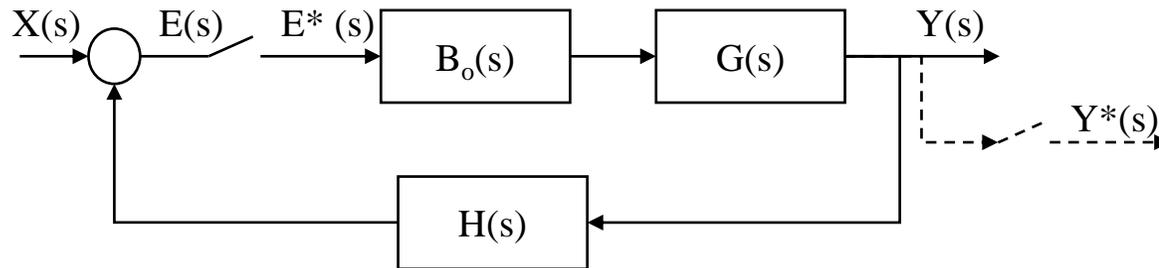
# Estudio de la estabilidad de sistemas discretos

TEMA 3 (parte 3)

- Estabilidad de un sistema discreto
- Análisis de estabilidad:
  - Raíces de la ecuación característica en lazo cerrado
  - Prueba de Jury
  - Prueba de Routh-Hurwitz
- Consideraciones finales

- Definición: “Un sistema es estable si ante cualquier entrada acotada la salida es acotada”
- En la práctica, un sistema es estable si ante cualquier entrada acotada todas sus variables son acotadas.
  - En un sistema discreto lineal y causal es estable si, y sólo sí, su secuencia de ponderación es absolutamente sumable:  $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$
- El cálculo de la sumatoria de la secuencia de ponderación puede resultar complicado, sobre todo cuando viene dado en forma de  $G(z)$
- El cálculo de las raíces de  $P(z)$  puede ser complicado cuando el orden del polinomio es alto.
- Es necesario tener métodos más sencillos para estudiar la estabilidad absoluta.

**Estabilidad absoluta:** (sistema LIT discreto) depende de la localización de los polos en LC en el plano Z.



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{[B_0(s)G(s)]^*}{1 + [B_0(s)G(s)H(s)]^*} = \frac{B_0G(z)}{1 + B_0GH(z)}$$

$$P(z) = 1 + 1 + B_0GH(z) = 0$$

## Sistema estable:

- Raíces de  $P(z)$  (polos en LC) están dentro del círculo unitario.
  - Polo(s) simple, complejos conjugados, múltiples...

## Sistema críticamente estable<sup>1</sup>:

- Raíces de  $P(z)$  (polos en LC) están sobre el círculo unitario.
  - Polo(s) simple, complejos conjugados.
  - También polo(s) múltiples sobre el círculo unitario.

## Sistema Inestable :

- Raíces de  $P(z)$  (polos en LC) están fuera del círculo unitario (aunque sea sólo uno).

## Los ceros en LC no afectan a la estabilidad absoluta

- Cero(s) simple, complejos conjugados, múltiples...
- Pueden estar dentro, sobre o fuera del círculo unitario.

**La FT en LA ( $B_0GH(z)$ ) depende del periodo de muestreo:**

**Las raíces de  $P(z)$  cambiarían si cambia  $T$  (muestreo-discretización) => Si cambia  $T$  se debe volver a estudiar la estabilidad.**

<sup>1</sup> **Recuérdese críticamente estable:** oscilaciones mantenidas no estable, no inestable

## Métodos para probar la estabilidad absoluta:

1. Resolver  $P(z) = 0$  y comprobar la ubicación de los polos (en lazo cerrado) sobre el plano Z.
2. Prueba de Jury.
3. Prueba de Routh-Hurwitz (+ transformación bilineal). Nótese más cantidad de cálculos que el método de Jury.

# Prueba de Jury

- I.  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$
- II. Si  $n > 3$ , construir la tabla de Jury con los coeficientes  $a_i$ .
- III. Grupos de 2 filas, la segunda invertida.

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

⋮

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2$$

## IV. Aplicar los criterios de Jury:

1.  $|a_n| < a_0$
2.  $P(z)|_{z=1} > 0$
3.  $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 \text{ para } n \text{ par} \\ < 0 \text{ para } n \text{ impar} \end{cases}$
4.  $|b_{n-1}| > |b_0|$   
 $|c_{n-2}| > |c_0|$   
 $\vdots$   
 $|q_2| > |q_0|$

**Criterios 1 a 3 pueden aplicarse sin la tabla**

*Coeficientes en la primera fila ordenados "al revés" que en la tabla de Routh  
 La segunda fila se invierte respecto de la anterior  
 Grupos pares de filas*

Renglón	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$\dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
2	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
3	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	
4	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
5	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	$\dots$	$c_0$		
6	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_{n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2n-5$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$				
$2n-4$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
$2n-3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$					

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

# Prueba de Jury: Ejemplo

Determinar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es:

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08$$

1.  $|a_4| = |-0.08| < a_0 = 1$
2.  $P(1) = 0.09 > 0$
3.  $P(-1) = 1.89 > 0$  ( $n=4$  par)
4. Criterios de la tabla ( $n=4 > 3$ ):
  - 4.1  $|b_3| = 0.994 > 0.204 = b_0$
  - 4.2  $|c_2| = 0.946 > 0.315 = c_0$

***El sistema es estable***

Renglón	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$	
	$\begin{vmatrix} -0.08 & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$					$= b_3 = -0.994$
	$\begin{vmatrix} -0.08 & & & -1.2 \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$					$= b_2 = 1.176$
	$\begin{vmatrix} -0.08 & & 0.07 \\ & 1 & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$					$= b_1 = -0.0756$
1	$\begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ & 1 & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$					$= b_0 = -0.204$
2	$\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$					
	$\begin{vmatrix} -0.994 & & & -0.204 \\ & -0.204 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$					$= c_2 = 0.946$
	$\begin{vmatrix} -0.994 & & -0.0756 \\ & -0.204 & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$					$= c_1 = -1.184$
3	$\begin{vmatrix} -0.994 & 1.176 \\ & -0.204 & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$					$= c_0 = 0.315$
4	$\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$					
5	0.946	-1.184	0.315			

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

Es necesario pasar del plano  $z$  a otro plano ( $w$ ) mediante la transformación bilineal:  $z = \frac{w + 1}{w - 1}$

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

$$a_0 \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right)^n + a_1 \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{w + 1}{w - 1} + a_n = 0$$

*Simplificar multiplicando ambos miembros por  $(w-1)^n$*

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \dots + b_{n-1} w + b_n = 0$$

El resto es igual que el criterio de Routh-Hurwitz aplicado en el dominio de Laplace.

Construcción de la tabla de Routh-Hurwitz para la aplicación del criterio:

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + b_2 w^{n-2} + \dots + b_{n-1} w + b_n = 0$$

$w^n$	$b_0$	$b_2$	$b_4$	$b_6$	$\dots$	} <i>Coefficientes de <math>Q(w)</math></i>		
$w^{n-1}$	$b_1$	$b_3$	$b_5$	$b_7$	$\dots$			
$w^{n-2}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\dots$		$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1} = \frac{b_0 b_3 - b_1 b_2}{-b_1} = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1}$	$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1} = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_3}{-c_1} = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_2}{c_1}$
$w^{n-3}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$w^2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$0$			$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{-b_1} = \frac{b_0 b_5 - b_1 b_4}{-b_1} = \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1}$	$d_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_5 \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}}{-c_1} = \frac{b_1 c_4 - c_1 b_5}{-c_1} = \frac{c_1 b_5 - b_1 c_4}{c_1}$
$w^1$	$f_1$	$f_2$	$0$					
$w^0$	$g_1$	$0$					$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_6 \\ b_1 & b_7 \end{vmatrix}}{-b_1} = \frac{b_0 b_7 - b_1 b_6}{-b_1} = \frac{b_1 b_6 - b_0 b_7}{b_1}$	$g_1 = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}}{-f_1} = \frac{e_1 f_2 - f_1 e_2}{-f_1} = \frac{f_1 e_2 - e_1 f_2}{f_1}$

**El número de raíces con parte real positiva de la ecuación  $Q(w)$  es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna de la tabla**

Determinar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es:

$$P(z) = z^3 + 1.3z^2 - 0.085z + 0.24$$

Realizamos la transformación bilineal:  $z = \frac{w+1}{w-1}$

$$Q(w) = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 1.3\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0.085\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0.24 = 0 \quad \text{Simplificamos multiplicando ambos miembros por } (w-1)^3$$

$$Q(w) = (w+1)^3 + 1.3(w+1)^2(w-1) - 0.085(w+1)(w-1)^2 + 0.24(w-1)^3 = 0$$

$$Q(w) = (w^3 + 3w^2 + 3w + 1) + 1.3(w^3 + w^2 - w - 1) - 0.085(w^3 - w^2 - w + 1) + 0.24(w^3 - 3w^2 + 3w - 1) = 0$$

$$Q(w) = 2.455w^3 + 3.665w^2 + 2.505w - 0.625 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{Q(w) = w^3 + 1.423w^2 + 1.02w - 0.255 = 0}$$

Dividiendo por el coeficiente de mayor exponente (2.455)

# Prueba de Routh-Hurwitz: Ejemplo

$$Q(w) = w^3 + 1.423w^2 + 1.02w - 0.255 = 0$$

Construcción de la tabla de Routh-Hurwitz

$w^3$	1	1.02
$w^2$	1.423	-0.255
$w^1$	$c_1=1.204$	$c_2=0$
$w^0$	$d_1=-0.255$	

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1.020 \\ 1.423 & -0.255 \end{vmatrix}}{-1.423} = 1.204 \quad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1.423 & -0.255 \\ 1.204 & 0 \end{vmatrix}}{-1.204} = -0.255$$
$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1.423 & 0 \end{vmatrix}}{-1.423} = 0$$

Existe un cambio de signo ( $d_1$ ). El sistema tiene 1 raíz con parte real positiva en el plano  $w$ : Hay una raíz fuera del círculo unitario del plano  $z$  y por tanto, el sistema es **inestable**.

- La estabilidad de un sistema no tiene que ver con la precisión (capacidad para seguir una entrada y/o anular el error en estado estacionario).
  - La señal de error en LC puede crecer sin límite, aun cuando el sistema sea estable.
- Si interesa conocer el comportamiento del sistema (estabilidad) en función de la variación de algún parámetro ( $K$ ,  $T$ ,  $R(z)$ ), se recomienda dibujar y analizar el LDR.
- Si el único objetivo es conocer si un sistema es estable o no para unas condiciones dadas ( $K$ ,  $T$ ,  $R(z)$ ), lo habitual es calcular las raíces de  $P(z)$  mediante cálculo numérico (MATLAB).

©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
“Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

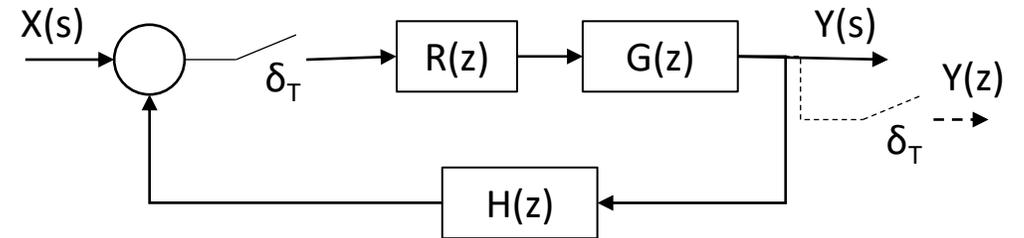
# Análisis de la respuesta transitoria

TEMA 3 (parte 4)

- Introducción
- Especificaciones de la respuesta transitoria
  - Respuesta frente a secuencia impulso
  - Respuesta frente a escalón unitario
  - Sistema reducido equivalente
- Respuesta de sistemas de primer orden
  - Especificaciones de los sistemas discretos de primer orden
- Respuesta de sistemas de segundo orden
  - Especificaciones de los sistemas discretos de segundo orden

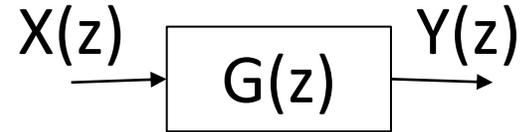
La estabilidad absoluta es condición necesaria pero no suficiente para un adecuado diseño

- Localización de polos fuera de  $|z| < 1$
- Pruebas de Jury, Routh-Hurwitz
  
- Estabilidad relativa: Régimen transitorio
  - Polos del sistema en lazo cerrado ( $P(z)$ )
- Precisión: Régimen permanente
  - Polos de la función de entrada
  - Tipo de sistema



**Señales de prueba:**  
Pulso, escalón, rampa,  
sinusoidales...

- Las condiciones de funcionamiento las podemos imponer en los dominios del tiempo y/o frecuencia.
- **Tiempo:** Se suele especificar la respuesta frente a una entrada escalón unitario
  - Fácil de generar
  - Suficientemente drástica como para excitar las frecuencias del sistema (establecer estabilidad relativa)
  - También da información del régimen permanente (establecer errores en régimen permanente)
- **Frecuencia:** Especificar la respuesta frente a una entrada sinusoidal de frecuencia incremental
  - Establecer la respuesta en frecuencia del sistema (ancho de banda, ganancia, etc.)



Secuencia impulso unitario:  $\{x_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \Rightarrow X(z) = 1$

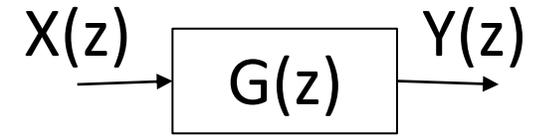
$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = K \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot 1$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$y_n = K \sum_{r=1}^N a_r \cdot p_r^{k-1},$$

$a_r$ : residuo en  $p_r = (z - p_r)G(z)$

# Respuesta frente a escalón unitario



Secuencia escalón unitario:  $\{x_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = K \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$y_n = K \frac{P(1)}{Q(1)} + K \sum_{r=1}^N a_r \cdot p_r^k \quad \left. \begin{array}{l} a_r: \text{residuo en } p_r \\ a_r = \frac{G(p_r)}{(p_r - 1)} \end{array} \right\}$$

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot G(z) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot K \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = K \frac{P(1)}{Q(1)} \Rightarrow \text{Ganancia Estática}$$

$$y_n = K \frac{P(1)}{Q(1)} + K \sum_{r=1}^N \frac{G(p_r)}{(p_r - 1)} \cdot p_r^n$$

- Si un polo es comparativamente mas pequeño en módulo, su contribución a la respuesta total es despreciable (equivalente a los polos rápidos en el plano S:  $z = e^{Ts} = e^{\sigma T} e^{\pm j\omega T}$ ).
- Si existe un par polo-cero muy cercano, el coeficiente  $a_r$  correspondiente al polo será muy pequeño ( $P(p_r)$ ), y por tanto su contribución a la respuesta total es despreciable.

**Sistema reducido equivalente**: comportamiento transitorio y permanente es similar, con un menor número de polos.

1. El sistema reducido equivalente debe tener la misma ganancia estática que el original.

$$K \frac{P(1)}{Q(1)} = K_{eq} \frac{P_{eq}(1)}{Q_{eq}(1)} \Rightarrow K_{eq} = K \frac{P(1)}{Q(1)} \cdot \frac{Q_{eq}(1)}{P_{eq}(1)}$$

2. Deberá comprobarse el error en la reducción (simplificación).

## 2.a) Eliminación de polos de módulo comparativamente pequeño

Comprobar el error al retirar el polo:  $\frac{1}{p_r - p_j} \approx \frac{1}{1 - p_j} \cdot \frac{1}{p_r}$        $p_j$ : polo eliminado  
 $p_r$ : resto de polos de  $G(z)$

## 2.b) Eliminación de pares polo-cero

1. Comprobar la distancia del polo a  $z=1$

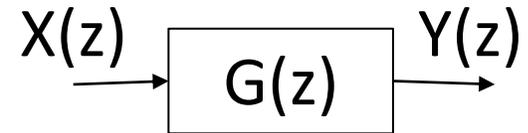
- El coeficiente  $a_j$  que determina la contribución del polo  $p_j$  a la respuesta total del sistema es:

$$a_j = \frac{G(p_j)}{(p_j - 1)}$$

- $a_j$  será menor cuanto mayor sea la distancia.

2. Comprobar la posición del par polo-cero respecto al resto de polos:

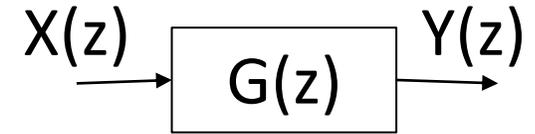
$$\frac{c_r - c_j}{p_r - p_j} \approx \frac{1 - c_j}{1 - p_j}$$



$$y_n = a \cdot y_{n-1} + b \cdot x_n$$

$$Y(z) = a \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + b \cdot X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{b \cdot z}{z - a}$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{b \cdot z}{z - a}$$

$$\{x_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \Rightarrow X(z) = 1$$

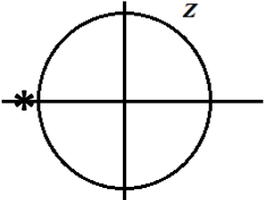
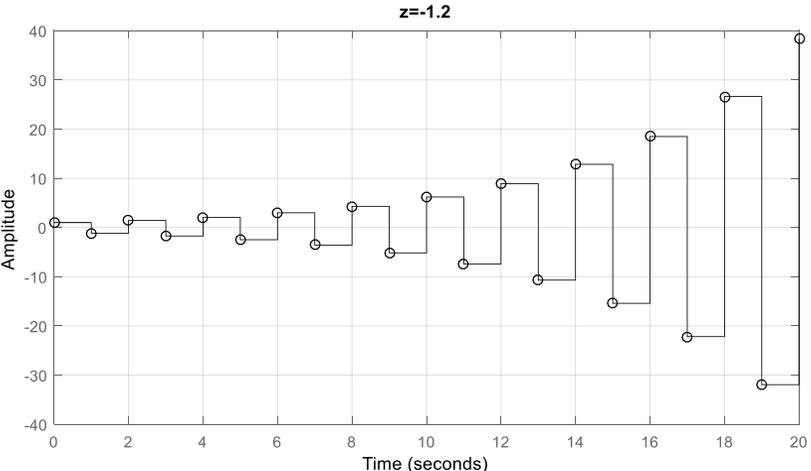
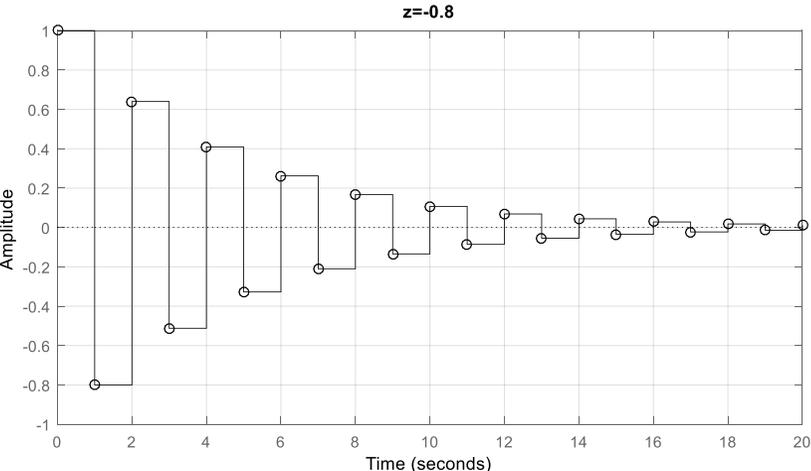
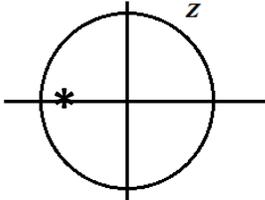
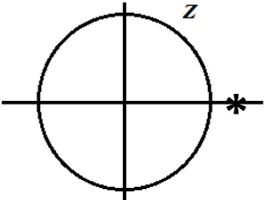
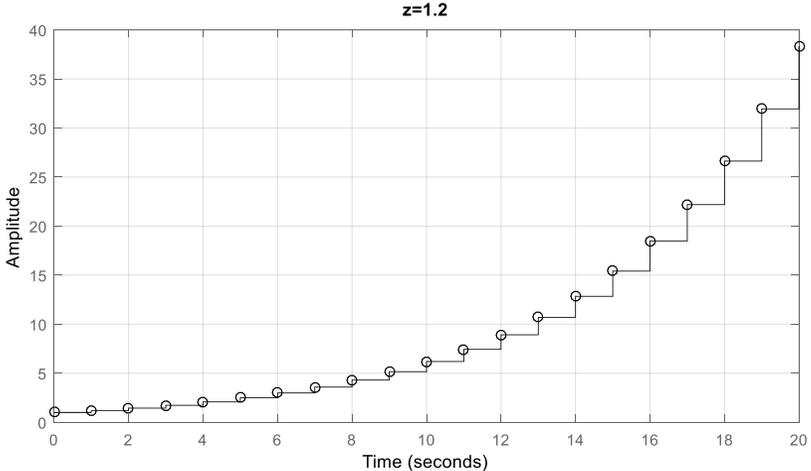
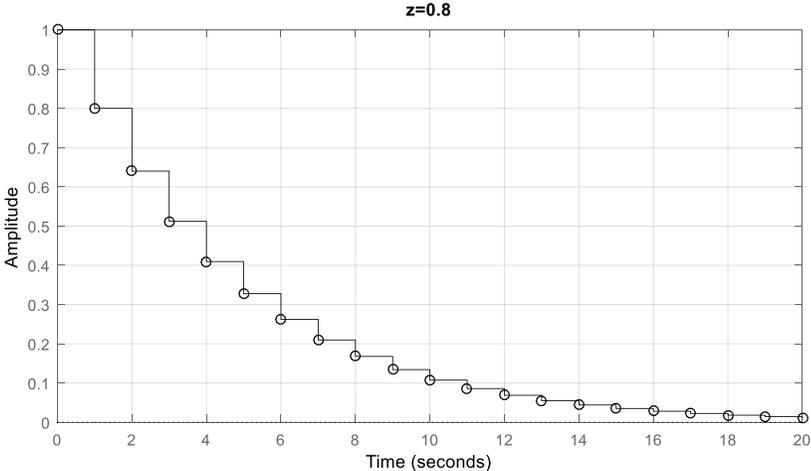
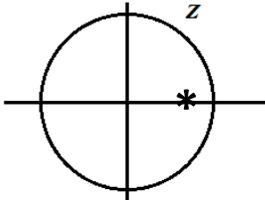
$$y_n = K \sum_{r=1}^N a_r \cdot p_r^{n-1} \quad a_r: \text{residuo en } p_r = \frac{G(p_r)}{z - p_r}$$

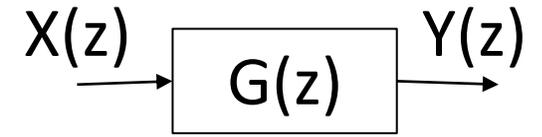
$$y_n = b \frac{\frac{a}{z - a}}{z - a} a^{n-1} = b \cdot a \cdot a^{n-1} = b \cdot a^n$$

# Sistemas de primer orden

## Respuesta a la secuencia impulso

$$y_n = b \cdot a^n$$





$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{b \cdot z}{z - a}$$

Secuencia escalón unitario:  $\{x_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$

$$y_n = K \frac{P(1)}{Q(1)} + K \sum_{r=1}^N a_r \cdot p_r^n$$

$a_r$ : residuo en  $p_r$

$$a_r = \frac{G(p_r)}{(z - p_r)(p_r - 1)}$$

$$y_n = b \frac{P(1)}{Q(1)} + \sum_{r=1}^N a_r \cdot p_r^{n-1} = b \frac{1}{1 - a} + b \frac{a}{a - 1} a^n = \frac{b}{1 - a} (1 - a^{n+1})$$

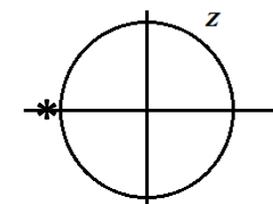
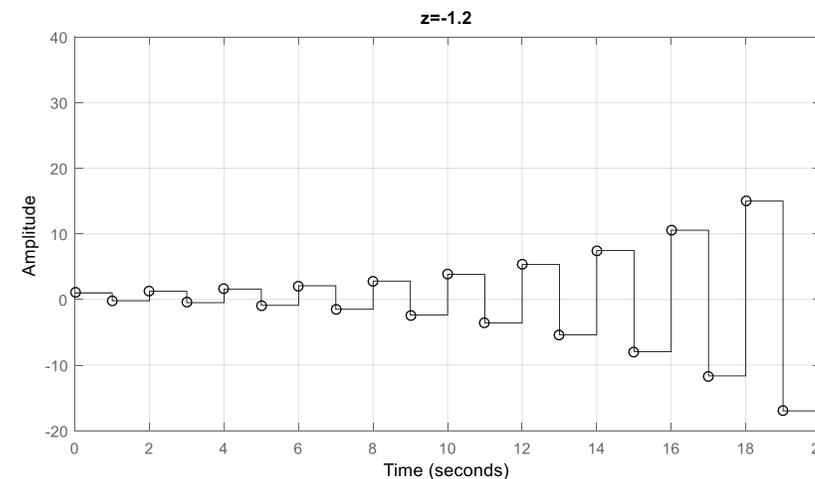
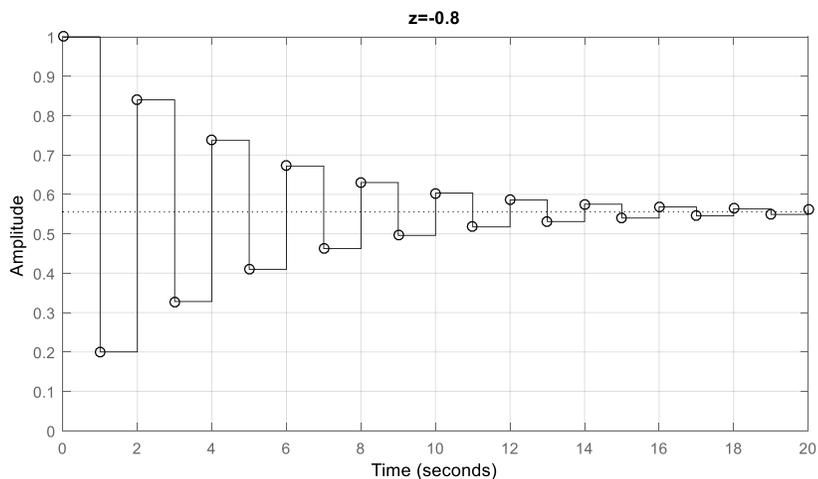
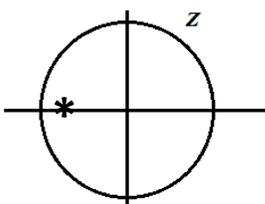
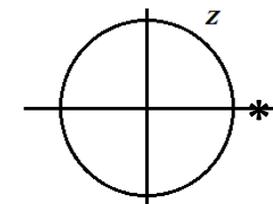
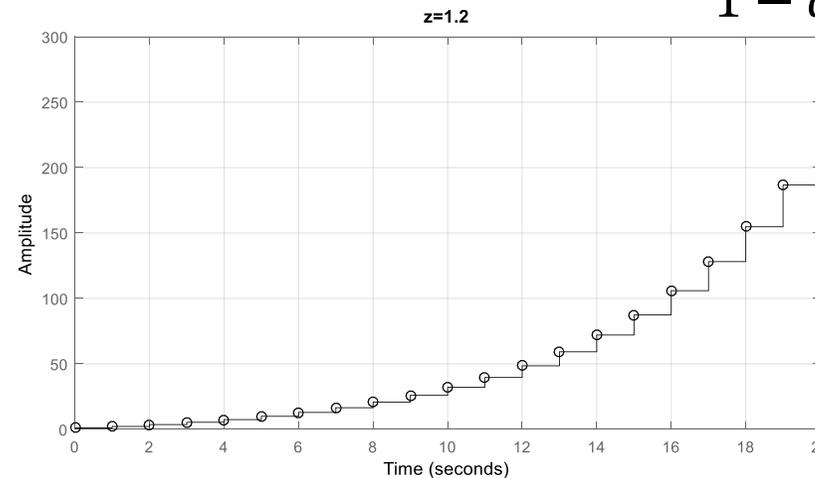
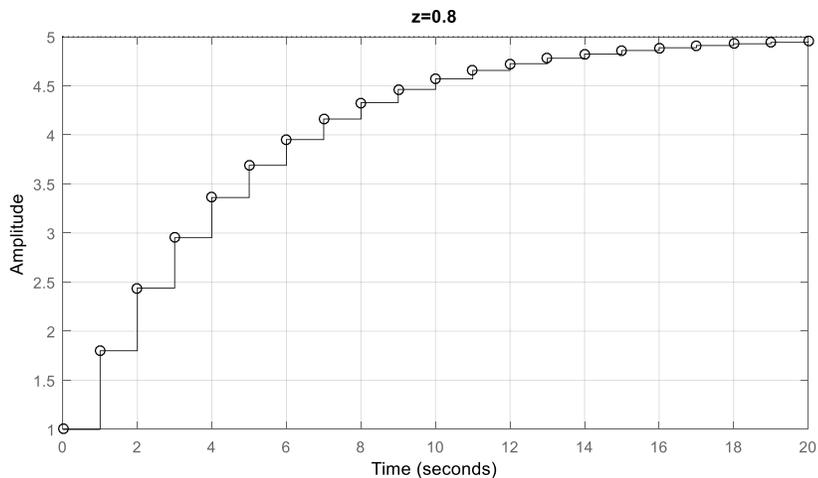
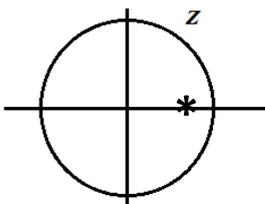
$$y_0 = b \quad y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \cdot \frac{bz}{z - a} \cdot \frac{z}{z - 1} \right] = \frac{b}{1 - a}$$

# Sistemas de primer orden

## Respuesta a la secuencia escalón unitario

$$y_n = \frac{b}{1-a} (1 - a^{n+1})$$

$$y_\infty = \frac{b}{1-a}$$



## Intervalo de constante de tiempo ( $n_r$ )

- Número de periodos de muestreo que deben transcurrir para que la salida sea igual a 0,632 el valor permanente

$$y_{\infty} = \frac{b}{1-a}$$

$$b \frac{1-a^{n_r}}{1-a} = 0,632 \frac{b}{1-a}$$

$$n_r = \frac{\log 0,368}{\log a}$$

## Intervalo de establecimiento o de respuesta ( $n_t$ )

- Número de periodos de muestreo que deben transcurrir para que la salida sea igual al 95% (98%) de su valor permanente

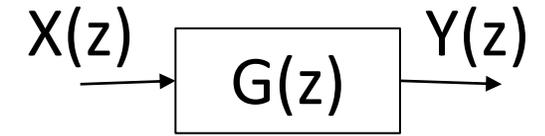
$$y_{\infty} = \frac{b}{1-a}$$

$$b \frac{1-a^{n_t}}{1-a} = 0,95 \frac{b}{1-a}$$

$$n_t = \frac{\log 0,05}{\log a}$$

$$b \frac{1-a^{n_t}}{1-a} = 0,98 \frac{b}{1-a}$$

$$n_t = \frac{\log 0,02}{\log a}$$

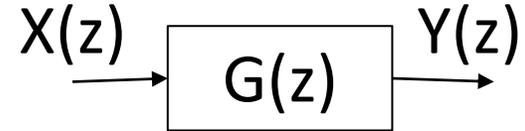


Ecuación en diferencias:  $y_n + a \cdot y_{n-1} + b \cdot y_{n-2} = c \cdot x_n$

- Transformada Z:  $Y(z) + a \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + b \cdot z^{-2} \cdot Y(z) = c \cdot X(z)$

- Función de transferencia:  $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c}{1+a \cdot z^{-1}+b \cdot z^{-2}} = \frac{c \cdot z^2}{z^2+a \cdot z+b}$

- La respuesta temporal dependerá del tipo y ubicación de los polos:
  - Polos reales o polos complejos conjugados.
  - Ubicación de los polos en el plano Z.



Sea  $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c \cdot z^2}{z^2 + a \cdot z + b}$  donde  $P(z)$  tiene dos polos reales:  $(z - a_1)$  y  $(z - a_2)$

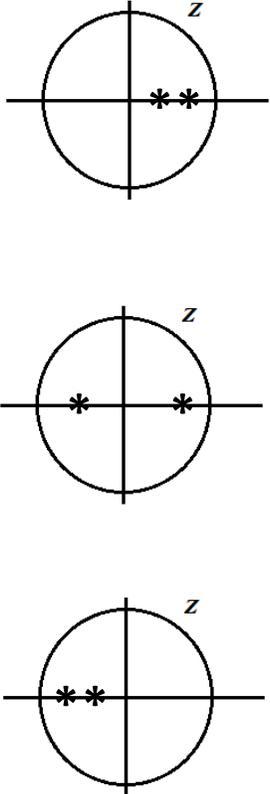
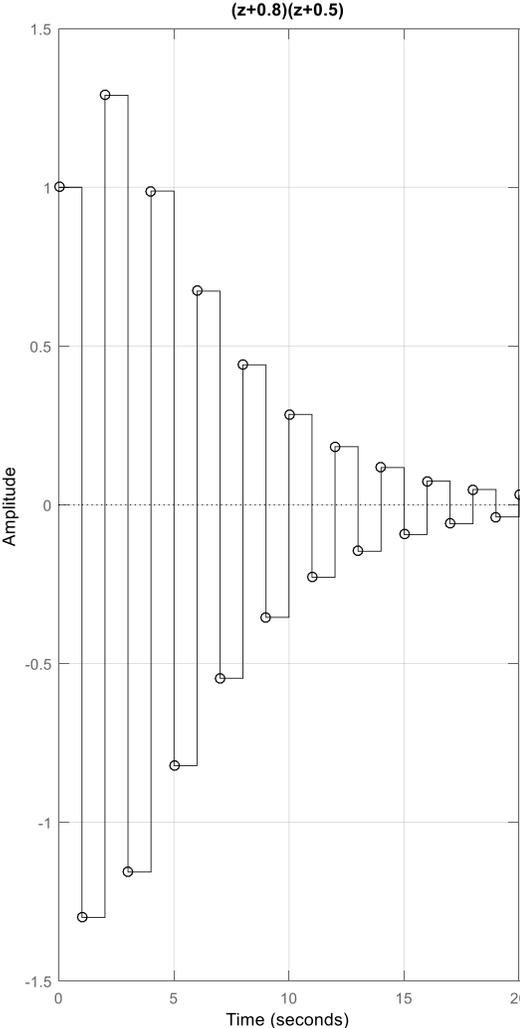
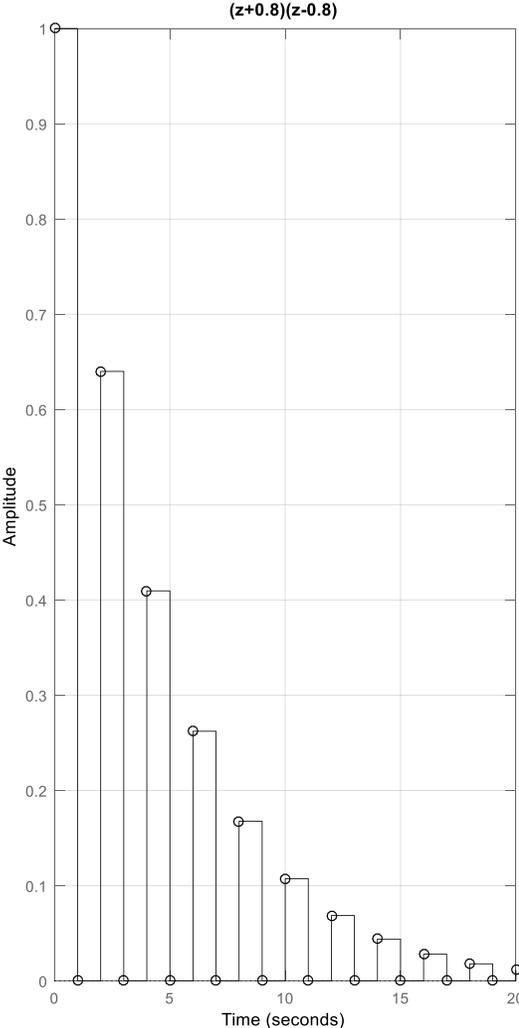
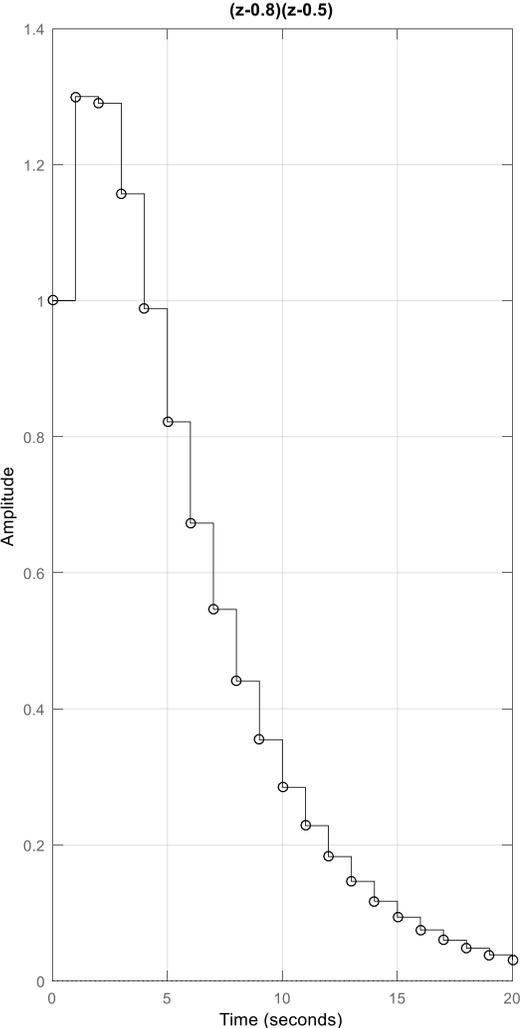
- Respuesta al impulso:  $y_n = \frac{c}{a_1 \cdot a_2} (a_1^{n+1} - a_2^{n+1})$

- Respuesta a escalón:  $y_n = \frac{c}{(1-a_1)(1-a_2)} + \frac{c \cdot a_1^{n+2}}{(1-a_1)(a_1-a_2)} + \frac{c \cdot a_2^{n+2}}{(1-a_2)(a_2-a_1)}$

# Sistemas de segundo orden

## Respuesta a la secuencia impulso unitario

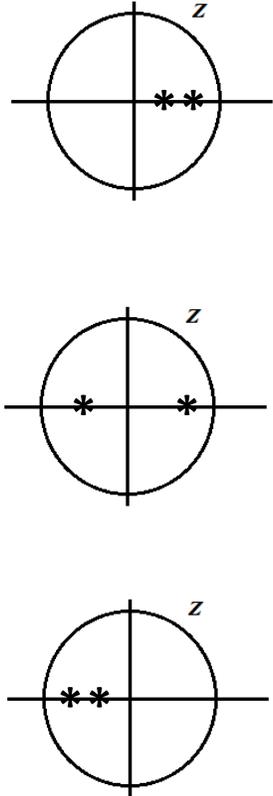
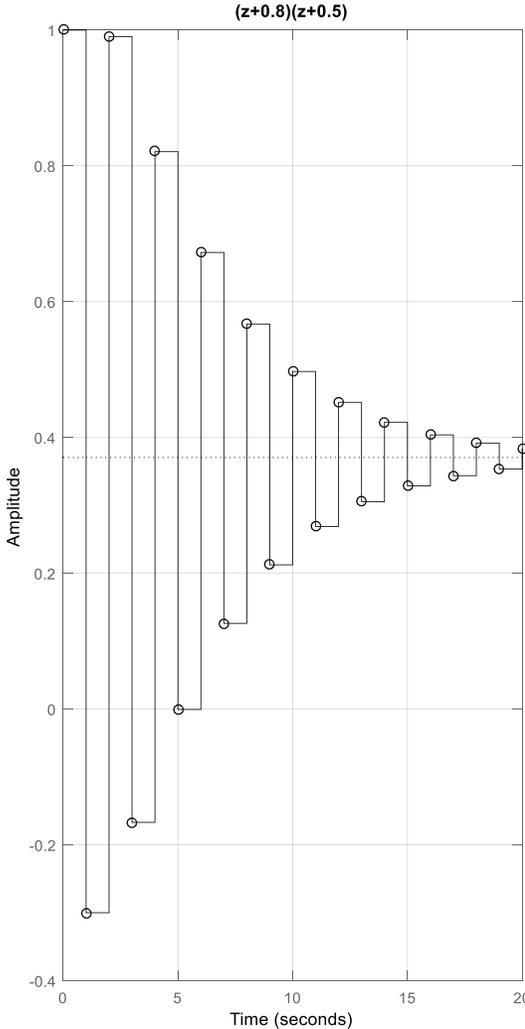
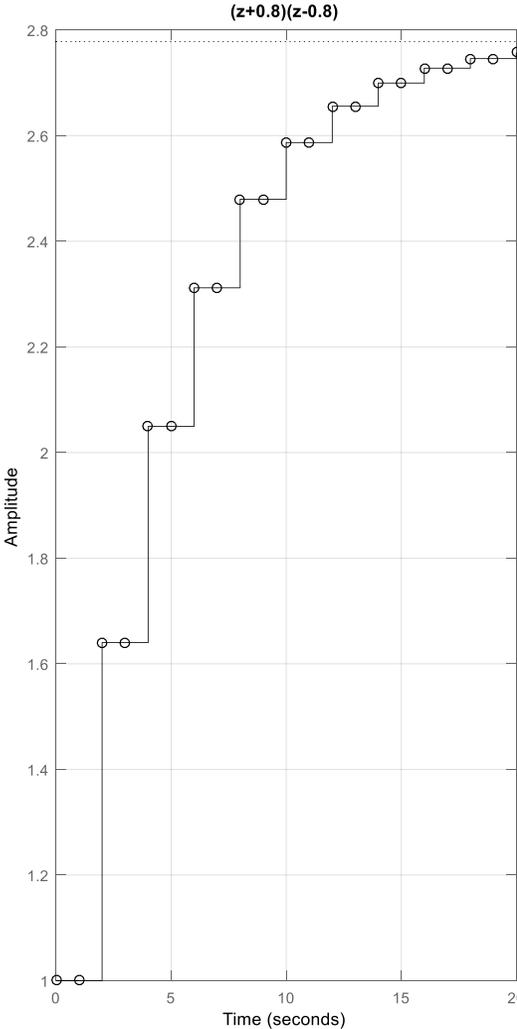
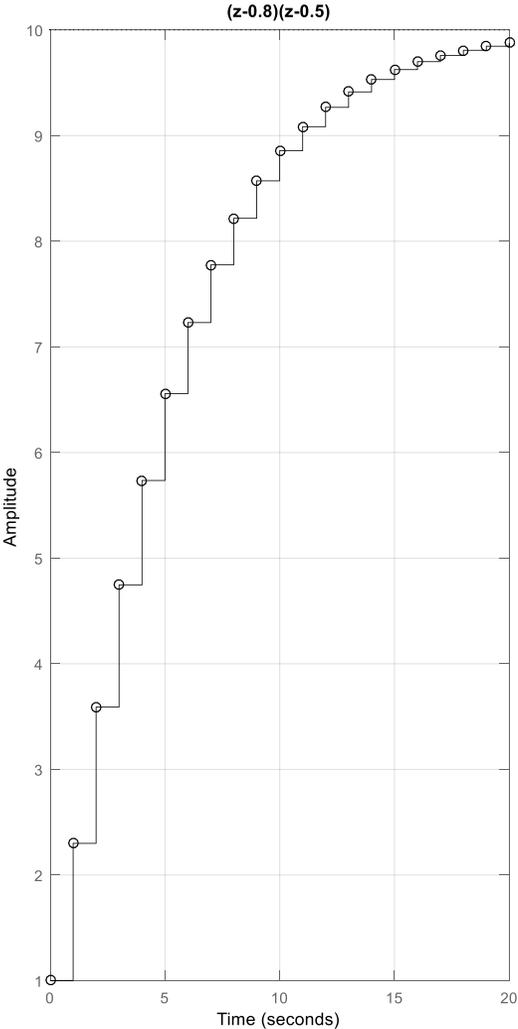
$$y_n = \frac{c}{a_1 \cdot a_2} (a_1^{n+1} - a_2^{n+1})$$



# Sistemas de segundo orden

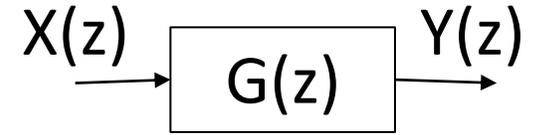
## Respuesta a la secuencia escalón unitario

$$y_n = \frac{c}{(1 - a_1)(1 - a_2)} + \frac{c \cdot a_1^2}{(1 - a_1)(a_1 - a_2)} + \frac{c \cdot a_2^2}{(1 - a_2)(a_2 - a_1)}$$



# Sistemas de segundo orden

## Sistema de segundo orden con un polo cc



Sea  $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c \cdot z^2}{z^2 + a \cdot z + b} = \frac{K}{(z + a + jb)(z - a + jb)}$  donde  $P(z)$  tiene un polo complejo conjugado en  $z = a \pm jb$

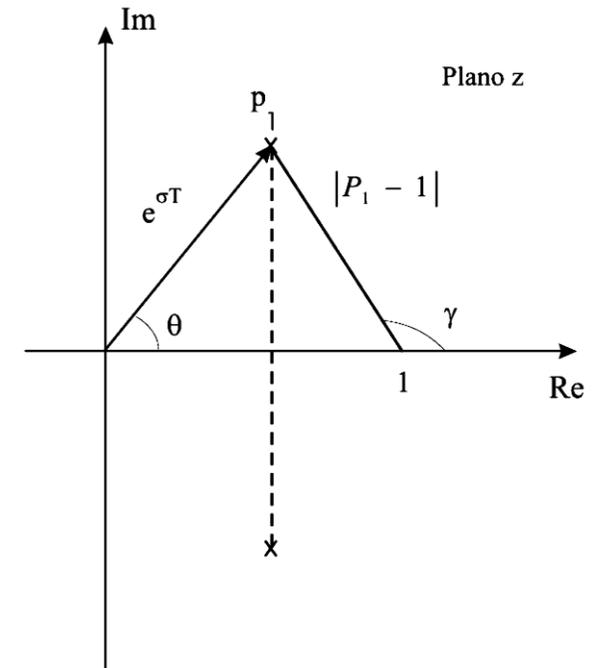
$\frac{Y(z)}{X(z)}$  se puede expresar como  $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{K}{z^2 + e^{-\sigma} \cos \theta \cdot z + e^{-2\sigma}}$  donde los ángulos se relacionan con los polos:

- Respuesta a impulso:

$$y_n = \frac{K \cdot e^{-(n-2)\sigma}}{\sin \theta} \cdot \sin((n-1) \cdot \theta)$$

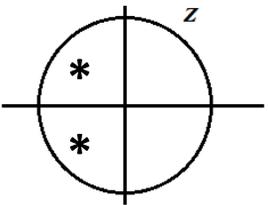
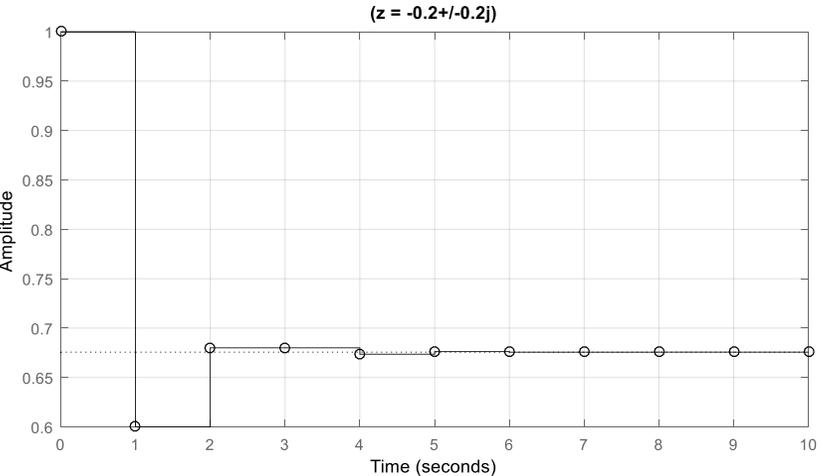
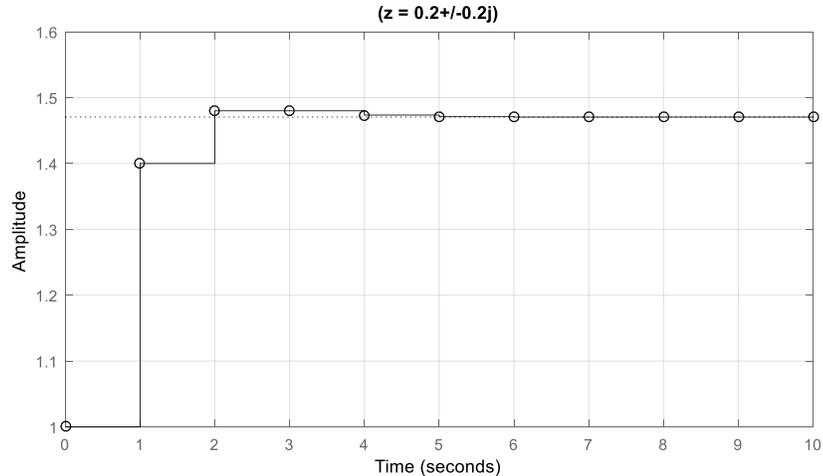
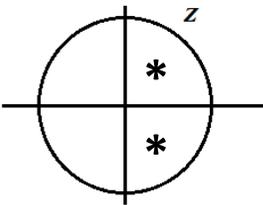
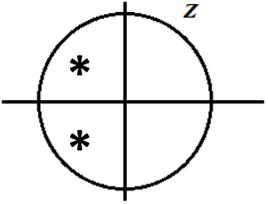
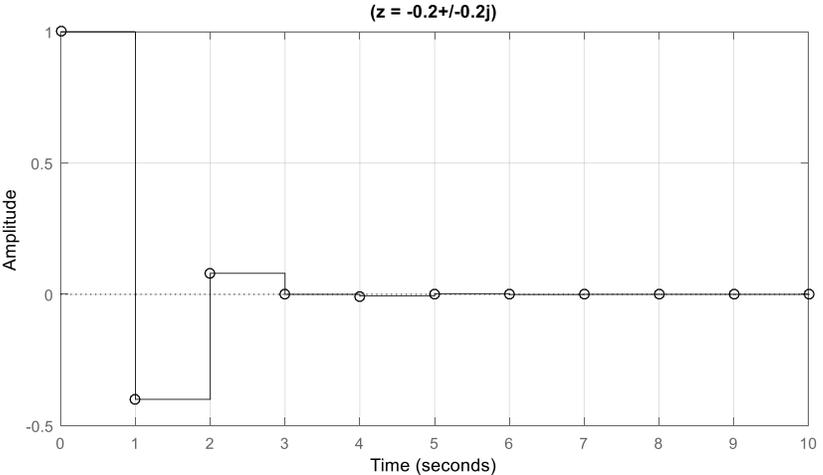
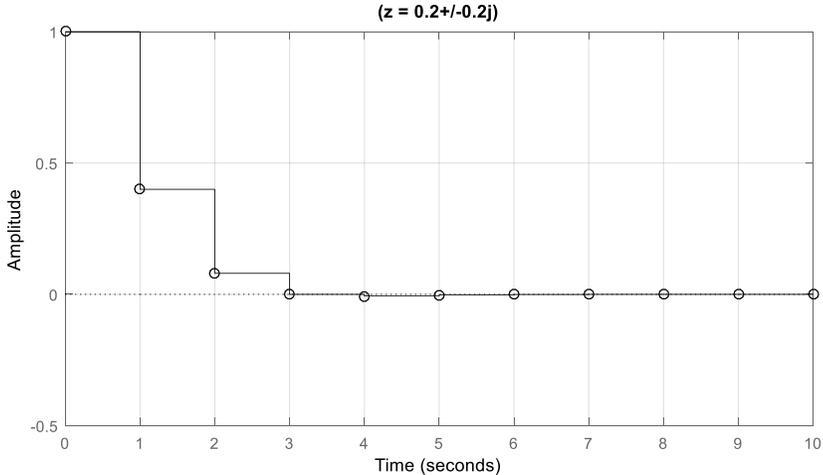
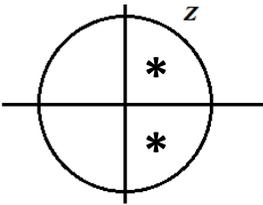
- Respuesta a escalón:

$$y_n = \frac{K}{1 - 2e^{-\sigma} \cos \theta + e^{-2\sigma}} + \frac{K}{|p - 1| e^{-\sigma} \sin \theta} e^{-n\sigma} \cdot \sin(n \cdot \theta + \gamma)$$



# Sistemas de segundo orden

## Respuesta a impulso y escalón



# Especificaciones de los sistemas discretos de segundo orden

**Intervalo de subida  $n_r$**

$$n_r = \frac{\gamma}{\theta} = \frac{\gamma}{T \cdot \omega_d}, \text{ con } n_r \in \mathbb{Z}$$

**Intervalo de pico de sobreoscilación  $n_p$**

$$n_p = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{T \cdot \omega_d}, \text{ con } n_p \in \mathbb{Z}$$

**Valor de pico de sobreoscilación  $M_p$**

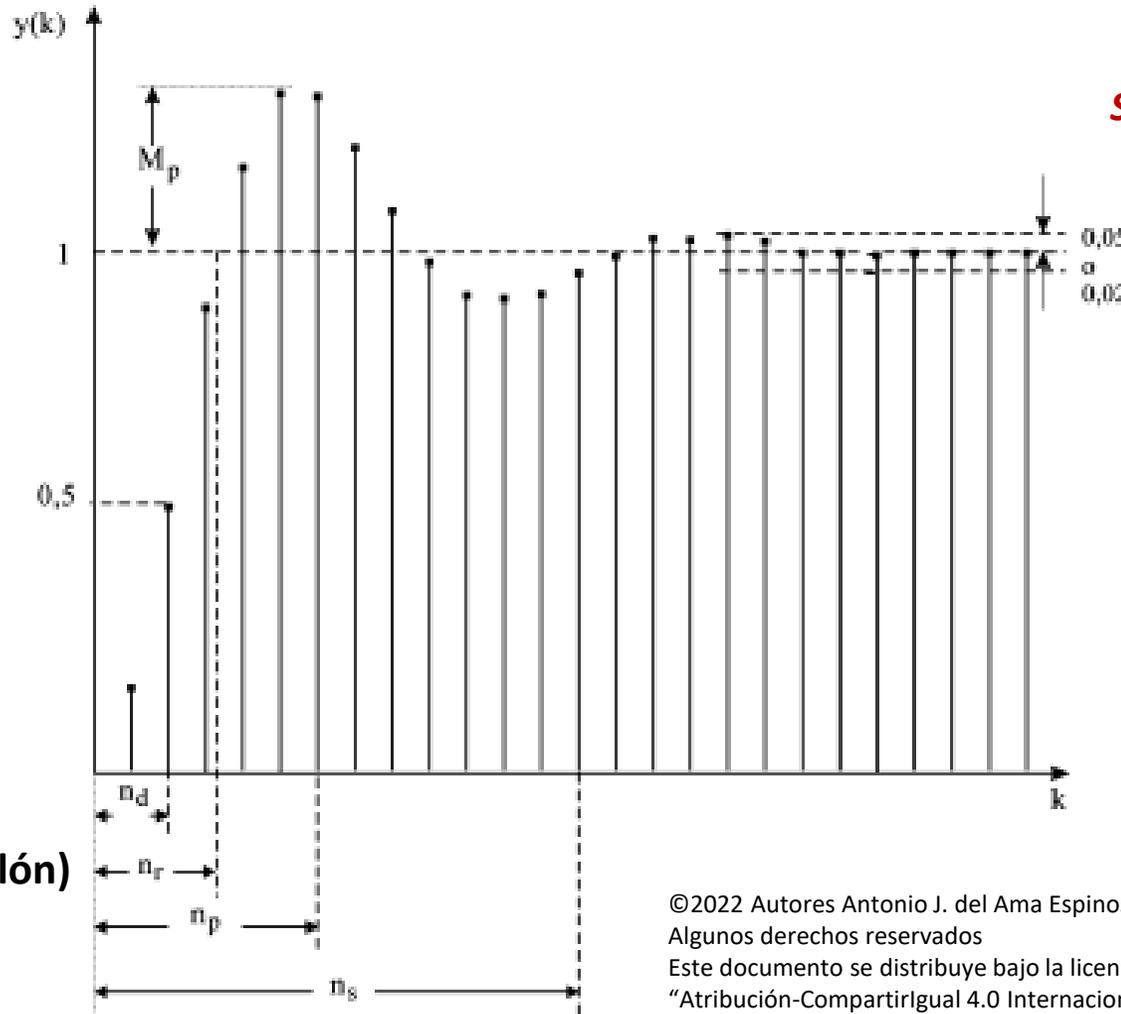
$$M_p = e^{\frac{-\pi}{\tan \theta}} = e^{\left(\frac{-\pi \cdot \sigma}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = |p|^{n_p}$$

**Intervalo de establecimiento  $n_s$**

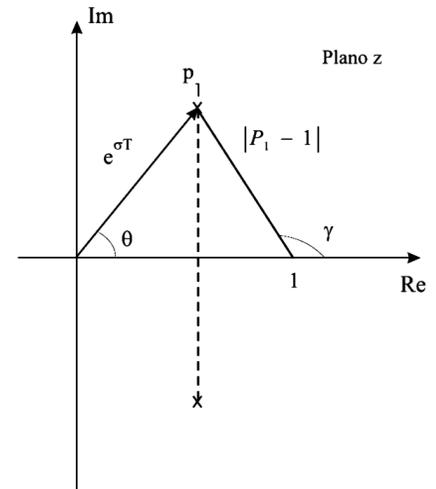
$$n_s = \frac{\pi}{T \cdot \sigma}, \text{ con } n_s \in \mathbb{Z}$$

**Ganancia estática (valor final frente a escalón)**

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) G(z) \frac{1}{(1 - z^{-1})} \right]$$



**Siempre se redondea hacia el entero más próximo**



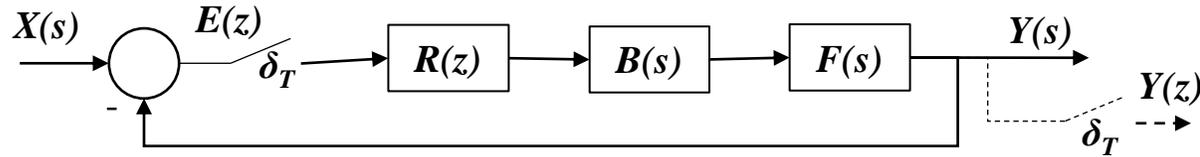
©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
 Algunos derechos reservados  
 Este documento se distribuye bajo la licencia  
 "Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
 disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# Análisis de la respuesta estacionaria

TEMA 3 (parte 5)

- Análisis del error en régimen permanente
  - Error de posición
  - Error de velocidad
  - Error de aceleración
  - Error con realimentación no unitaria
  - Error con dinámica en la realimentación
- Respuesta ante perturbaciones

## Análisis de error



$$\left. \begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{R(z) \cdot BF(z)}{1 + R(z) \cdot BF(z)} \\ G(z) &= R(z) \cdot BF(z) \end{aligned} \right\} \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = M(z)$$

Error del sistema: diferencia entre valor de entrada y salida  $\Rightarrow \{e_k\} = \{x_k\} - \{y_k\}$

$$E(z) = X(z) - Y(z) = U(z)(1 - M(z)) = \frac{1}{1 + G(z)} X(z)$$

Aplicando teorema del valor final:

$$e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} X(z) \right]$$

**El error en rég. permanente depende de:**

- La entrada  $X(z)$
- La características (tipo) del sistema  $G(z)$
- La realimentación (si no es unitaria)

$$G(z) = \frac{R(z) \cdot BF(z)}{1 + R(z) \cdot BF(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z) \quad r = \text{tipo del sistema } (r \geq 0)$$

Error frente a entrada escalón  $\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})}$

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \cdot \frac{1}{(1 - z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{(1 - z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)} \right]$$

Se define la constante de error en posición, como:  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{(1 - z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z) \right]$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)$$

## Error de posición

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

### Sistema Tipo 0 (r=0)

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \hat{G}(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + C} \right] = e_p$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [\hat{G}(z)] = C \Rightarrow e_p = \frac{1}{1+C}$$

### Sistema Tipo 1 (r=1)

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{(1-z^{-1})} \cdot \hat{G}(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \hat{G}(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{0}{0 + C} \right] = 0$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{(1-z^{-1})} \cdot \hat{G}(z) \right] = \frac{1}{0} \cdot C = \infty \Rightarrow e_p = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

### Sistema Tipo 2 (r=2)

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \cdot \hat{G}(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + \hat{G}(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{0}{0 + C} \right] = 0$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \cdot \hat{G}(z) \right] = \frac{1}{0} \cdot C = \infty \Rightarrow e_p = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$\text{Error frente a entrada rampa} \Rightarrow X(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\begin{aligned} e_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^r}{(1-z^{-1})^r + \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \right] \end{aligned}$$

Se define la constante de error en velocidad  $K_v$ :

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1}) \cdot (1+G(z))}{Tz^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{((1-z^{-1})) \left( 1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z) \right)}{Tz^{-1}} \right]$$
$$e_v = \frac{1}{K_v}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)$$

## Error de velocidad

$$X(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

### Sistema Tipo 0 (r=0)

$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^0}{(1-z^{-1})^0 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \right] = \frac{1}{1 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T}{0} = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{((1-z^{-1})) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^0} \cdot \hat{G}(z)\right)}{Tz^{-1}} \right] = \frac{(0) \left(1 + \frac{1}{1} \cdot C\right)}{T} = 0 \Rightarrow e_v = \frac{1}{0} = \infty$$

### Sistema Tipo 1 (r=1)

$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^1}{(1-z^{-1})^1 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{(1-z^{-1}) + \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{1} \right] = \frac{1}{(0) + C} \cdot \frac{T}{1} = \frac{T}{C}$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{((1-z^{-1})) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})} \cdot \hat{G}(z)\right)}{Tz^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{((1-z^{-1}) + \hat{G}(z))}{Tz^{-1}} \right] = \frac{(0 + C)}{T} = \frac{C}{T} \Rightarrow e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{T}{C}$$

### Sistema Tipo 2 (r=2)

$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{Tz^{-1}}{1} \right] = \frac{0 \cdot T}{0 + C} = 0$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{((1-z^{-1})) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \cdot \hat{G}(z)\right)}{Tz^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\left((1-z^{-1}) + \frac{1}{(1-z^{-1})} \cdot \hat{G}(z)\right)}{Tz^{-1}} \right] = \frac{0 + \infty \cdot C}{T} = \infty \Rightarrow e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Error frente a entrada parábola  $\Rightarrow X(z) = \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right]$$
$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^r}{(1-z^{-1})^r + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right]$$

Se define la constante de error en aceleración  $K_a$ , como:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(1-z^{-1})^2 \cdot (1+G(z))}{T^2(1+z^{-1})z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(2(1-z^{-1})^3) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2(1+z^{-1})z^{-1}} \right]$$
$$e_a = \frac{1}{K_a}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)$$

## Error de aceleración

$$X(z) = \frac{T^2(1-z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$$

### Sistema Tipo 0 (r=0)

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^0}{(1-z^{-1})^0 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2}{2(1-z^{-1})^2} \right] = \frac{1}{1+C} \cdot \frac{T^2}{0} = \infty$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(2(1-z^{-1})^3) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^0} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2(1+z^{-1})z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\left(2(1-z^{-1})^2 + \frac{2(1-z^{-1})^2}{1} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2} \right] = \frac{(0 + \frac{0}{1} \cdot C)}{T^2} = 0 \Rightarrow e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty$$

### Sistema Tipo 1 (r=1)

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^1}{(1-z^{-1})^1 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2}{2(1-z^{-1})} \right] = \frac{1}{1+C} \cdot \frac{T^2}{0} = \infty$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(2(1-z^{-1})^3) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^1} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2(1+z^{-1})z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\left(2(1-z^{-1})^2 + \frac{2(1-z^{-1})}{1} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2} \right] = \frac{(0 + \frac{0}{1} \cdot C)}{T^2} = 0 \Rightarrow e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty$$

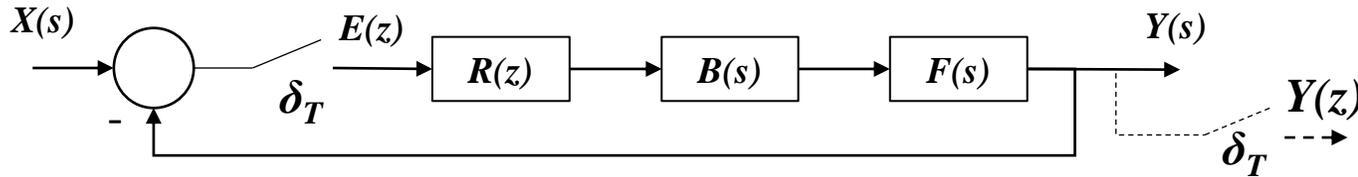
### Sistema Tipo 2 (r=2)

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1+z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{(1-z^{-1})^2 + \hat{G}(z)} \cdot \frac{T^2}{2} \right] = \frac{1}{0+C} \cdot \frac{T^2}{2} = \frac{T^2}{2C}$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(2(1-z^{-1})^3) \left(1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2(1+z^{-1})z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\left(2(1-z^{-1})^2 + \frac{2}{1} \cdot \hat{G}(z)\right)}{T^2} \right] = \frac{(0 + \frac{2}{1} \cdot C)}{T^2} = \frac{2C}{T^2} \Rightarrow e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{T^2}{2C}$$

# Error en régimen permanente

## Resumen



Error del sistema: diferencia entre valor de entrada y salida =>  
 $\{e_k\} = \{x_k\} - h\{y_k\} \Leftrightarrow E(z) = X(z) - Y(z)$

$$E(z) = X(z) - Y(z) = X(z) - E(z) \cdot (R(z) \cdot BF(z)) = \frac{1}{1 + R(z) \cdot BF(z)} X(z)$$

Aplicando teorema del valor final:

$$e_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + R(z) \cdot BF(z)} X(z) \right]$$

$$G(z) = \frac{R(z) \cdot BF(z)}{1 + R(z) \cdot BF(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)$$

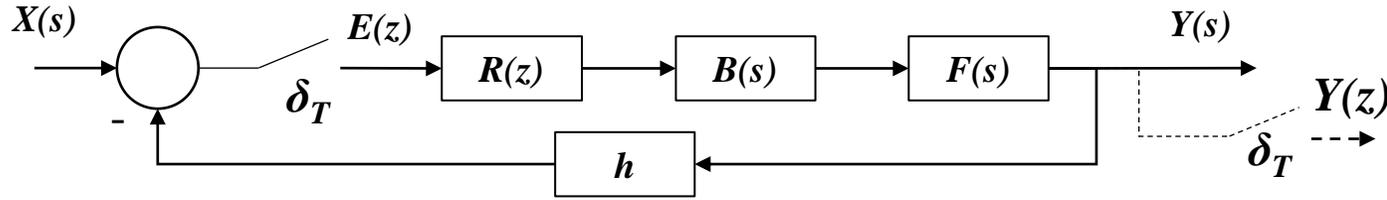
$r =$  tipo del sistema ( $r \geq 0$ )

Errores en régimen permanente en función de la señal de prueba y el tipo de sistema

	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada parábola
Sistema de tipo 0	$\frac{1}{1 + K_p}$	$\infty$	$\infty$
Sistema de tipo 1	0	$\frac{T}{K_v}$	$\infty$
Sistema de tipo 2	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$

# Error en régimen permanente

## Resumen: Realimentación no unitaria



Error del sistema: diferencia entre valor de entrada y salida =>  
 $\{e_k\} = \{x_k\} - h\{y_k\} \Leftrightarrow E(z) = X(z) - hY(z)$

$$E(z) = X(z) - Y(z) = X(z) - E(z) \cdot h(R(z) \cdot BF(z)) = \frac{1}{1 + hR(z) \cdot BF(z)} X(z)$$

Aplicando teorema del valor final:

$$e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + hR(z) \cdot BF(z)} X(z) \right]$$

$$G(z) = \frac{R(z) \cdot BF(z)}{1 + hR(z) \cdot BF(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)$$

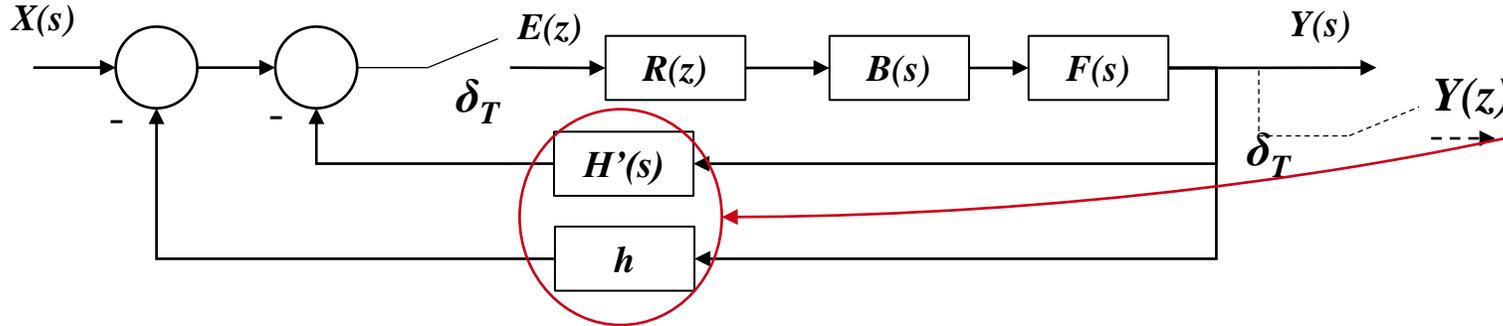
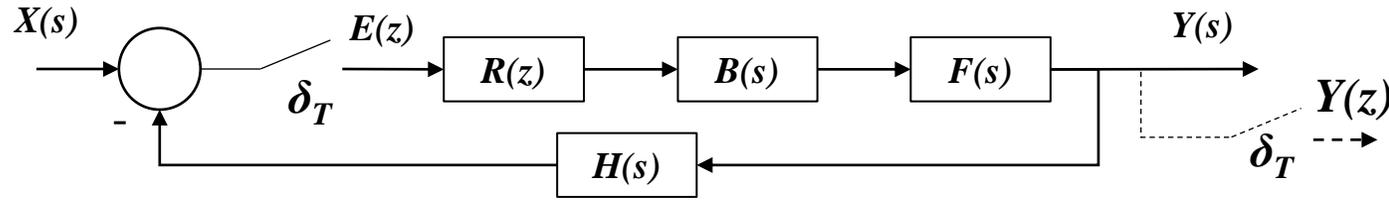
$r$  = tipo del sistema ( $r \geq 0$ )

Errores en régimen permanente en función de la señal de prueba y el tipo de sistema

	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada parábola
Sistema de tipo 0	$\frac{1}{1 + hK_p}$	$\infty$	$\infty$
Sistema de tipo 1	0	$\frac{T}{hK_v}$	$\infty$
Sistema de tipo 2	0	0	$\frac{T^2}{hK_a}$

# Error en régimen permanente

## Resumen: Realimentación con dinámica



Separar la parte estática de la dinámica en  $H(s)$ :  $H(s) = h \cdot H'(s)$

$$E(z) = X(z) - Y(z) = X(z) - E(z) \cdot h(R(z) \cdot BF(z) \cdot H'(z))$$

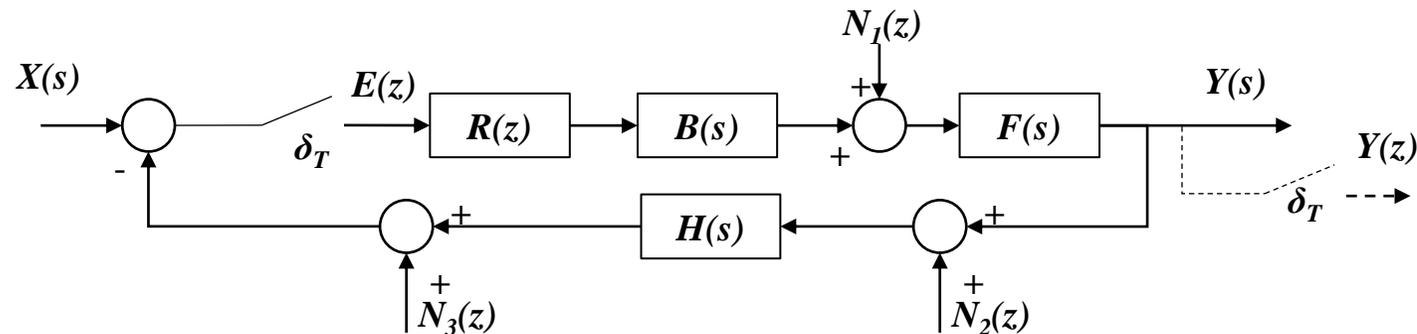
$$E(z) = \frac{1}{1 + h(R(z) \cdot BF(z) \cdot H'(z))} X(z)$$

$$G(z) = \frac{R(z) \cdot BF(z)}{1 + h(R(z) \cdot BF(z) \cdot H'(z))} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^r} \cdot \hat{G}(z)$$

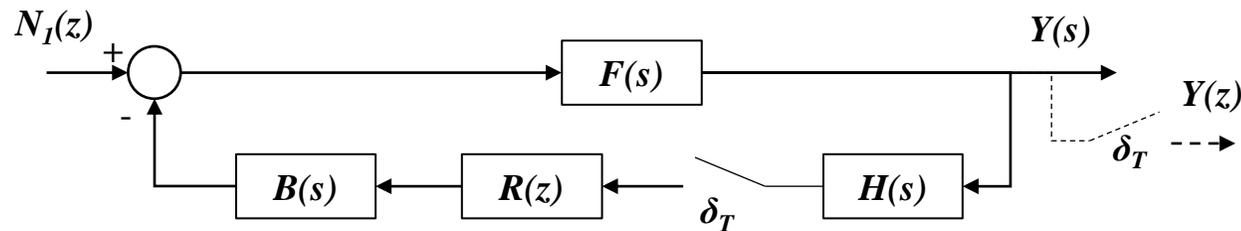
$r =$  tipo del sistema ( $r \geq 0$ )

Errores en régimen permanente en función de la señal de prueba y el tipo de sistema			
	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada parábola
Sistema de tipo 0	$\frac{1}{1 + hK_p}$	$\infty$	$\infty$
Sistema de tipo 1	0	$\frac{T}{hK_v}$	$\infty$
Sistema de tipo 2	0	$\infty$	$\frac{T^2}{hK_a}$

- Además de caracterizar la respuesta del sistema frente a entradas de prueba –impulso, escalón, rampa, parábola–, es necesario caracterizar la respuesta del sistema frente a perturbaciones:
  - Entradas no conocidas
  - Se pueden producir en múltiples partes del lazo.
    - Habitualmente: Antes de la planta ( $N_1$ )
    - En el lazo de realimentación ( $N_2, N_3$ )



- Para analizar la robustez del sistema (estabilidad, inmunidad) frente a las perturbaciones, se aplica el principio de superposición<sup>1</sup>:
  - Se considera nula la entrada conocida ( $X(s)$  o  $X(z)$ ), y se analiza el efecto de la(s) perturbación, esto es, la función de transferencia  $\frac{Y(z)}{N(z)}$
  - Para las perturbaciones se usan las mismas entradas de prueba que para la caracterización del sistema –impulso, escalón, rampa, parábola–
- Particularizando para el ruido tras el microcontrolador –antes de la planta–:



<sup>1</sup>: Los sistemas estudiados en esta asignatura son lineales, invariantes con el tiempo, por lo que puede aplicarse este principio.

# Respuesta frente a perturbaciones

Para calcular el efecto de la perturbación, aplicamos el teorema del valor final a la salida del sistema en lazo cerrado

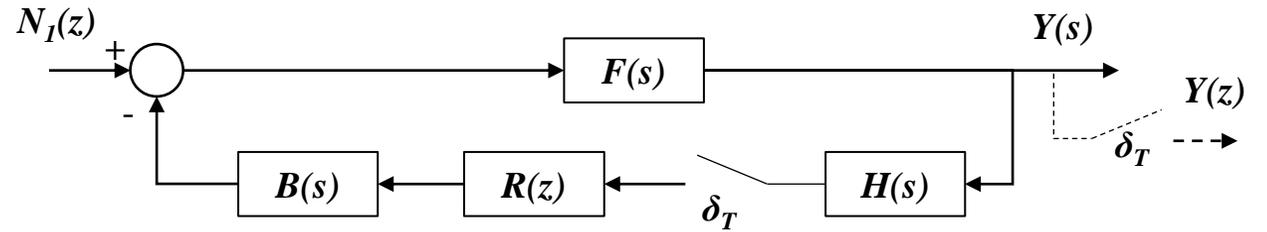
$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}[F(s)]}{1 + FB(z)R(z)} N(z)$$

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z)$$

Si suponemos  $\mathcal{Z}[F(s)]$  una función de transferencia genérica con polos  $p_i$  se tiene:

$$\mathcal{Z}[F(s)] = \frac{K_1 \text{Num}_1(z)}{(1-z^{-1})^r \prod(p_i+z)} \quad \text{y} \quad 1 + FB(z)R(z) = \frac{K_2 \text{Num}_2(z)}{\prod(p_j+z) \prod(z^2+z+a_k)} R(z)$$

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{\frac{K_1 \text{Num}_1(z)}{(1 - z^{-1})^r \prod(p_i + z)}}{\frac{K_2 \text{Num}_2(z)}{\prod(p_j + z) \prod(z^2 + z + a_k)} R(z)} N(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{K_1 \text{Num}_1(z) \prod(p_j + z) \prod(z^2 + z + a_k)}{(1 - z^{-1})^r R(z) K_2 \text{Num}_2(z) \prod(p_i + z)} N(z) \right]$$



- Cuanto mayor sea la ganancia del regulador ( $K_2$ ) y menor la de la planta ( $K_1$ ) menor es el efecto de la perturbación:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{K_1 \text{Num}_1(z) \prod(p_j + z) \prod(z^2 + z + a_k)}{(1 - z^{-1})^r R(z) K_2 \text{Num}_2(z) \prod(p_i + z)} N(z) \right]$$

- Si el sistema formado por planta y regulador son de tipo 1 o superior, la influencia de la perturbación es nula frente a entrada escalón

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ \cancel{(1 - z^{-1})} \frac{K_1 \text{Num}_1(z) \prod(p_j + z) \prod(z^2 + z + a_k)}{\cancel{(1 - z^{-1})} R(z) \text{Num}_2(z) K_2 \prod(p_i + z)} \frac{1}{(1 - z^{-1})} \right] = \frac{C}{\infty} = 0$$

©2022 Autor Antonio J. del Ama Espinosa  
 Algunos derechos reservados  
 Este documento se distribuye bajo la licencia  
 "Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
 disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria y estacionaria

TEMA 3 (parte 6)

- Número de oscilaciones necesarias para captar la respuesta dinámica del sistema
  - Sistema subamortiguado: Muestrear 8-10 veces durante el ciclo de las oscilación sinusoidal de la salida del sistema en lazo cerrado.
  - Sistema sobreamortiguado y de primer orden: Muestrear 8-10 veces durante el tiempo de establecimiento de la respuesta a secuencia escalón.
- Discretización de sistemas continuos:
  - Se desplazan los polos en lazo abierto de la planta continua a lo largo del eje real
  - Afecta a la posición de los polos en lazo cerrado
    - Afecta a la respuesta transitoria
  - Afecta al error en estacionario
  - Tener en cuenta los polos en lazo cerrado finales para elegir la frecuencia de muestreo al discretizar

# Elección del periodo de muestreo

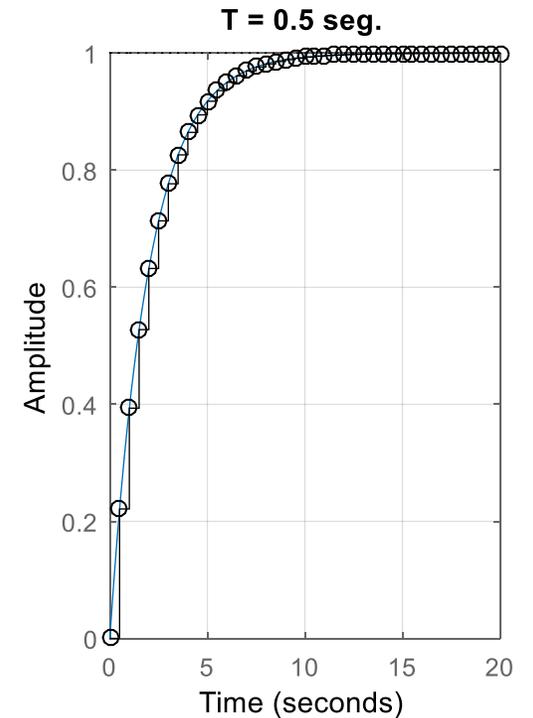
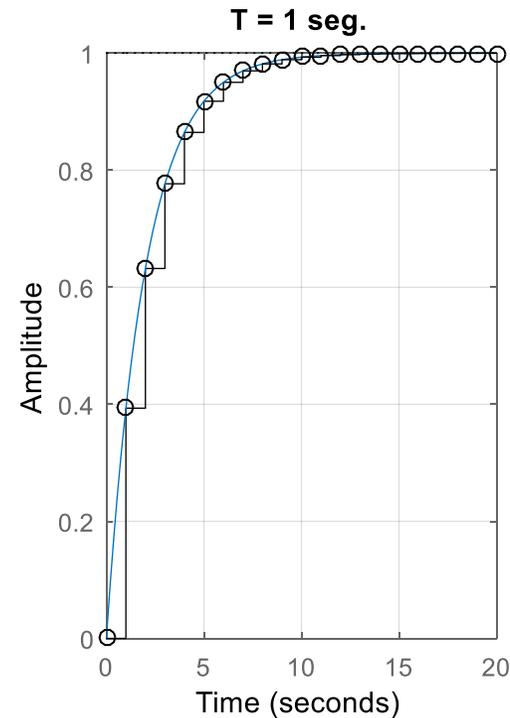
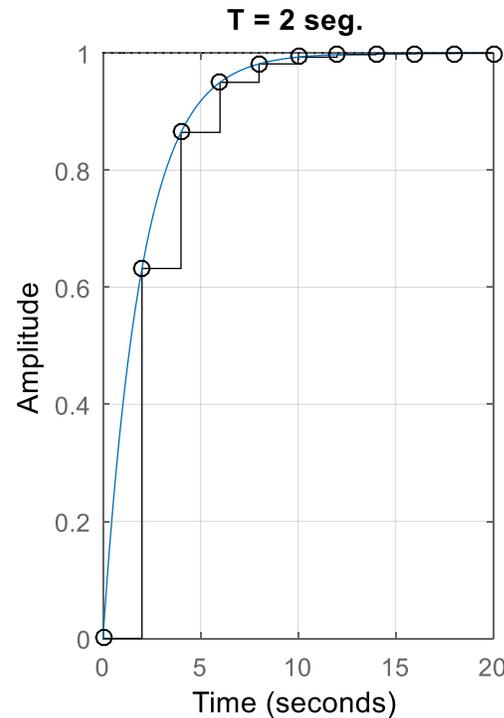
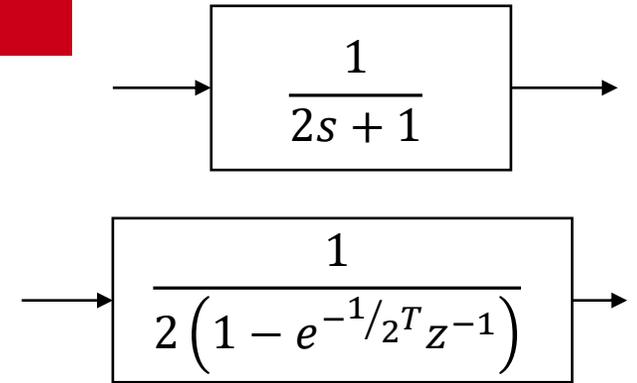
## Sistemas de primer orden

$$G(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

- Tiempo de establecimiento:  $t_s = 2s$

$$G(z) = \frac{1}{2 \left( 1 - e^{-1/2T} z^{-1} \right)}$$

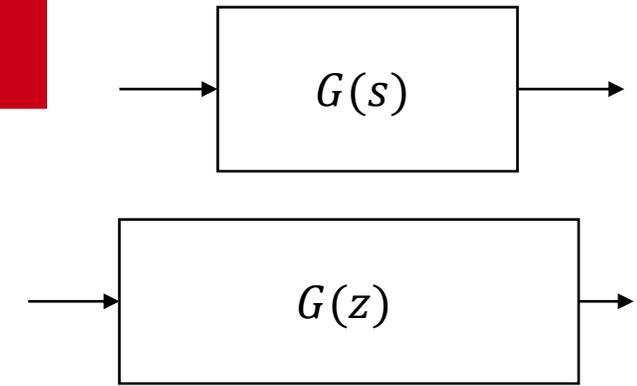
- Debe seleccionarse un periodo de muestreo entre 8-10 muestras en el tiempo de establecimiento



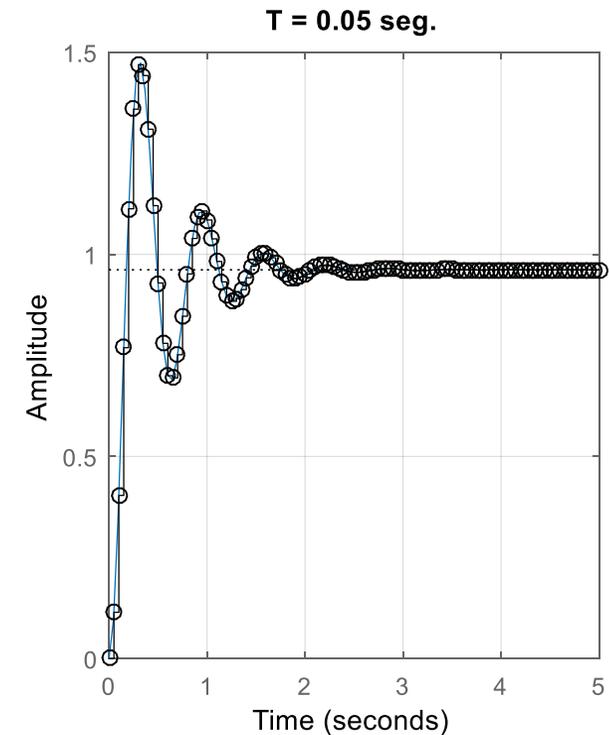
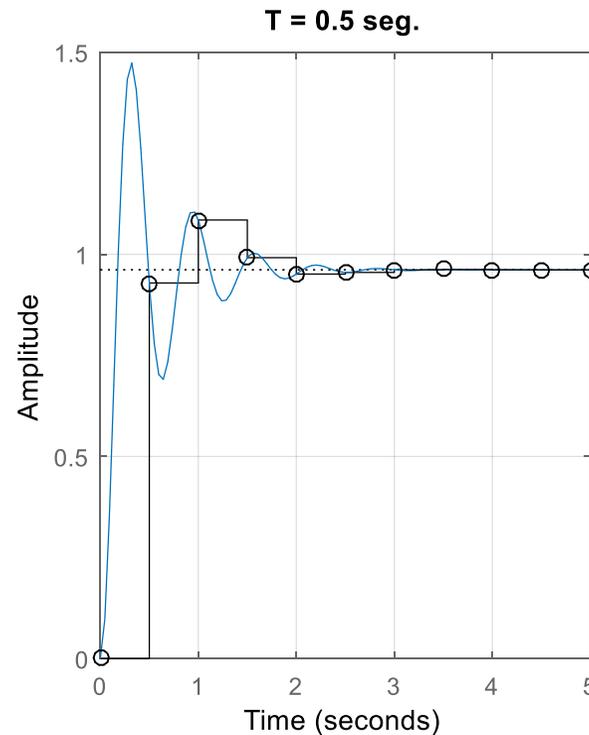
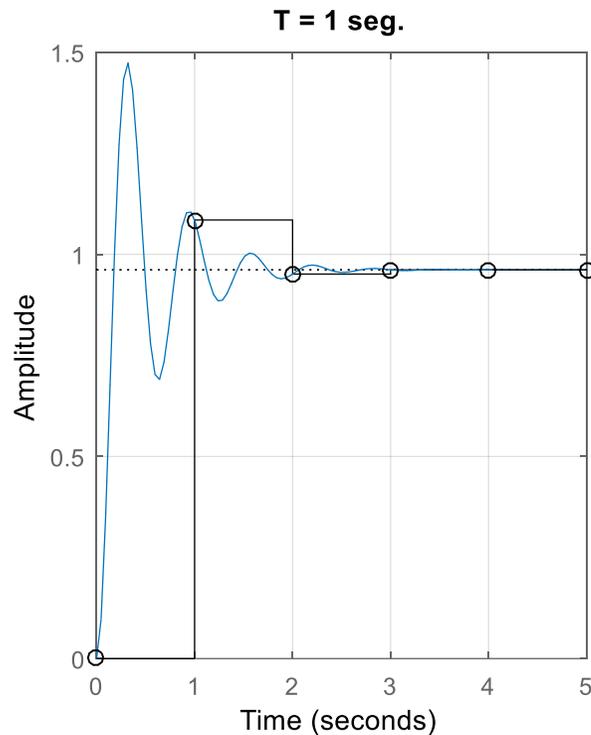
# Elección del periodo de muestreo

## Sistemas de segundo orden y superior

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 4s + 104}; \quad G(z) = \frac{e^{-2T}z^{-1} \sin(10T)}{1 - 2e^{-2T}z^{-1} \cos(10T) + e^{-4T}z^{-2}}$$

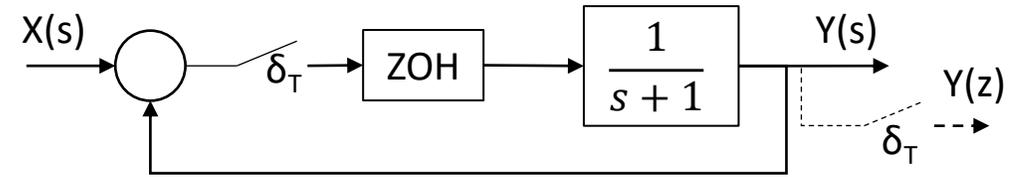


- El periodo de muestreo debe ser el necesario para poder representar la dinámica del sistema: mínimo 8-10 muestras en la primera oscilación



# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria

## Efecto a través de la discretización



La ubicación de los polos en lazo cerrado del sistema realimentado dependen del periodo de muestreo:

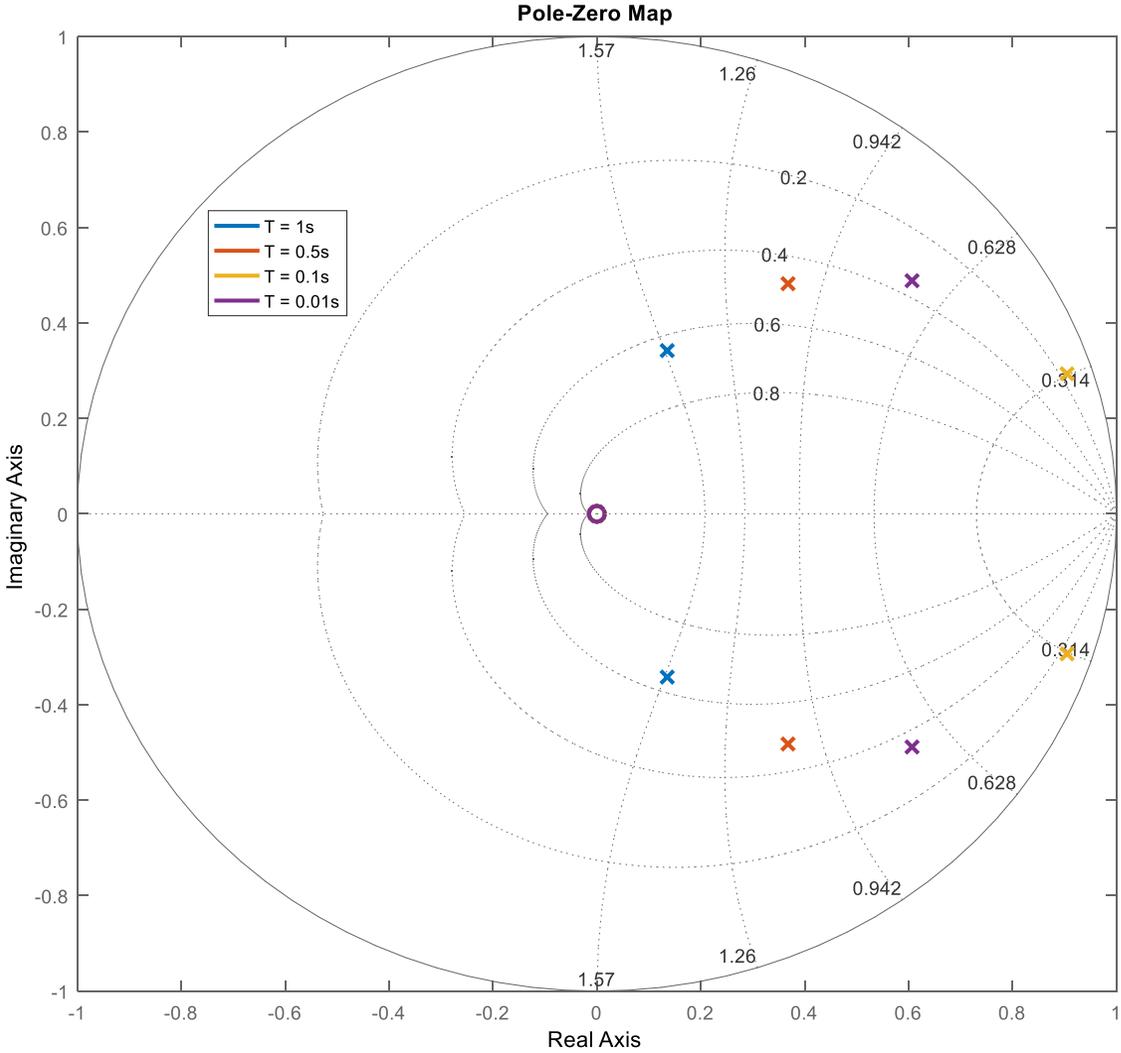
$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[ \frac{G(s)}{s} \right] = (1 - z^{-1})Z \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right]$$
$$Z \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right] = Z \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \right] = 1 - \frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-T}z^{-1}} \rightarrow G(z) = f(T)$$

- Localización de los polos en lazo cerrado (respuesta del sistema):  $\frac{G(z)}{1+G(z)}$

$$1 + 1 - \frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-T}z^{-1}} = 0 \leftrightarrow 1 - 2e^{-T}z^{-1} + z^{-1} = 0 \rightarrow z_p = f(T)$$

# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria

## Desplazamiento de los polos en LC



# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria

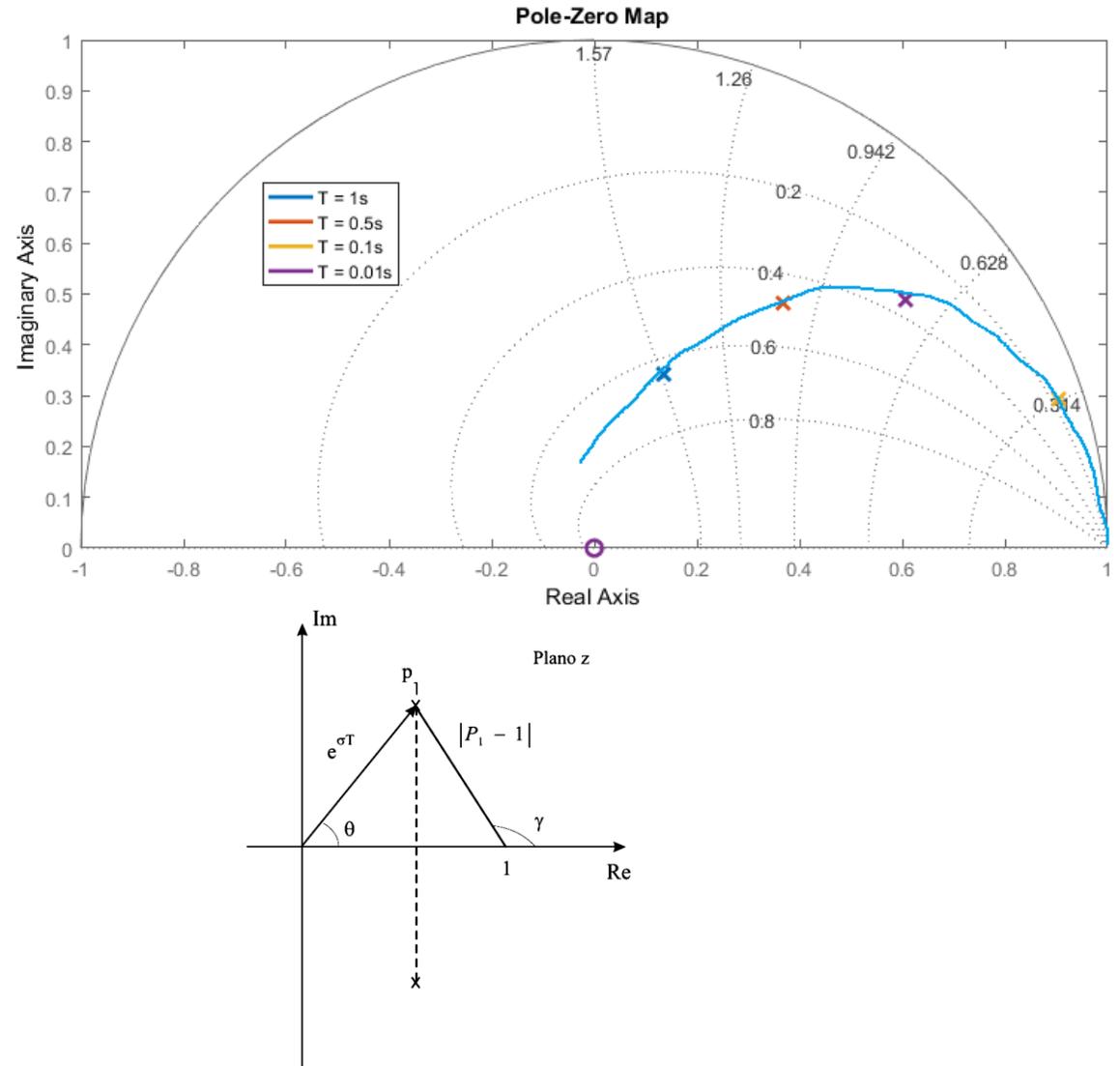
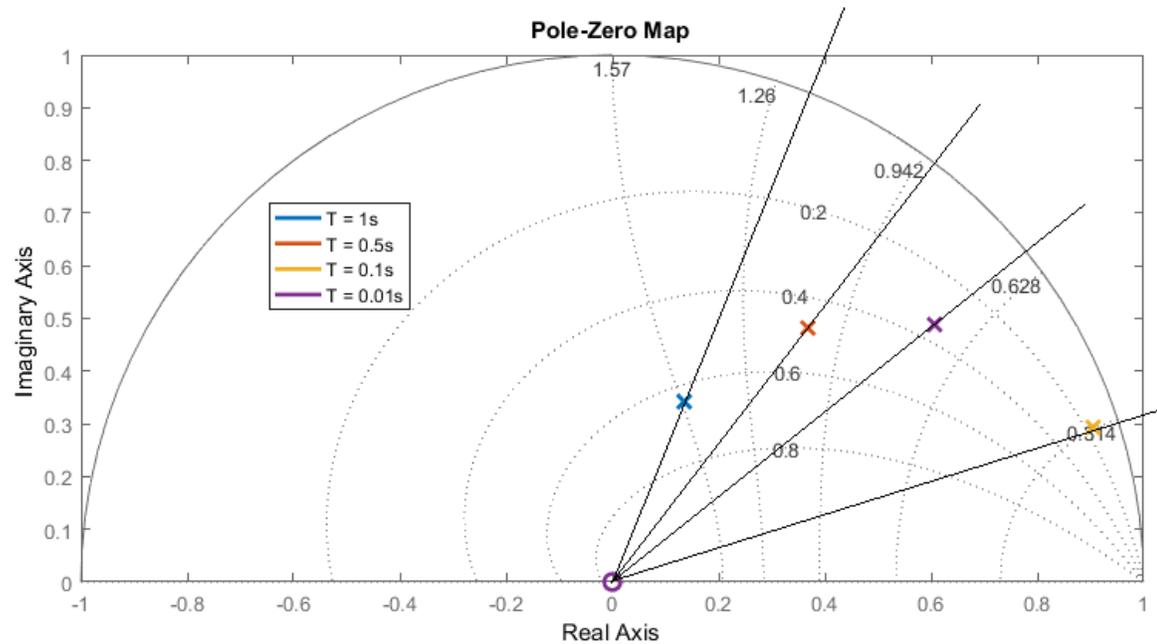
## Desplazamiento de los polos en LC

Intervalo de subida  $n_r = \frac{\gamma}{\theta} = \frac{\gamma}{T \cdot \omega_d}$

Intervalo de pico de sobreoscilación  $n_p = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{T \cdot \omega_d}$

Valor de pico de sobreoscilación  $M_p = e^{\frac{-\pi}{\tan \theta}} = e^{\left(\frac{-\pi \cdot \sigma}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = |p|^{n_p}$

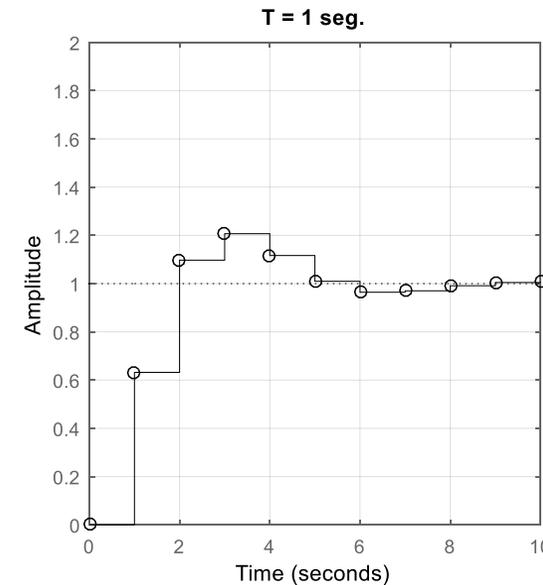
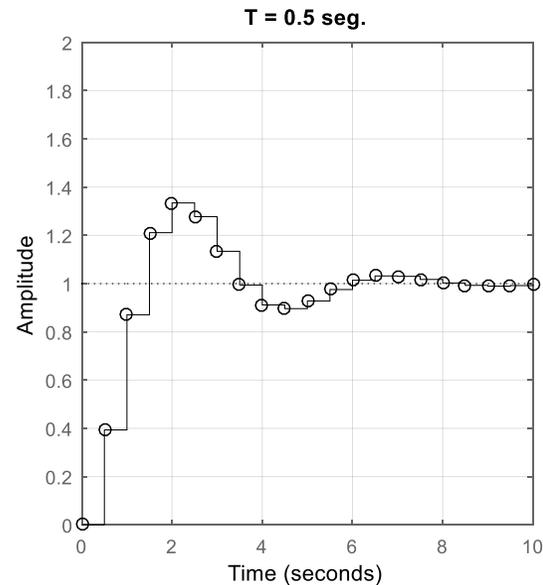
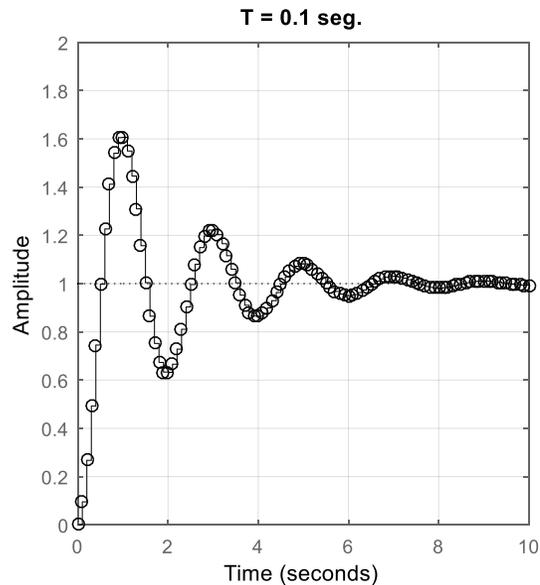
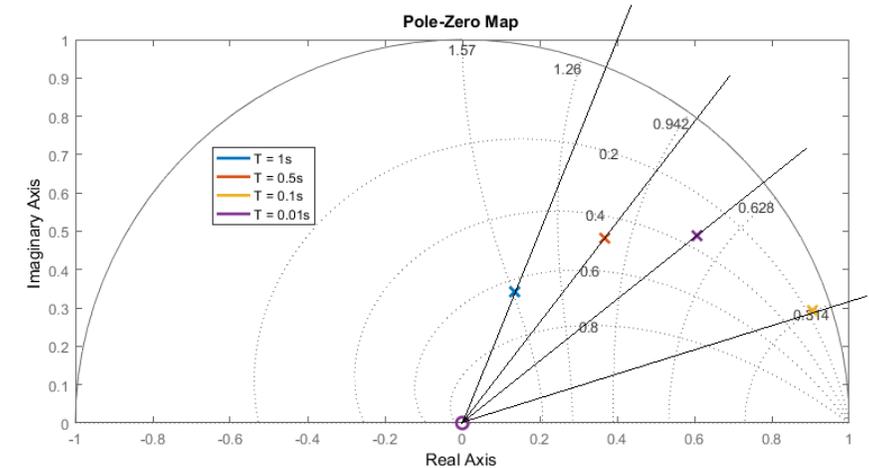
Intervalo de establecimiento  $n_s = \frac{\pi}{T \cdot \sigma}$



# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria

## Desplazamiento de los polos en LC

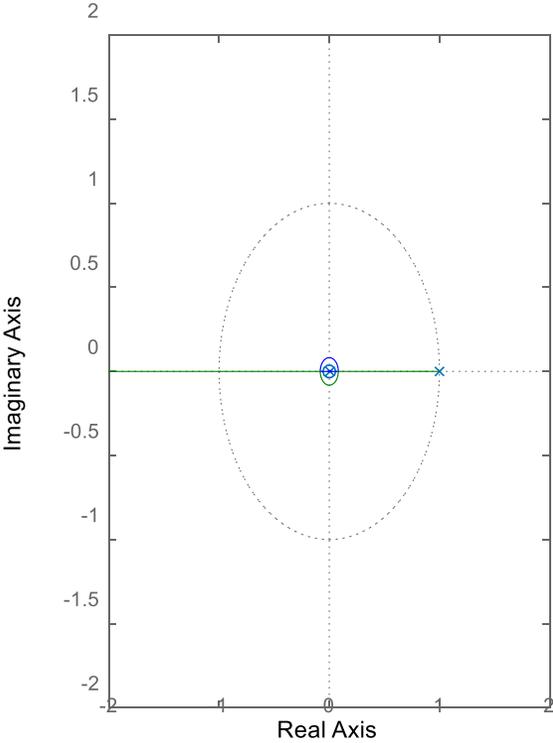
- Aumentar  $T$  aumenta el amortiguamiento relativo
  - Disminuye la estabilidad relativa
  - Afecta al sobrepaso
  - Tener 8-10 muestras
    - Por ciclo de oscilación (subamortiguado)
    - Durante el tiempo de levantamiento (sobreamortiguado)



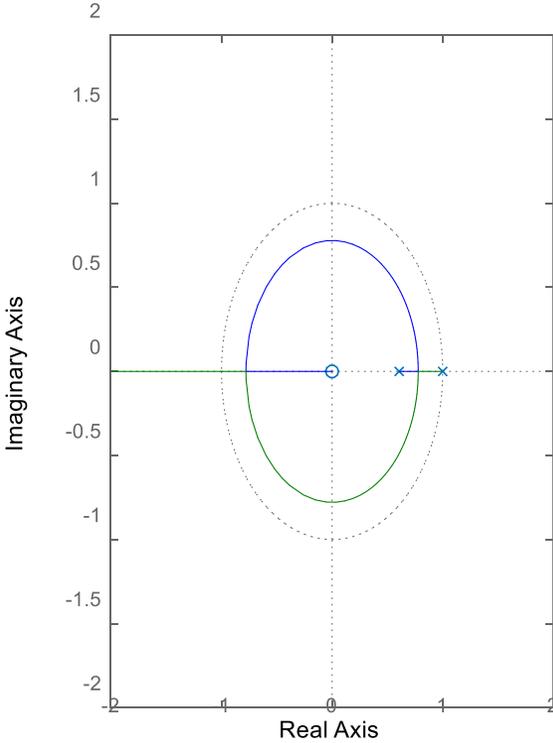
# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria

## Influencia en el LDR

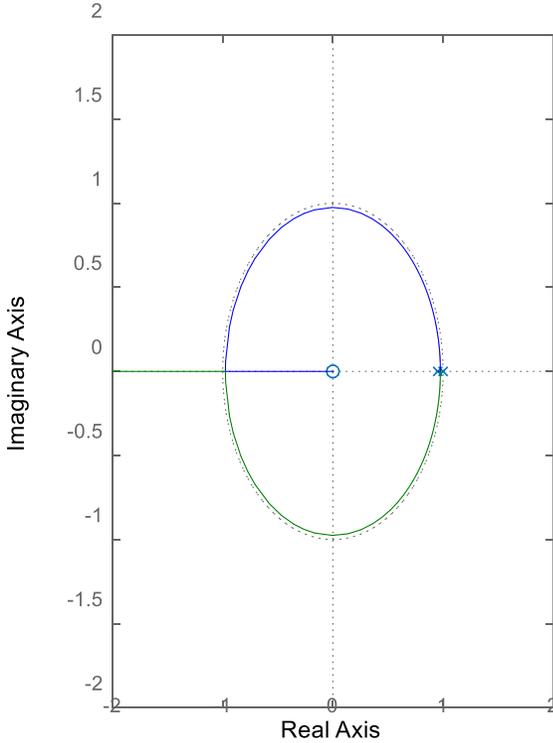
T = 5 seg.



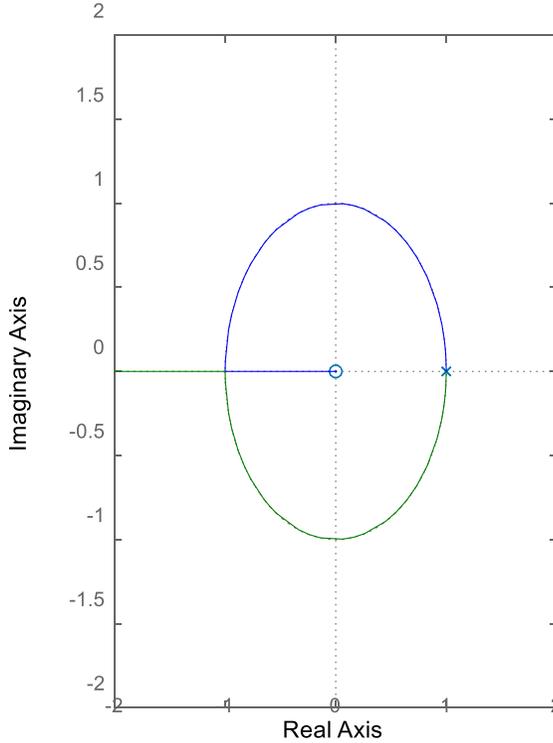
T = 0.5 seg.



T = 0.05 seg.

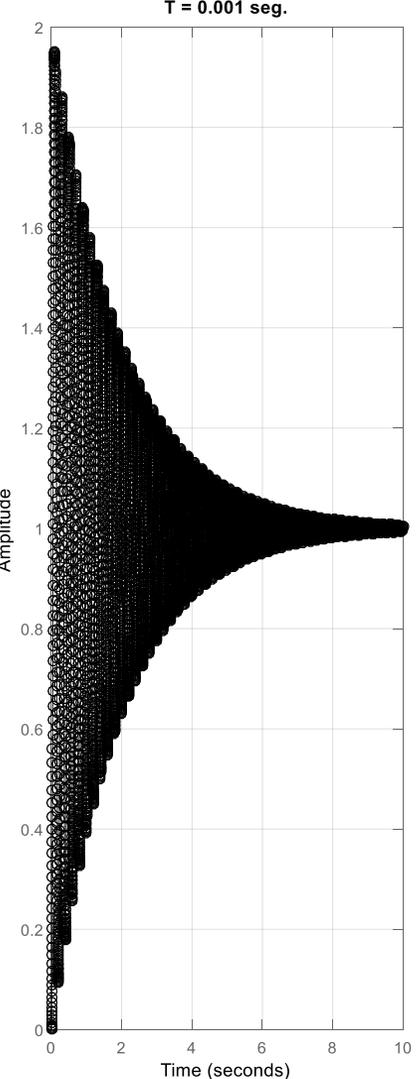
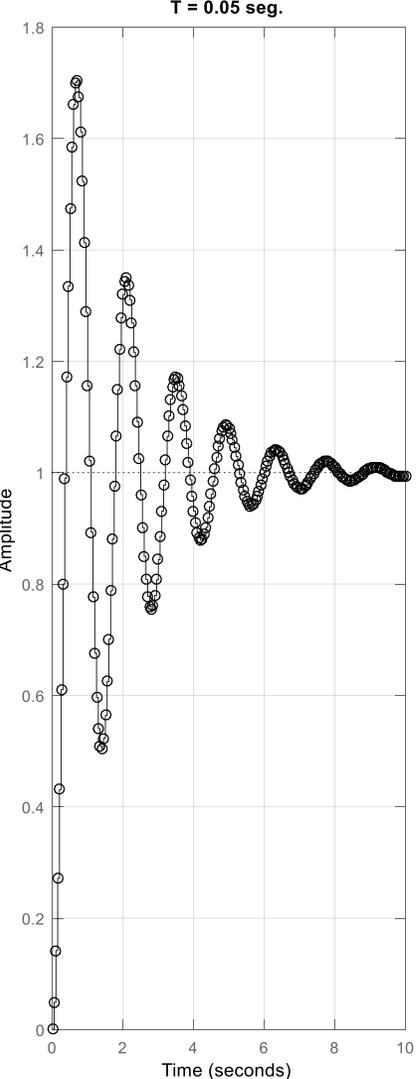
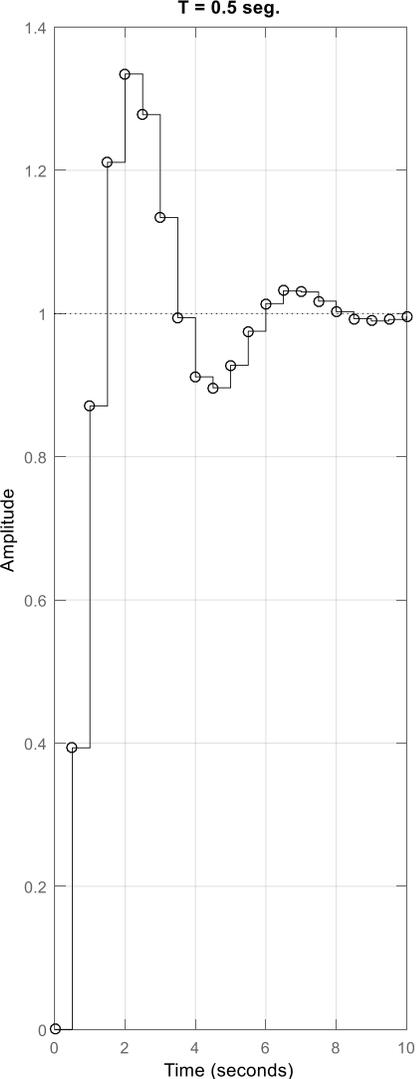
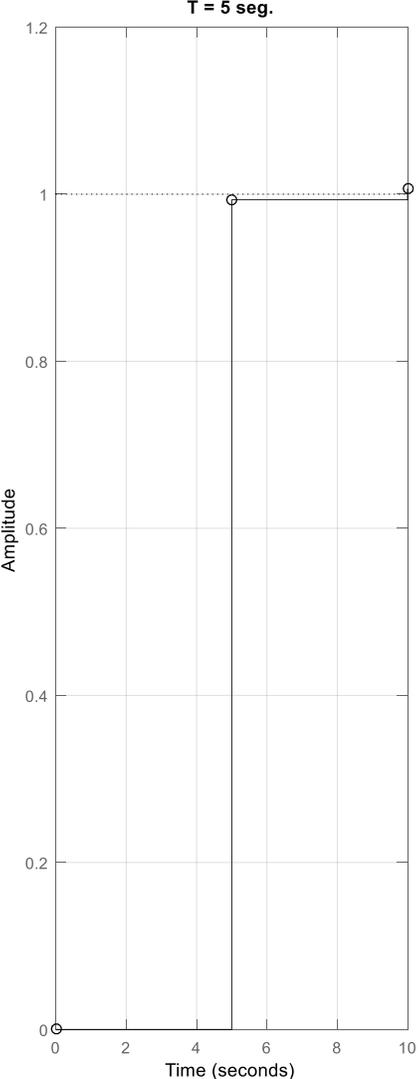


T = 0.001 seg.

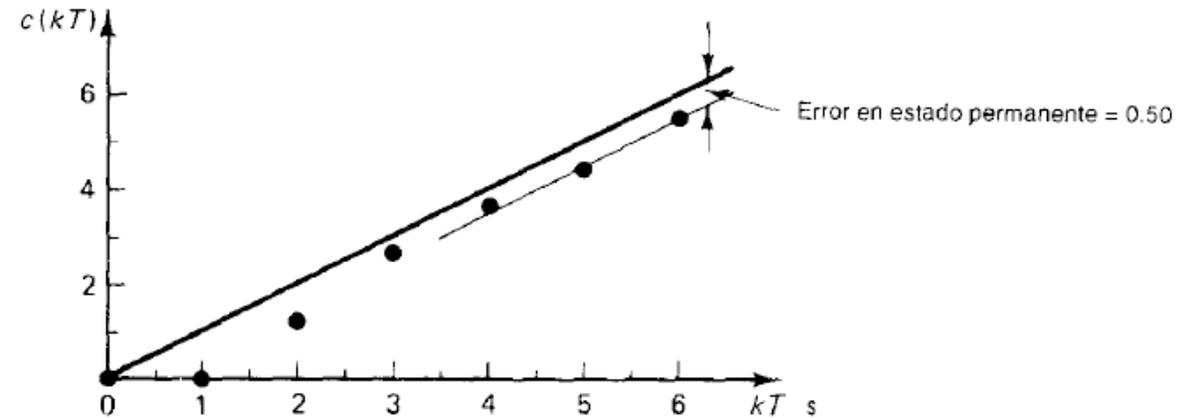
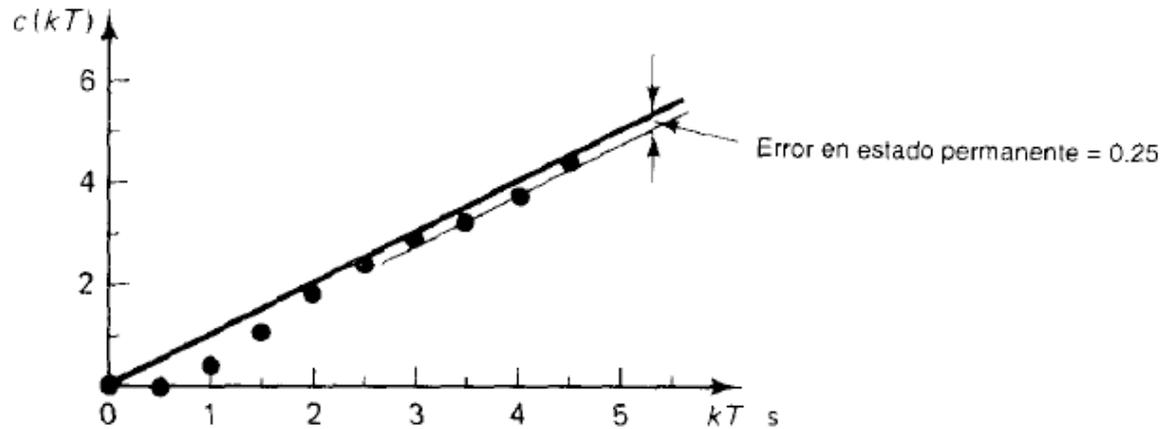


# Influencia del periodo de muestreo en la respuesta transitoria

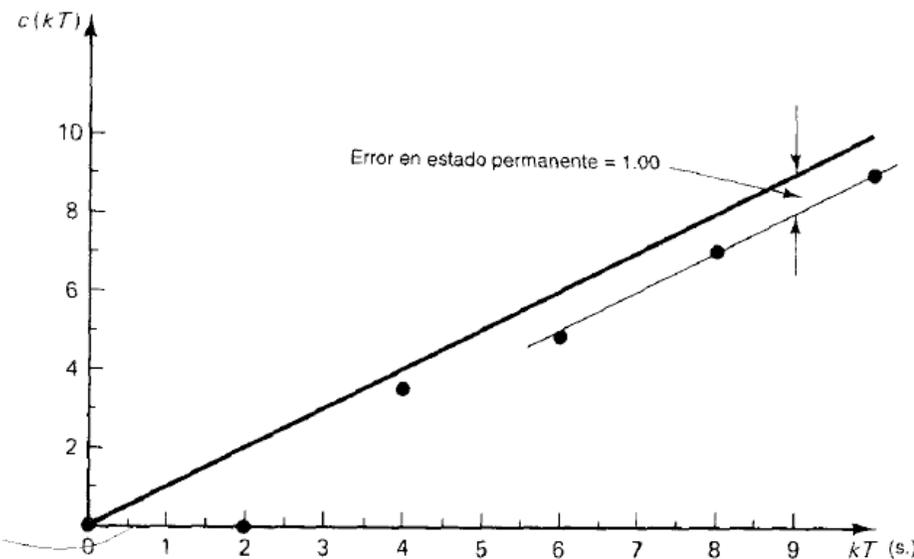
## Influencia en el LDR: desplazamiento de los polos en LC



- Aumentar  $T$  aumenta el error en régimen permanente



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

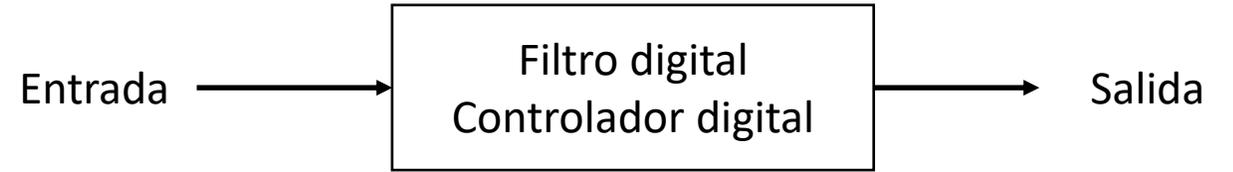


©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# Controladores y filtros digitales

## TEMA 4 (parte 1)

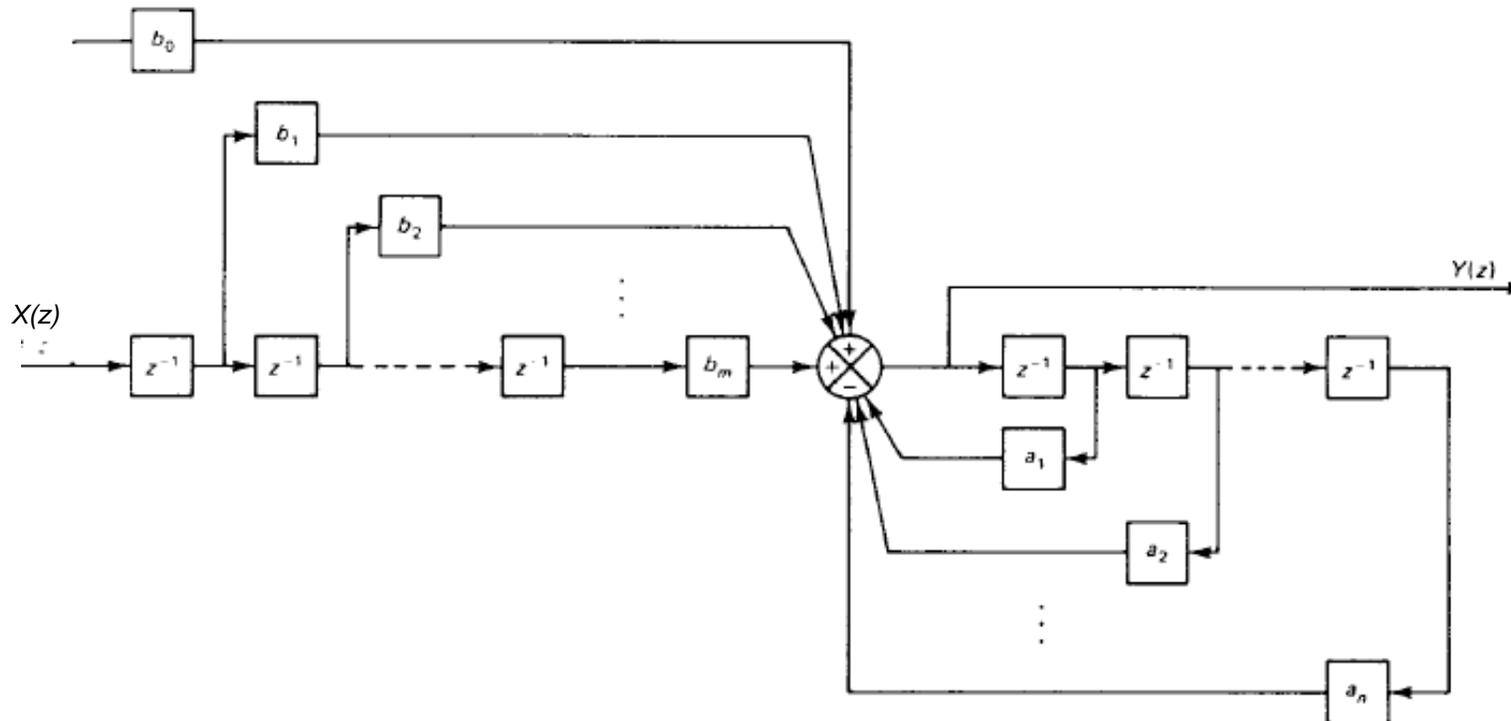
- Introducción.
- Topologías:
  - Programación directa
  - Programación estándar
  - Programación en serie
  - Programación en paralelo
  - Programación en escalera
- Filtros IIR y FIR.



- Estudio de controladores y filtros digitales
  - Mediante la Función de transferencia pulso
  - Realización física: HW, SW, HW+SW
- Determinar la configuración apropiada de operaciones aritméticas y de almacenamiento.
- En comunicaciones *vs* control: tiempo real.
- Programación de filtros/controladores digitales: diagramas de bloques.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad n \geq m$$

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots - a_n z^{-n} Y(z) + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z)$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Programación en estándar

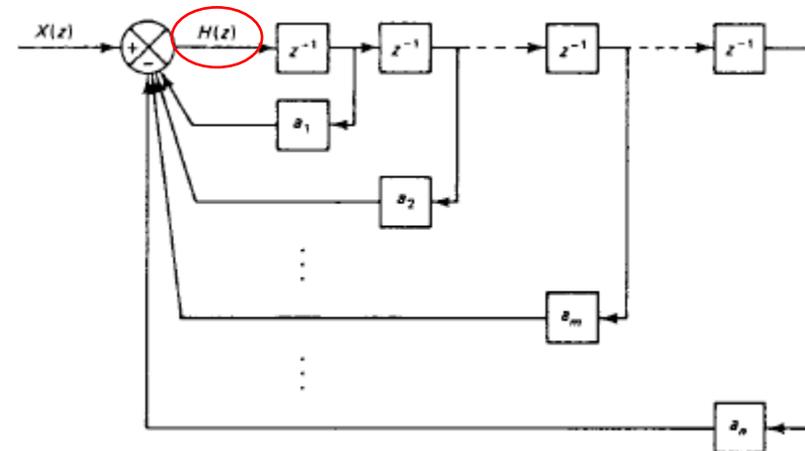
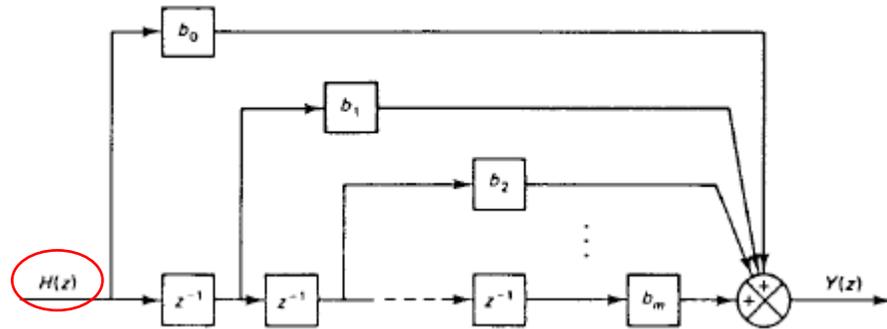
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)} \frac{H(z)}{X(z)} = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \dots + b_m z^{-m} H(z)$$

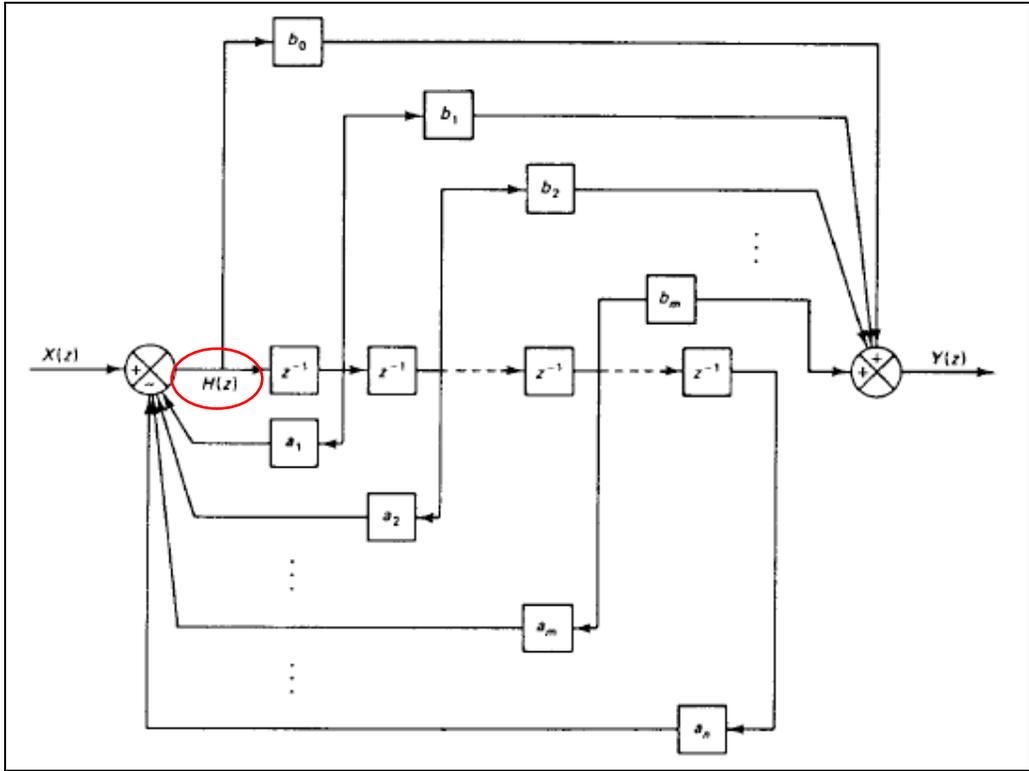
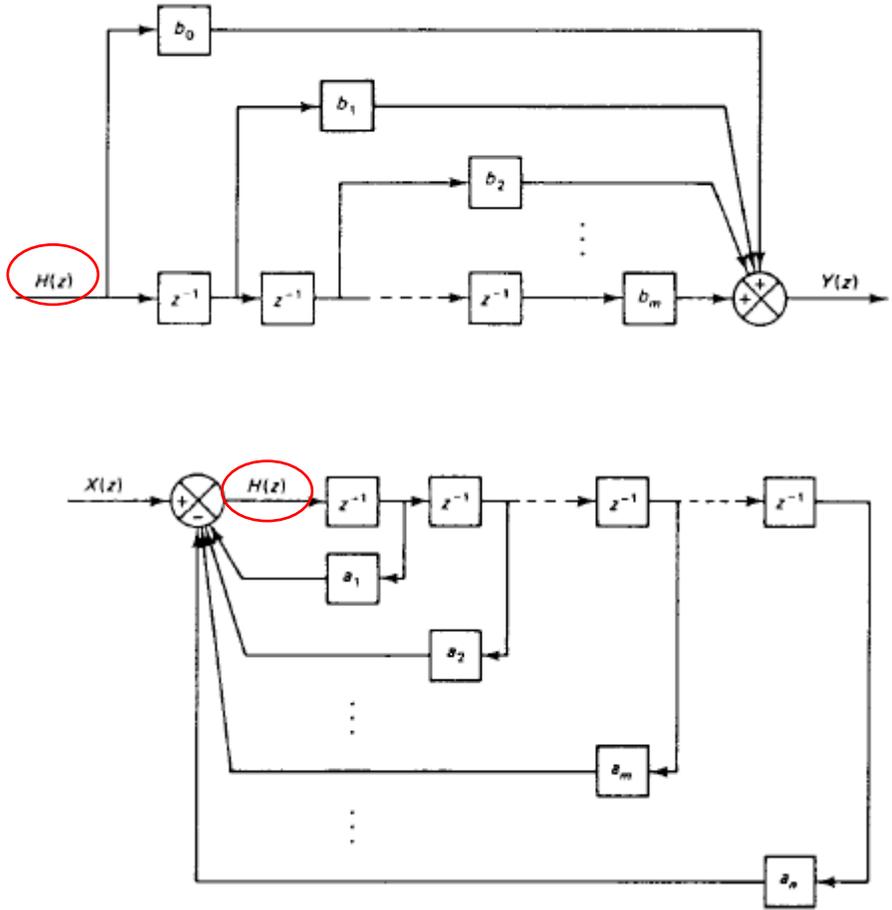
$$\frac{H(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$H(z) = X(z) - a_1 z^{-1} H(z) - a_2 z^{-2} H(z) - \dots - a_n z^{-n} H(z)$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Programación en estándar



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

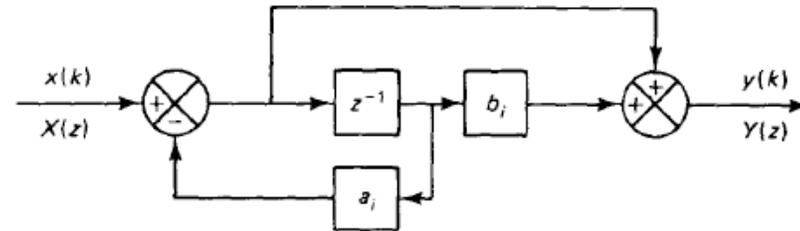
## Fuentes de error:

- Utilizar el menor número de elementos de retraso.
- Utilizar el mínimo de puntos suma.
- Error de cuantificación de la señal a la entrada.
- Error de acumulación de errores de redondeo.
- Error de cuantificación de los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$ :
  - Aumenta con el orden de la función de transferencia. En filtros de orden superior en programación directa pequeños errores en  $a_i$  y  $b_i$  dan grandes errores en las localizaciones de los polos/ceros del filtro.
    - Minimizar mediante la descomposición en filtros de menor orden: programación en **serie**, en **paralelo** y en **escalera**.

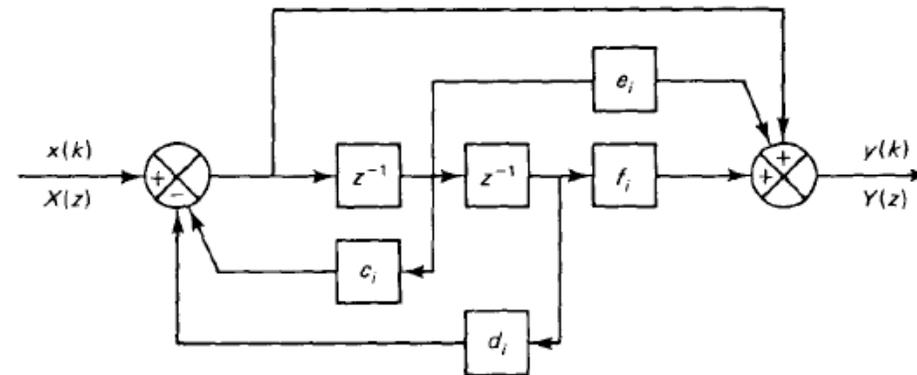
- Implementar  $G(z)$  como conexión en serie (multiplicación) de función de transferencia de 1er y 2o orden:

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot \dots \cdot G_p(z) = \prod_{i=1}^j \frac{1 + b_i \cdot z^{-1}}{1 + a_i \cdot z^{-1}} \cdot \prod_{i=j+1}^p \frac{1 + e_i \cdot z^{-1} + f_i \cdot z^{-2}}{1 + c_i \cdot z^{-1} + d_i \cdot z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_i \cdot z^{-1}}{1 + a_i \cdot z^{-1}}$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + e_i \cdot z^{-1} + f_i \cdot z^{-2}}{1 + c_i \cdot z^{-1} + d_i \cdot z^{-2}}$$



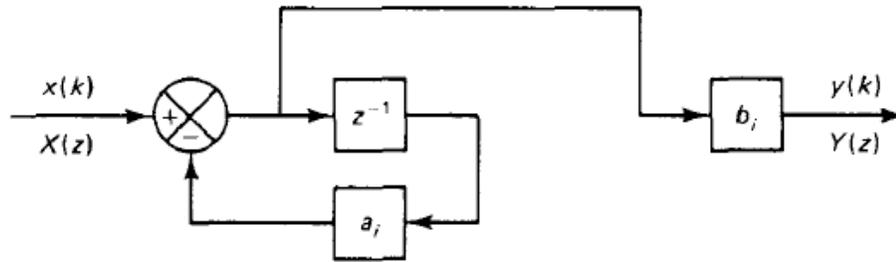
Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Programación en paralelo

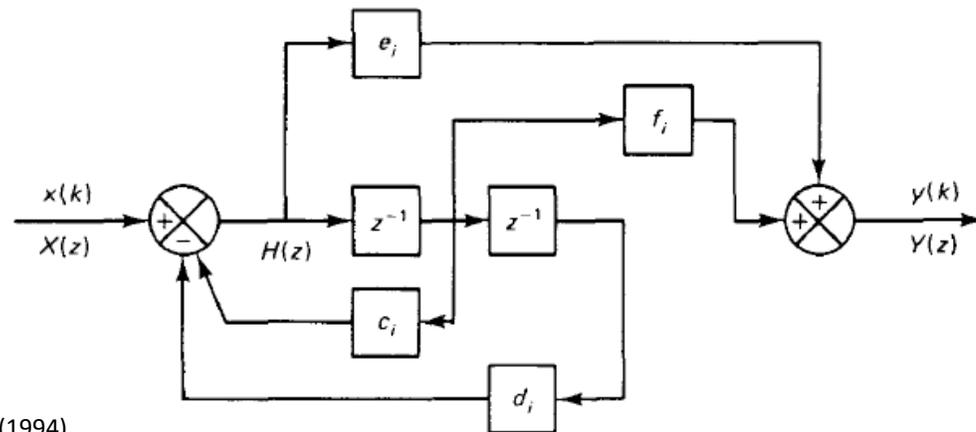
- Implementar  $G(z)$  como suma paralela de funciones de transferencia de 1er y 2o orden:

$$G(z) = A + G_1(z) + G_2(z) \dots + G_q(z) = A + \sum_{i=1}^j \frac{b_i}{1 + a_i \cdot z^{-1}} \cdot \sum_{i=j+1}^q \frac{e_i + f_i \cdot z^{-1}}{1 + c_i \cdot z^{-1} + d_i \cdot z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_i}{1 + a_i \cdot z^{-1}}$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{e_i + f_i \cdot z^{-1}}{1 + c_i \cdot z^{-1} + d_i \cdot z^{-2}}$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

## Programación en escalera

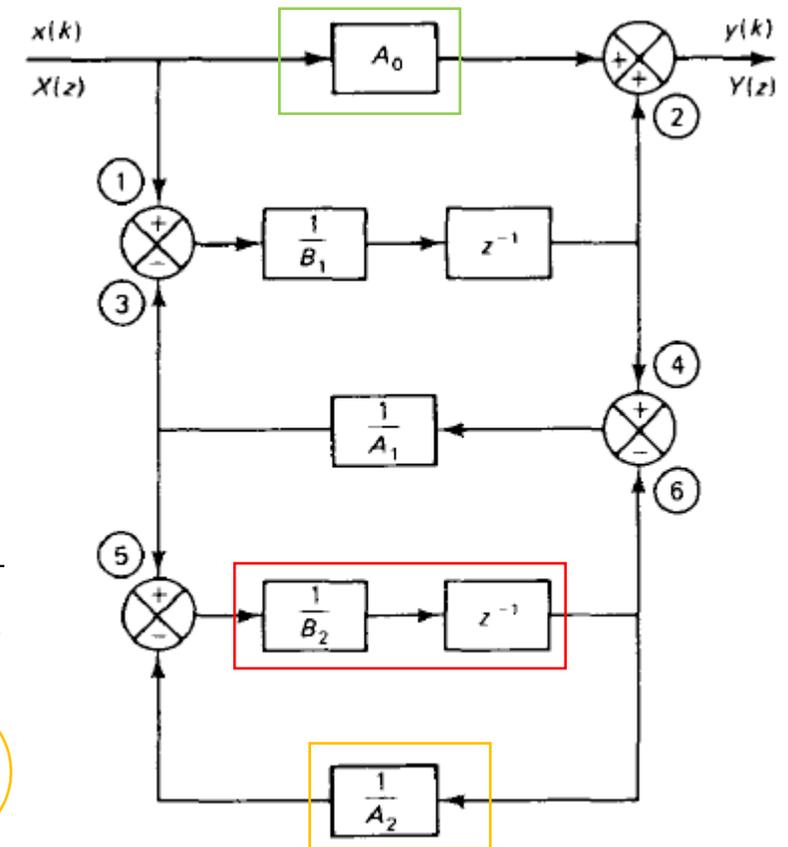
- Implementar  $G(z)$  como fracción continuada de la función de transferencia:

$$G(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 \cdot z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 \cdot z + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{A_{n-1} + \frac{1}{B_n \cdot z + \frac{1}{A_n}}}}}}$$

$$G(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 \cdot z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 \cdot z + \frac{1}{A_2}}}}$$

Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

- Caso  $n=2$ :



La diferenciación entre los filtros FIR e IIR se realiza en base a su respuesta al impulso (su secuencia de ponderación):

- **IIR:** *Filtro recursivo (programación directa)*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) \\ + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

- **FIR:** *Media móvil*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

- Respuesta de un sistema (filtro) al impulso ( $\delta$  de Kronecker):
- Truncamiento a los N primeros términos de la serie:

- Transformada Z: 
$$y_{kT} = \sum_{h=0}^k g(hT) x(kT - hT) = g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots + g(kT)x(0)$$

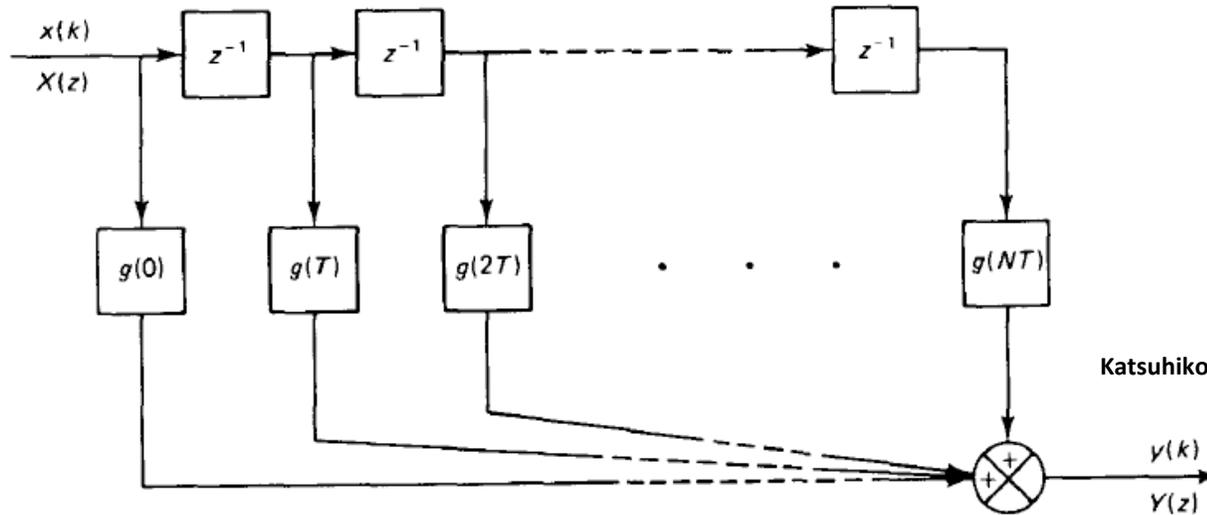
$$y_{kT} = \sum_{h=0}^N g(hT) x(kT - hT) = g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots + g(NT)x((k-N)T)$$

$$Y(Z) = g(0)X(Z) + g(T)z^{-1} \cdot X(Z) + \dots + g(NT)z^{-N} \cdot X(Z)$$

# Filtros de respuesta infinita y finita al impulso (IIR-FIR)

## Realización de un filtro FIR

$$Y(Z) = g(0)X(Z) + g(T)z^{-1} \cdot X(Z) + \dots + g(NT)z^{-N} \cdot X(Z)$$



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

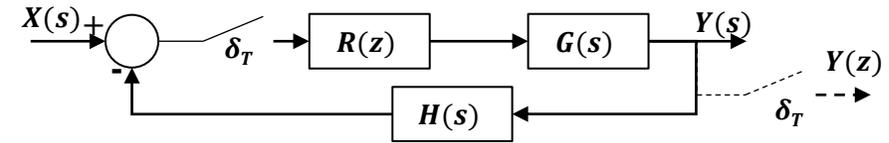
- **Ventajas:**
  - No recursivo: evita la acumulación de errores de la salida.
  - La programación directa es equivalente a la programación estándar.
  - La respuesta del filtro es siempre estable.
- **Desventaja:** Si hay componentes de alta frecuencia requieren más retardos

©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# Diseño de reguladores discretos: Lugar de las raíces

TEMA 4 (parte 2)

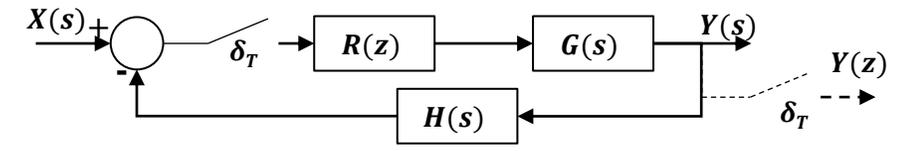
- Diseño de reguladores mediante el bosquejo del Lugar de las Raíces
  - Lugar de las raíces de sistemas discretos
  - Reglas de construcción
  - Diseño de controladores PID discretos



- En temas previos se ha comprobado la relación entre la respuesta en lazo cerrado de un sistema y los polos y ceros de la función de transferencia discreta.
  - La función de transferencia en lazo cerrado es:  $M(z) = \frac{R(z)G(z)}{1+R(z)GH(z)}$
  - La salida frente a una entrada normalizada escalón unitario es:  $Y(z) = M(z)X(z) = \frac{R(z)G(z)}{1+R(z)GH(z)} X(z)$
  - La salida en el dominio del tiempo  $y(kT) = Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1} \left[ \frac{R(z)G(z)}{1+R(z)GH(z)} X(z) \right]$
- Al resolver  $y(kT)$  mediante los métodos que proporcionan una solución cerrada (integral de inversión y/o descomposición en fracciones simples), se descompone  $Y(z)$  en una suma de términos sencillos (fracciones con polos simples, múltiples e irreducibles de 1er orden) que se identifican en la tabla de transformadas Z. Por tanto, la estructura de  $y(kT)$  depende de los polos de  $Y(z)$ , esto es, de las raíces del polinomio característico  $P(z) = 1 + R(z)GH(z)$

# Lugar de las raíces de sistemas discretos

## Introducción al LDR



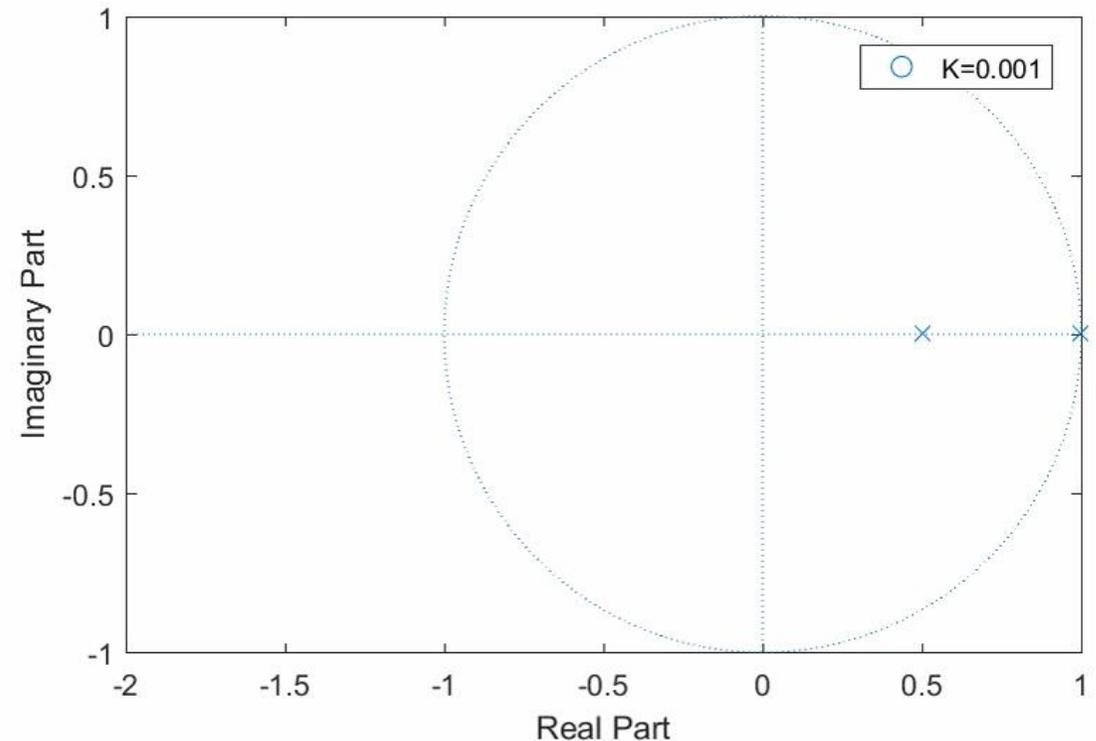
Suponiendo el regulador más sencillo posible (proporcional de ganancia  $R(z)=K$ ), la ecuación característica toma la forma:  $P(z) = 1 + KGH(z) = 0$

- $P(z)$  tiene infinitas soluciones en función del parámetro  $K \Leftrightarrow$  Hay infinitos polos en lazo cerrado
  - ¿Qué efectos tiene sobre las raíces de  $P(z)$  (polos de la función de transferencia en lazo cerrado) la variación de  $K$ ?
    - Estable, inestable, rapidez, sobreoscilación (amortiguamiento relativo, precisión...
  - ¿Cómo selecciono un valor de  $K$ ?
  - Grafico las raíces de  $P(z)$  dando valores a  $K$

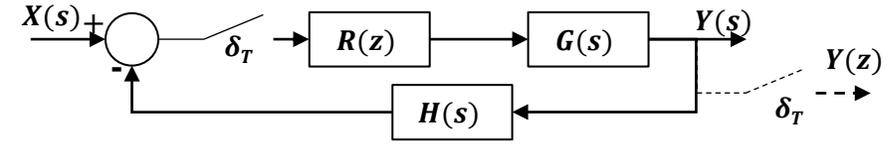
$$y(kT) = Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1} \left[ \frac{KG(z)}{1 + KGH(z)} X(z) \right]$$

## Lugar de las Raíces

$$P(z) = 1 + KGH(z) = 0$$



## Condición de módulo y argumento



- En el diseño de reguladores en el lugar de las raíces, el objetivo final es lograr que los polos en lazo cerrado deseados (respuesta del sistema en lazo cerrado) sean los que el diseñador quiere  $\Leftrightarrow$  Establecer una de las soluciones del polinomio característico.
- Para ello utilizamos una ecuación –el regulador  $R(z)$ – que nos permite manipular el comportamiento en lazo cerrado, a partir de la ubicación de los polos y ceros en lazo abierto  $\Leftrightarrow$  Modificar el Lugar de las Raíces.
- La metodología de construcción del LDR y de diseño del regulador es la misma que en el caso de los sistemas continuos, si bien los límites de estabilidad y las potenciales ubicaciones de los polos y ceros difieren (debido a la ecuación de transformación  $z = e^{Ts}$ ).

## Algoritmo de construcción del Lugar de las Raíces

- Operando con  $P(z)$ , se puede expresar de la siguiente manera:  $P(z) = 0 \Leftrightarrow K \cdot GH(z) = -1$
- Dado que  $GH(z)$  es (son) función de variable compleja  $z$ ,  $KGH(z)$  evaluado en  $z = z_k$  dará como resultado un número complejo, que debe valer  $-1 \pm j0$ , o en coordenadas polares  $1_{\pm 180(2k+1)}$ 
  - **Condición de magnitud:**  $|z| = 1$
  - **Condición de argumento:**  $\text{ang}[Z] \pm 180(2k + 1)$

## Condición de módulo y argumento

Factorizando el polinomio característico  $P(z) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)} = 0$

Operando se obtiene:  $\prod_{i=1}^M (z - z_i) + K \prod_{i=1}^N (z - p_i) = 0$  Resolviendo para  $K$ :  $K = -\frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$

- Si un punto  $z$  es solución de  $P(z)=0$ , entonces la ganancia  $K$  se obtiene a través de la relación entre el producto de las distancias del punto a los polos y los ceros (criterio del módulo):

$$K = \frac{\prod_{i=1}^M |z - p_i|}{\prod_{i=1}^N |z - z_i|}$$

- Si un punto  $z$  es solución de  $P(z)=0$ , entonces se verifica que la diferencia de ángulos entre los vectores polo y los vectores cero, para un valor dado de  $K$ , es  $180^\circ$  múltiplo (criterio del argumento):

$$\sum_{i=1}^N \angle(z - p_i) - \sum_{i=1}^M \angle(z - z_i) = \pm 180(2k + 1)$$

## Reglas de construcción

- Situar polos y ceros del Lazo Abierto sobre el plano  $z$ .
- Determinar las ramas del LDR:
  - Ramas = número de polos ( $n_p$ )
  - Ramas nacen en los polos ( $K=0$ ) y mueren en los ceros ( $K \rightarrow \infty$ ).
  - Los ceros pueden ser finitos o infinitos (asíntotas)  $\Rightarrow$  Habrá  $i = n_p - n_c$  asíntotas
- Determinar las ramas del LDR sobre el eje  $\text{Re}$ : un punto (de prueba) pertenece al LDR  $\Leftrightarrow$  deja a su derecha un número impar de polos y ceros
- Calcular el ángulo de las asíntotas:  $\theta_i = \frac{180(2k+1)}{n_p - n_c}, k = 0, 1, 2, \dots (n_p - n_c - 1)$
- Calcular el punto de corte de las asíntotas (centroide) sobre  $\text{Re}$ :  $\sigma = \frac{\sum_{j=1}^m p_j - \sum_{i=1}^n z_i}{n_p - n_c}$
- Calcular los puntos de ruptura (entrada/salida) resolviendo  $\frac{\partial K(z)}{\partial z} = 0$ 
  - Si el valor de  $K$  correspondiente a una raíz  $z = z_0$  de  $dK/dz = 0$  es positivo  $\Rightarrow z_0$  es punto de ruptura (también puede ubicarse en las ramas sobre  $\text{Re}$ )

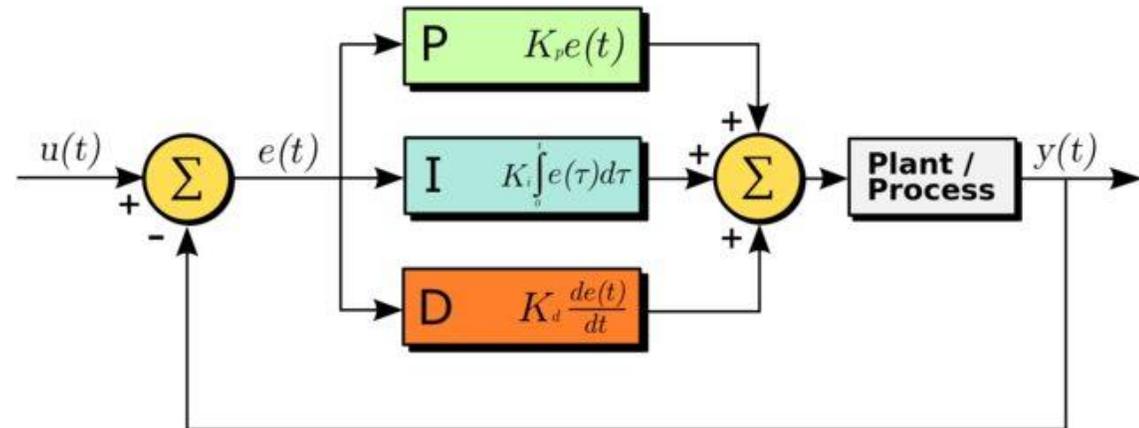
- Encontrar los puntos de corte del LDR con la circunferencia  $z=1 \Rightarrow$  aplicar el criterio de Routh-Hurwitz
  - Aplicar la transformación bilineal:  $P(z) \Rightarrow P(w)$
  - Buscar puntos de corte con el eje  $j\omega$
  - Deshacer el cambio de la transformación bilineal
- Encontrar puntos del corte del LDR con el eje  $\text{Im} \Rightarrow$  Aplicar el criterio de Routh-Hurwitz al polinomio característico  $P(z)$  (sin transformación bilineal, procedimiento análogo a sistemas continuos)
- Determinar el ángulo de salida (polo cc) o de llegada (cero cc) aplicando el criterio del argumento en las inmediaciones del polo/cero cc

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

## Reguladores PID

Un controlador PID es un tipo de regulador o compensador que aplica una señal de control  $u(t)$  a la planta que es una combinación lineal de acciones proporcional (P), integral (I) y derivada (D) de la señal de error  $e(t)$ :

$$u(t) = \underbrace{K_p e(t)}_{\text{Proportional}} + \underbrace{K_i \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{Integral}} + \underbrace{K_d \frac{d}{dt} e(t)}_{\text{Derivative}}$$



Tipos:

- Proporcional (P)
- Proporcional-derivada (PD)
- Proporcional-Integral (PI)
- Proporcional-Integral-Derivada (PID)

*“Más de la mitad de los controladores industriales que se utilizan hoy en día utilizan esquemas de control PID o PID modificado”*

OGATA: INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA, 5a. Ed (2010)

## Función de transferencia del controlador PID

El algoritmo de control PID en el dominio del tiempo es:

$$u(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(t)dt + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Tomando versiones discretas de la derivada y la integral:

- Acción integral:  $x(k) = K \left[ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{n=0}^k e(n) \right]$ 
  - Siendo su función de transferencia  $R_i(z) = K \frac{(2T_i+T)z-(2T_i-T)}{2T_i(z-1)} = K_I \frac{z-b}{z-1}$  donde  $b = \frac{2T_i-T}{2T_i+T}$
  - La introducción del polo en  $z = 1$  aumenta el tipo del sistema
- Acción derivativa:  $x(k) = K \left[ e(k) + T_d \frac{e(k)-e(k-1)}{T} \right]$ 
  - Siendo su función de transferencia  $R_d(z) = \frac{K}{z} \left[ \frac{T+T_d}{T} z - \frac{T_d}{T} \right] = K_D \frac{z-a}{z}$  donde  $a = \frac{T_d}{T+T_d} < 1$
  - La acción derivativa se sitúa en el semiplano derecho ( $z = 1$ )

## Regulador PID discreto

- Proporcional:  $R(z) = K_P$
- Derivativa:  $R(z) = K_D \frac{z-a}{z}$  con  $0 < a < 1$ 
  - La acción derivativa se sitúa en el semiplano derecho ( $z = 1$ )
- Integral:  $R(z) = K_I \frac{z-b}{z-1}$ 
  - La acción integral está dada por el polo en  $z = 1$
  - El cero en  $z=b$  se usa para compensar el *exceso de ángulo introducido por la acción integral*
  - La introducción del polo en  $z = 1$  aumenta el tipo del sistema
- PID:  $R(z) = K \frac{(z-a)(z-b)}{z-1}$

La discretización de un regulador PID continuo por los métodos estudiados (retenedor, Euler, Tustin, equivalencia polo-cero) pueden dar lugar a ecuaciones ligeramente diferentes a las de los reguladores discretos.

El procedimiento de diseño del regulador trata de lograr cumplir los requisitos establecidos por el problema:

- **Régimen transitorio**: especificados a partir de la respuesta deseada a una entrada normalizada conocida (secuencia escalón); sobrepaso, intervalo de subida, intervalo de pico, intervalo de establecimiento...
  - Polos en lazo cerrado (dominantes)
- **Régimen estacionario**: lograr una determinada magnitud en el error en régimen estacionario.
  - Ganancia del regulador, **tipo del sistema** en lazo directo...

$$R(z) = K_d \frac{z^{-a}}{z} \text{ con } 0 < a < 1$$

Se trata de lograr que los polos en lazo cerrado sean los que codifican la respuesta deseada.

- ¿El LDR de la planta (sistema) incluye a esos polos en lazo cerrado? ¿Los polos en lazo cerrado son una de las posibles soluciones del polinomio característico?
  - **Sí** => ¿Para qué valor de  $K_R$ ? Se resuelve la ecuación característica  $P(z)$  utilizando como  $z$  los polos en lazo cerrado. Una manera sencilla de hacerlo es aplicar el criterio del módulo:

$$K_R \cdot K_{LA} = \frac{\prod \text{Distancia Polos LC} - \text{Polos LA}}{\prod \text{Distancia Polos LC} - \text{Ceros LA}}$$

- **No** => Hay que modificar el LDR para lograr que los polos en lazo cerrado son una de las posibles soluciones del polinomio característico. Las modificaciones a la geometría del LDR se realizan introduciendo polos/ceros en el lazo directo del sistema, dentro de  $R(z)$ . La introducción de polos/ceros se realiza utilizando la estructura del regulador. Siempre se parte de la acción derivativa (adición de un cero ajustable)
  - Para ubicar el cero del regulador (acción derivativa) se utiliza el criterio del módulo: *Un punto (los polos en lazo cerrado deseados) pertenece al LDR si cumple la condición de argumento. Al añadir un polo en el origen y un cero ajustable ( $a$ ), se ubica  $a$  para lograr cumplir el criterio del argumento.*
  - Tras ajustar el cero, el LDR ya incluye a los polos en lazo cerrado deseados => ¿Para qué valor de  $K_R$ ?

$$R(z) = K_i \frac{z - b}{z - 1}$$

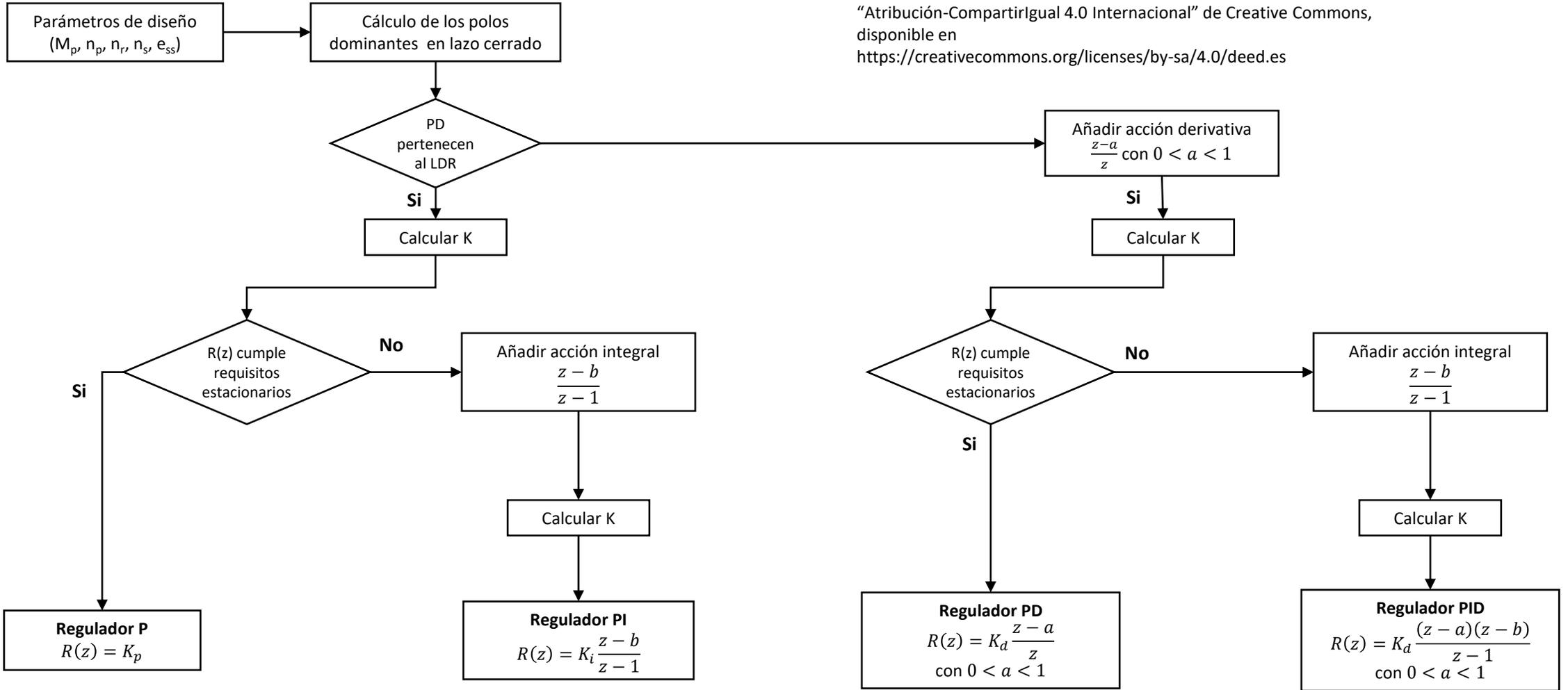
## Requisitos estacionarios

- Una vez que se ha logrado ajustar el regulador para que cumpla los criterios transitorios, se comprueban los requisitos estacionarios: Error en estado estacionario o precisión.
- Si el sistema no cumple, dado que no es aconsejable aumentar la ganancia (alteraríamos la respuesta transitoria sin lograr un gran cambio en el error), se debe estudiar el tipo del sistema. Habitualmente se debe aumentar el tipo del sistema => introducir un integrador en el lazo directo: Acción integral en el regulador.
- Al introducir un polo adicional en  $z=1$ , se altera el balance del criterio del argumento (recordemos que estaba ajustado mediante el cero en  $z=a$ ) Por tanto, para volver a equilibrarlo se introduce un cero que “compense” el ángulo introducido por el integrador. Se compensaría totalmente si el polo aporta el mismo ángulo que el polo en  $z=1$ , pero se anularían. Para ello, el cero se ubica lo más cercano al integrador pero sin anularlo. Como criterio general, a  $1/6$  de la distancia entre el círculo unitario y los PD, medido desde  $z=1$  (una diferencia de ángulo de no más de  $5^\circ$ )

# Diseño de reguladores PID discretos

## Algoritmo de diseño

©2022 Autores Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
 Algunos derechos reservados  
 Este documento se distribuye bajo la licencia  
 "Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
 disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>



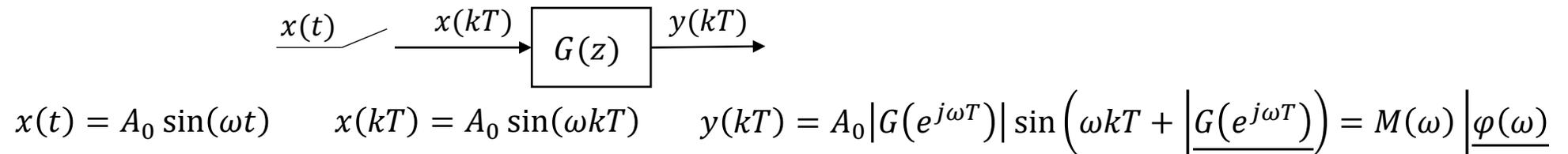
# Respuesta en frecuencia

TEMA 4 (parte 3)

- Respuesta en frecuencia de sistemas discretos
- Diagramas de Bode de sistemas discretos
- Diseño de reguladores mediante la respuesta en frecuencia
  - Compensación de Adelanto de Fase
  - Compensación de Retraso de Fase
  - Consideraciones

$$\left. \begin{array}{l} G(s = 0 + j\omega) \\ z = e^{Ts} = e^{(\sigma + j\omega)T} \end{array} \right\} G(e^{j\omega T})$$

- La respuesta en frecuencia se obtiene estudiando la salida cuando la entrada es una función senoidal de frecuencia creciente ( $G(z)$  se supone estable)



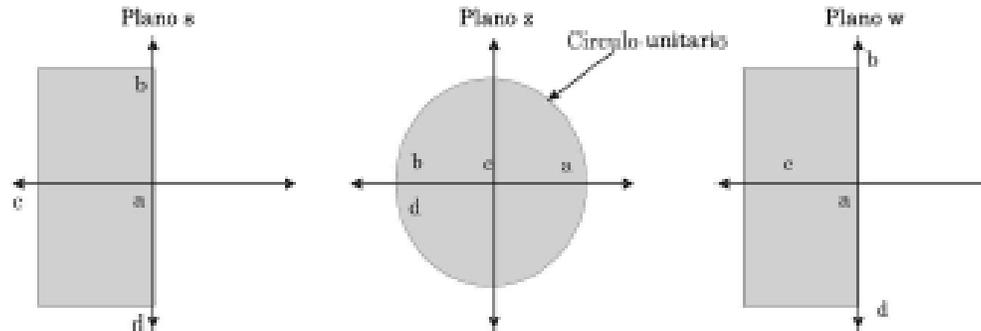
$$x(t) = A_0 \sin(\omega t) \quad x(kT) = A_0 \sin(\omega kT) \quad y(kT) = A_0 |G(e^{j\omega T})| \sin\left(\omega kT + \angle G(e^{j\omega T})\right) = M(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

- Cuando la entrada es una secuencia senoidal de frecuencia  $\omega$ , la respuesta en régimen permanente es una secuencia senoidal
  - De la misma frecuencia  $\omega$  que la secuencia de entrada
  - La misma amplitud que la secuencia de entrada afectada por el módulo de la FDTP, que depende a su vez de  $\omega$
  - Desfase que depende de la frecuencia  $\omega$
- La función  $G(e^{j\omega T})$  que define la amplitud y el desfase de la secuencia de salida => Función de transferencia pulso senoidal del sistema discreto
  - $G(e^{j\omega T})$  es periódica con periodo T:  $e^{j(\omega + (2\pi/T))T} = e^{j\omega T} e^{j2\pi} = e^{j\omega T}$

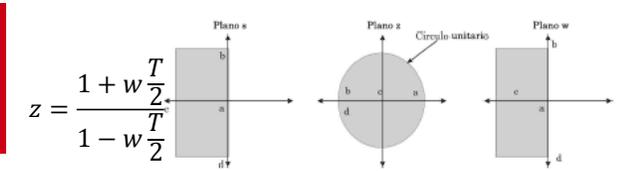
# Respuesta en frecuencia de sistemas discretos

- Como en el plano  $z$  la frecuencia aparece en la forma  $z = e^{j\omega T}$  si se intenta trazar la respuesta en frecuencia se confundirían con las trazas logarítmicas  $\Leftrightarrow$  no se puede utilizar con facilidad para la caracterización y el diseño de reguladores (p.ej. redes de compensación sobre el LDR)
- Se utiliza la transformación bilineal, que hace corresponder el interior del círculo unitario con el semiplano izquierdo del plano  $w$ :

$$z = \frac{1 + w \frac{T}{2}}{1 - w \frac{T}{2}}$$

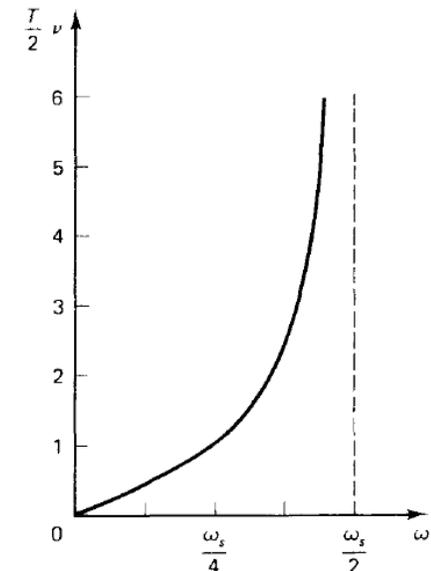


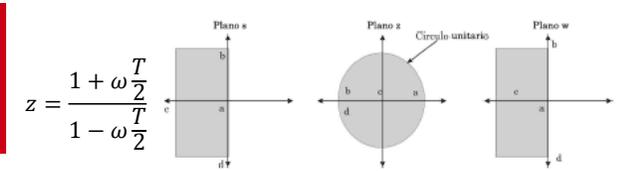
- Con la transformación bilineal se consigue que los planos  $s$  y  $w$  sean similares sobre las regiones de interés
  - No debe olvidarse que el círculo unitario sólo incluye la franja primaria del semiplano negativo  $s$ , que se transforma en todo el semiplano negativo  $w$
  - La respuesta en el plano  $s$  en el intervalo  $\left(-\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}\right)$  corresponde al intervalo  $(-\infty \leq v \leq \infty)$  en el plano  $w$ , donde  $v$  es la frecuencia ficticia (eje Im del plano  $w$ )  $\Rightarrow$  Las características de la respuesta del controlador/red/filtro analógico (intervalo infinito) serán reproducidas por el controlador/red/filtro digital en un intervalo finito.



Si bien con la transformación bilineal se consigue que los planos  $s$  y  $w$  sean similares sobre las regiones de interés, existen algunas diferencias entre los planos  $s$  y  $w$ :

- No debe olvidarse que el círculo unitario sólo incluye la franja primaria del semiplano negativo  $s$ , que se transforma en todo el semiplano negativo  $w$ 
  - La respuesta en el plano  $s$  en el intervalo  $\left(-\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}\right)$  corresponde al intervalo  $(-\infty \leq \nu \leq \infty)$  en el plano  $w$ , donde  $\nu$  es la frecuencia ficticia => Las características de la respuesta del controlador/red/filtro analógico (intervalo infinito) serán reproducidas por el controlador/red/filtro digital en un intervalo finito.
- El eje de frecuencias en el plano  $w$  ( $j\nu$ ) está distorsionado respecto al eje de frecuencias del plano  $s$  ( $j\omega$ ). Ambas frecuencias están relacionadas mediante la siguiente ecuación:  $\nu = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$ 
  - Esta relación confirma el resultado anterior, en el que al variar la frecuencia (real  $\omega$ ) en el plano  $s$  desde  $\left(-\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}\right)$ , la frecuencia ficticia varía en el intervalo  $(-\infty \leq \nu \leq \infty)$
  - Con esta relación se puede “traducir” los requerimientos entre los dominios frecuenciales continuos y discretos en términos de la frecuencia (ancho de banda, frecuencia de cruce de ganancias, frecuencias esquina, etc.)
  - Debe observarse que, para valores de  $\omega T$  pequeños, la frecuencia ficticia y la real son aproximadamente iguales:  $\nu \cong \omega$





Debe tenerse en cuenta que, si bien  $G(z)$  está representada en forma de fracción propia (grado de denominador  $\geq$  grado de numerador  $\Leftrightarrow n_p \geq n_z$ ), la transformación bilineal puede dar lugar a una  $G(w)$  que puede ser o no fracción propia, y puede o no tener todos los coeficientes.

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \Rightarrow z = \frac{1 + w \frac{T}{2}}{1 - w \frac{T}{2}} \Rightarrow G(w) = \frac{\beta_r w^r + \beta_{r-1} w^{r-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_l w^l + \alpha_{l-1} w^{l-1} + \dots + \alpha_0}$$

En cualquier caso,  $G(jv)$  es una función racional de variable frecuencial  $v$  a la que es de aplicación

- Bosquejo asintótico de los diagramas de Bode
- Criterio de estabilidad de Nyquist
- Obtención e interpretación de los márgenes de ganancia y de fase.

- Obtener  $G(w)$  a partir de  $G(z)$  mediante la transformación bilineal  $z = \frac{1+w\frac{T}{2}}{1-w\frac{T}{2}}$
- Representar el diagrama de Bode (Magnitud y Fase) de  $G(jv)$  donde  $v$  es la frecuencia ficticia, utilizando la misma metodología asintótica que para los sistemas continuos:
  - Se parte necesita la función de transferencia  $G(jv)$  del sistema factorizada en términos simples (factorizada en productos de: ganancia constante, polos y ceros (1º y 2º orden)).

$$G(s) = \frac{k(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0)}{(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)}$$

$$= \frac{k(s+n_1)(s+n_2)\dots(s+n_r)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)\dots}{s^n (s+d_1)(s+d_2)\dots(s+d_t)(s^2 + 2\xi_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(s^2 + 2\xi_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)\dots}$$

- La definición del módulo y la fase de  $G(jv)$  (log y arg) permite que “los productos y cocientes de números complejos se transformen en sumas (con su signo) de logaritmos de módulos y en sumas (con su signo) de argumentos”.
- Ello permite trazar inicialmente la gráfica de cada término simple por separado. El diagrama de Bode completo se obtiene por la composición algebraica (suma con su signo) de cada uno de los términos del sumatorio

$$20 \log |G(jw)| = 20 \log |K| + \sum_{d=1}^D 20 \log \left| 1 + \frac{jw}{z_d} \right| + \sum_{q=1}^Q 20 \log \left| 1 + \frac{2\delta_q}{w_{nq}} \cdot jw + \left( \frac{jw}{w_{nq}} \right)^2 \right|$$

$$- 20n \log |jw| - \sum_{m=1}^M 20 \log \left| 1 + \frac{jw}{p_m} \right| - \sum_{i=1}^I 20 \log \left| 1 + \frac{2\delta_i}{w_{ni}} \cdot jw + \left( \frac{jw}{w_{ni}} \right)^2 \right|$$

Los distintos tipos de términos que podemos tener en  $G(j\nu)$  son:

- Términos de ganancia constante:  $K$
- Términos integrales o derivativos:  $(j\nu)^{\pm 1}$
- Términos de primer orden:  $(j\nu + a)^{\pm 1}$
- Términos de segundo orden o cuadráticos:  $((j\nu)^2 + 2\xi\omega_n j\nu + \omega_n^2)^{\pm 1}$

Cada término simple tiene una determinada configuración de asíntotas en magnitud y fase, en función de las frecuencias esquina (posición de los polos/ceros:  $a, \omega_n$ )

# Diagramas de Bode de sistemas discretos

Configuración de asíntotas en magnitud y fase de los términos simples de  $G(j\omega)$

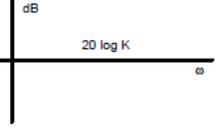
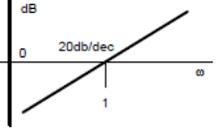
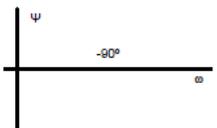
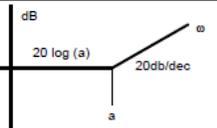
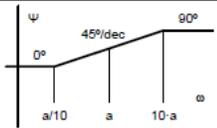
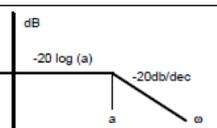
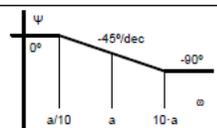
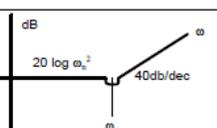
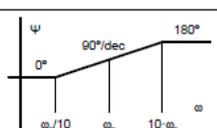
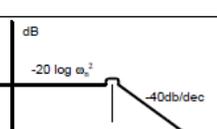
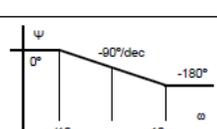
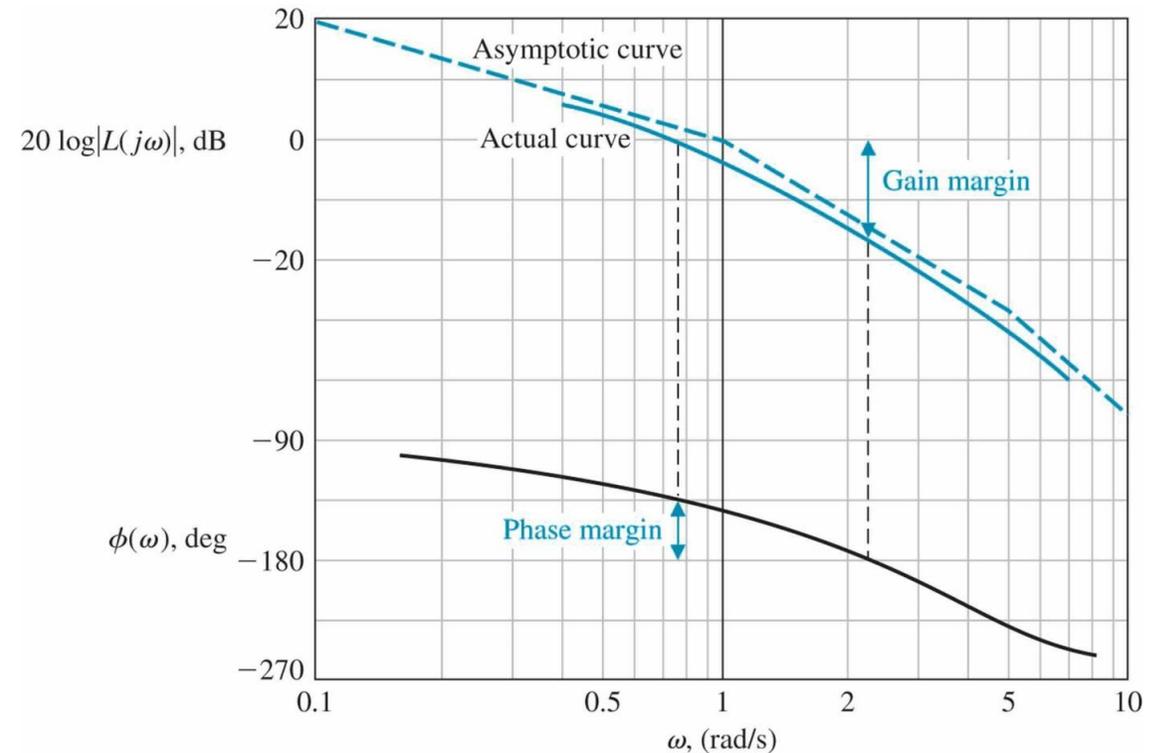
Términos	$A = 20 \log_{10}  A(j\omega) $	Comentarios	$\varphi = \arg[A(j\omega)]$	Comentarios	Otros
Ganancia $K$		Valor constante $20 \cdot \log_{10}(K)$		Valor constante $0^\circ$	Si $K < 0$ Fase = $180^\circ$
Cero en el origen $s^n$		Pendiente 20dB/dec $A = 0[dB]$ en $\omega = 1$		Valor constante $90^\circ$	Si $n > 1$ la fase y la amplitud se multiplican por $n$ para todos los casos.
Polo en el origen $1/s^n$		Pendiente -20dB/dec $A = 0[dB]$ en $\omega = 1$		Valor constante $-90^\circ$	
Cero simple $(s + a)^n$		$20 \cdot \log(a) \quad \forall \omega \leq a$ Pendiente 20dB/dec $\forall \omega > a$		$(0, a/10) \quad 0^\circ$ $(a/10, 10a) \quad 45^\circ/\text{dec}$ $(10a, \infty) \quad 90^\circ$	Para $\omega = a$ $\psi = 45^\circ$
Polo simple $1/(s + a)^n$		$-20 \cdot \log(a) \quad \forall \omega \leq a$ Pendiente -20dB/dec $\forall \omega > a$		$(0, a/10) \quad 0^\circ$ $(a/10, 10a) \quad -45^\circ/\text{dec}$ $(10a, \infty) \quad -90^\circ$	Para $\omega = a$ $\psi = -45^\circ$
Cero complejo conjugado $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$		$20 \cdot \log \omega_n^2 \quad \forall \omega \leq \omega_n$ Pendiente 40dB/dec $\forall \omega > \omega_n$		$(0, \omega_n/10) \quad 0^\circ$ $(\omega_n/10, 10\omega_n) \quad 90^\circ/\text{dec}$ $(10\omega_n, \infty) \quad 180^\circ$	Siendo $(s + a)^2 + b^2$ con amort. $\xi = \tan \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; - La frec. de resonancia
Polo complejo conjugado $1/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$		$-20 \cdot \log \omega_n^2 \quad \forall \omega \leq \omega_n$ Pendiente -40dB/dec $\forall \omega > \omega_n$		$(0, \omega_n/10) \quad 0^\circ$ $(\omega_n/10, 10\omega_n) \quad -90^\circ/\text{dec}$ $(10\omega_n, \infty) \quad -180^\circ$	- El pico de res. en dB $M_r = \frac{1}{2\xi\omega_n^2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$

Tabla I. Aportación de pendiente de cada término en el diagrama de Módulos y en el de Argumentos.

# Diagramas de Bode de sistemas discretos

## Márgenes de fase y de ganancia

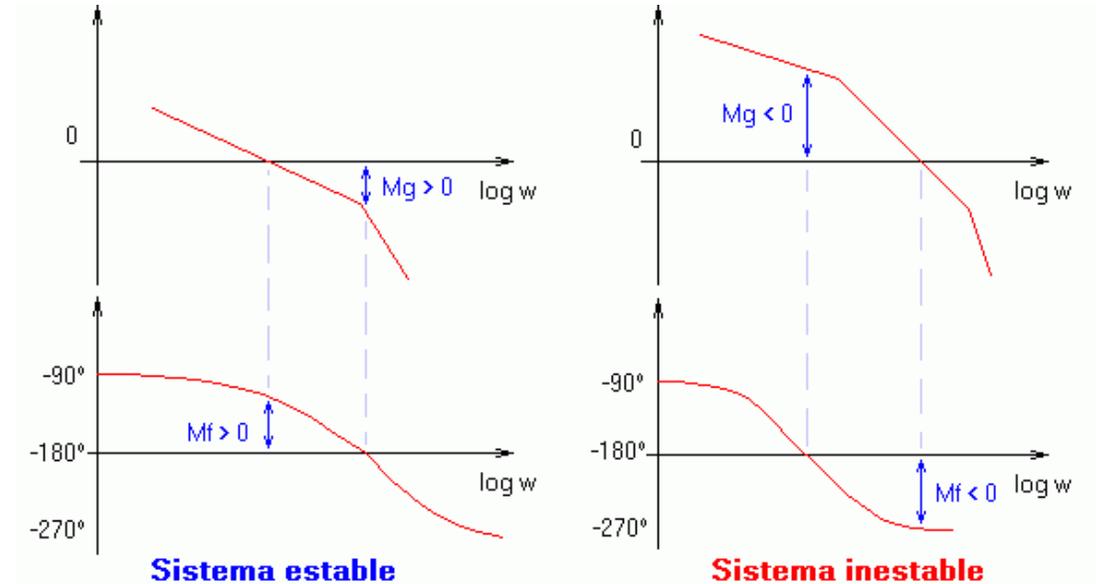
- **MARGEN DE GANANCIA (MG):** Es el valor por el que habría que multiplicar (o los dB que habría que sumar) a ganancia para alcanzar el valor de 1 (0 dB) cuando la fase es de  $-180^\circ$ .
  - Si la curva de fase no corta nunca el valor de  $-180^\circ$  el margen de ganancia será infinito
- **MARGEN DE FASE (MF):** Es el ángulo (en grados) que habría que restarle a la fase para alcanzar los  $-180^\circ$  cuando la ganancia es 1 (0 dB).
  - Si la curva de ganancia es siempre inferior a 0 dB el margen de fase será infinito.



# Diagramas de Bode de sistemas discretos

## Márgenes de fase y de ganancia

- MG y MF permiten conocer la estabilidad relativa (o márgenes hasta la inestabilidad) de un sistema de control a partir de su diagrama de Bode.
- Para sistemas de fase mínima, si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo abierto  $G(w)H(w)$  presenta frecuencias en las que la ganancia es positiva y a la vez la fase tiene un valor entre  $-180^\circ$  y  $-360^\circ$ , el sistema en lazo cerrado  $M(s)$  realimentado negativamente será inestable  $\Rightarrow$  Un margen de ganancia y de fase negativo indica inestabilidad



Si	$MG > 0$	y	$MF > 0$	Estable
Si	$MG > 0$	y	$MF < 0$	Dudoso
Si	$MG < 0$	y	$MF > 0$	Dudoso
Si	$MG < 0$	y	$MF < 0$	Inestable

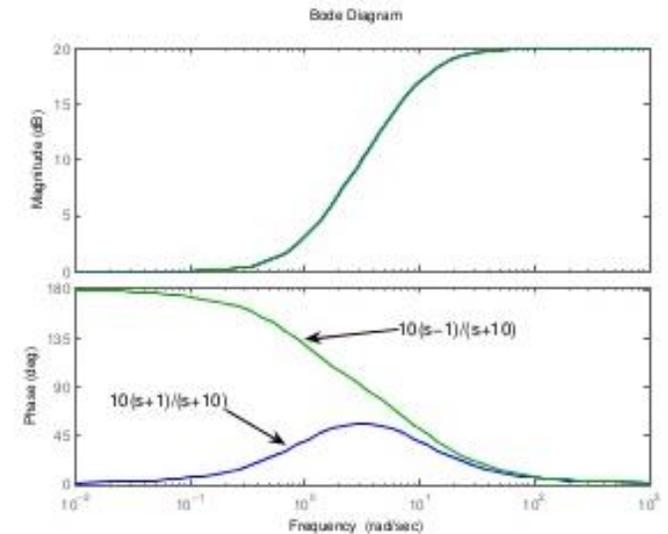
# Diagramas de Bode de sistemas discretos

## Sistemas de fase mínima y no mínima

- Sistema de fase mínima: todos sus polos y sus ceros están en el semiplano izquierdo del plano  $w$
- Sistema de fase **no** mínima: tiene algún cero o polo en el semiplano derecho
- Ambos tipos de sistemas tienen el mismo diagrama de Bode de ganancia pero no de fase. En un sistema de fase mínima, el rango de variación del ángulo de fase es el más pequeño de entre todos los sistemas de ese tipo.

$$G_1(w) = \frac{10(w+1)}{(w+10)} \quad G_2(w) = \frac{10(w-1)}{(w+10)}$$

- En general, uno o más ceros de  $G(w)$  se presentan en el semiplano derecho del plano  $w$ , por lo que  $G(w)$  es una función de transferencia de fase no mínima.



## Metodología general

- Diseño del regulador:

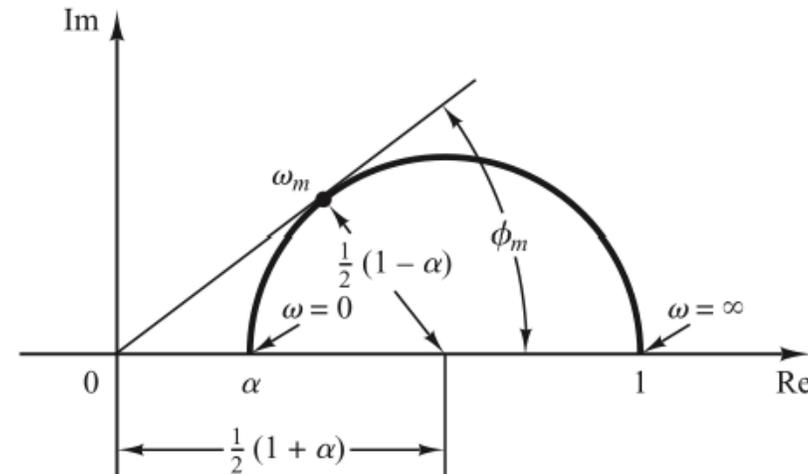
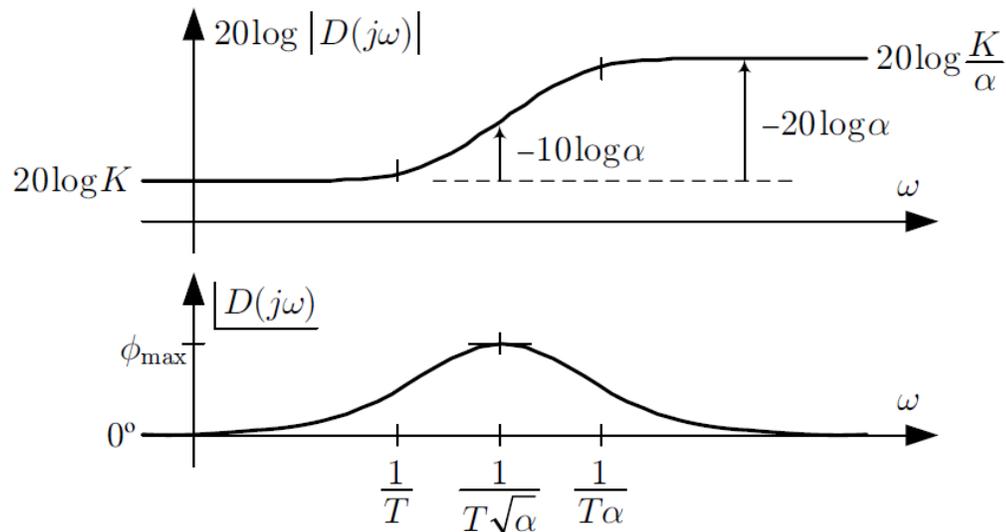
1. Obtener en el diagrama de Bode las constantes de error estático y los márgenes de fase y ganancia
2. En la zona de bajas frecuencias, determinar la ganancia del controlador para la constante de error dada
3. Ubicar los polos y ceros de la red de compensación (adelanto-atraso) mediante las técnicas de control continuo
4. Obtener  $G(z)$  a partir de  $G(w)$  deshaciendo la transformación bilineal  $w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

# Compensación de Adelanto de Fase

$$G_c(s) = K_A \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_A \alpha \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + a}{s + b} \quad (0 < \alpha < 1)$$

El cero se sitúa a la derecha del polo

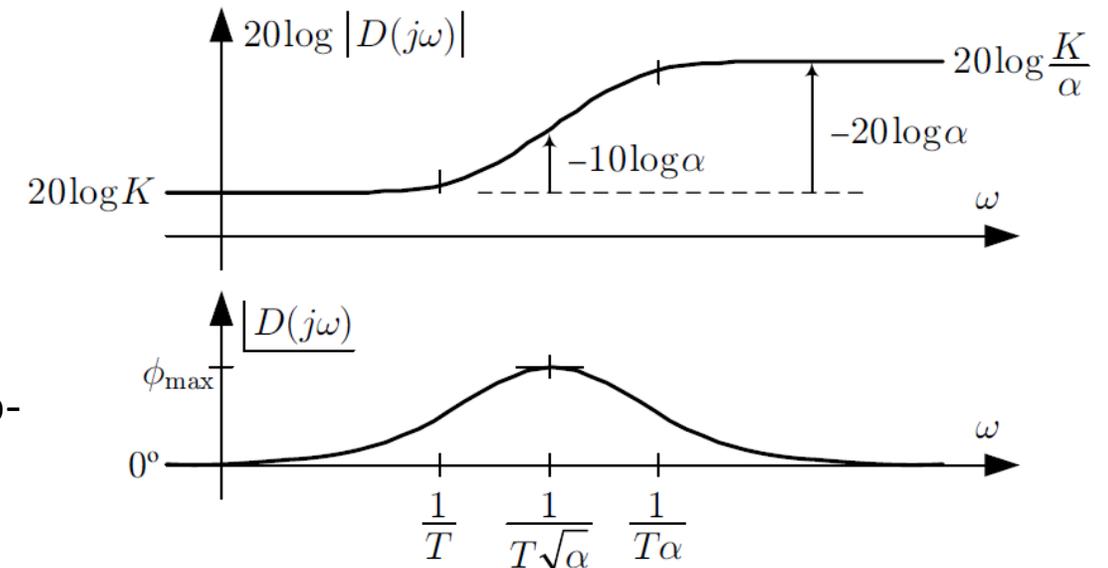
- La introducción de un par polo-cero puede mejorar el régimen transitorio (disminuir  $T_r$ ) si el cero está más cerca del origen que el polo  $\Leftrightarrow$  las ramas del LDR se alejan del eje  $j\omega_d$
- Mejora la respuesta transitoria y suele usarse para mejorar los márgenes de estabilidad.
- Para entender el efecto del compensador de adelanto, se muestra sus diagramas de Bode y polar



$$G_c(s) = K_A \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

## Efecto sobre la magnitud

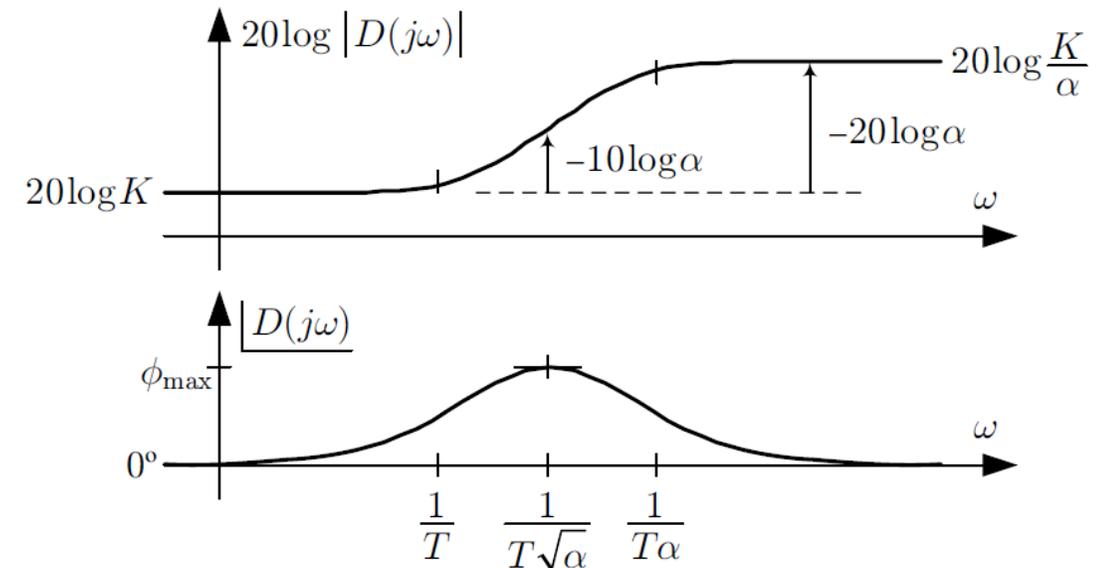
- Los aportes en magnitud son constantes a bajas y altas frecuencias.
- El aporte a altas frecuencias es siempre mayor que a bajas frecuencias => puede acentuar los efectos de ruido en alta frecuencia
- El aporte en magnitud a bajas frecuencias depende de la ganancia estática del compensador
- El aporte en magnitud a altas frecuencias depende de la ganancia estática del compensador y de la separación polo-cero



$$G_c(s) = K_A \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

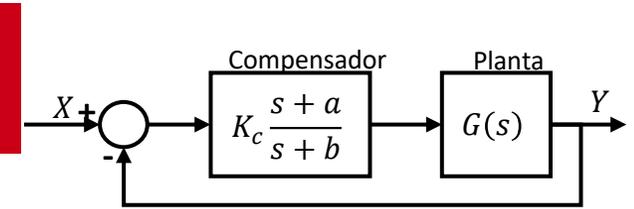
## Efecto sobre la fase

- No aporta fase a bajas y altas frecuencias
- Entre el par polo-cero aporta fase positiva => **adelanta** la fase entre el par polo-cero
- Desplaza la frecuencia de cruce de ganancia a la derecha, es decir, disminuye el margen de fase
- El ángulo de adelanto máximo:
  - Depende de la separación polo-cero:  **$\sin \phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$**
  - $\alpha \equiv$  Factor de atenuación
  - Se encuentra en la media geométrica de sus frecuencias esquina:  **$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$**
  - El valor máximo de adelanto es  $90^\circ$ , pero en la práctica no suele superar  $65^\circ$



# Compensación de Adelanto de Fase

## Método de diseño



1. Determinar la  $K_c$  que satisface el requisito de error en estado estacionario

- Aplicación del teorema del valor final:

$$G_c(s)G(s) = K_A \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} K_A \alpha G(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \cdot G_1(s) \Rightarrow G_1(s) = K_c G(s)$$

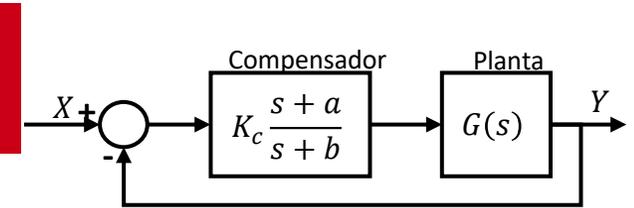
2. Dibujar el diagrama de Bode de  $G_1(j\omega) = K_c G(j\omega)$ . Determinar el MF (que se habrá modificado como consecuencia de  $K_c$ ) y calcular el adelanto de fase que debe aportar el compensador  $\phi_{max}$ . Añadir  $5^\circ - 12^\circ$  debido a que el compensador desplaza la frecuencia de cruce de ganancias (añade magnitud) y por tanto reduce el MF

3. Determinar el factor de atenuación ( $\alpha$ ) según la expresión (del diagrama polar):

$$\sin \phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin \phi_m}{1+\sin \phi_m}$$

- Con este paso se obtiene la separación polo-cero que produce la fase necesaria  $\phi_m$ . Pero todavía no se sabe dónde se ubican el par polo-cero (sólo su separación  $\alpha$ )
- La frecuencia de aporte de fase máximo estará en la media geométrica de la separación polo-cero:  $\log \omega_m = \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right) \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ . Pero todavía desconocemos la constante de tiempo T.

- Con este paso se obtiene la separación polo-cero que produce la fase necesaria  $\phi_m$ . Pero todavía no se sabe dónde se ubican el par polo-cero (sólo su separación  $\alpha$ )
- La frecuencia de aporte de fase máximo estará en la media geométrica de la separación polo-cero:  $\log \omega_m = \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right) \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ . Pero todavía desconocemos la constante de tiempo T.



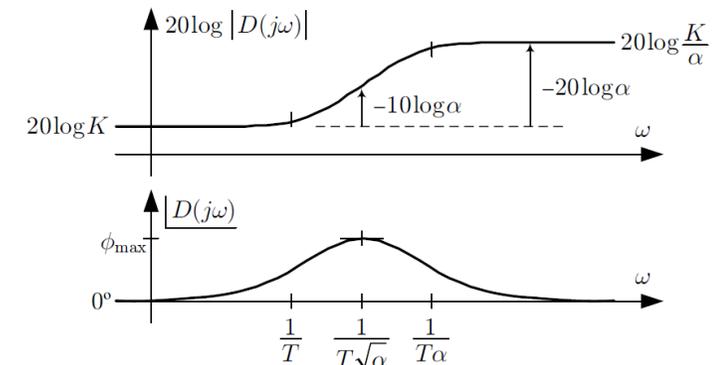
4. Para calcular la constante de tiempo  $T$  que define la posición del par polo-cero, se debe determinar la nueva frecuencia de cruce de ganancias  $\omega_{cg}$ , que debe coincidir con la frecuencia a la cual la red agrega la máxima fase. Para ello se calcula la modificación del diagrama de magnitud debido al compensador, que “agrega” magnitud en la frecuencia de adelanto máximo ( $\omega_m$ ) de valor:

$$20 \log \left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \alpha T} \right|_{\omega=1/T\sqrt{\alpha}} = 20 \log \left| \frac{1 + j \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \right| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -10 \cdot \log(\alpha) \text{ dB}$$

Una vez calculado el “exceso” de magnitud en la frecuencia  $\omega_m$ , debe buscarse en el diagrama de magnitud de  $G_1(s) = K_c G(s)$  (sin todavía el efecto del compensador) el punto que será el nuevo  $\omega_{cg} = \omega_m$ , que es la frecuencia donde se ubicará el nuevo MF del sistema. Para ello:

- Gráficamente: entrar en el diagrama de magnitud con el valor de magnitud añadida y leer la frecuencia, que será  $\omega_{cg}$ . Calcular la constante de tiempo del cero ( $T$ ) a partir de la expresión  $\omega_m = \omega_{cg} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$
- Numéricamente: evaluar iterativamente hasta encontrar  $\omega$  la expresión:  

$$-20 \log |K_c G(j\omega)| = -10 \log(\alpha)$$

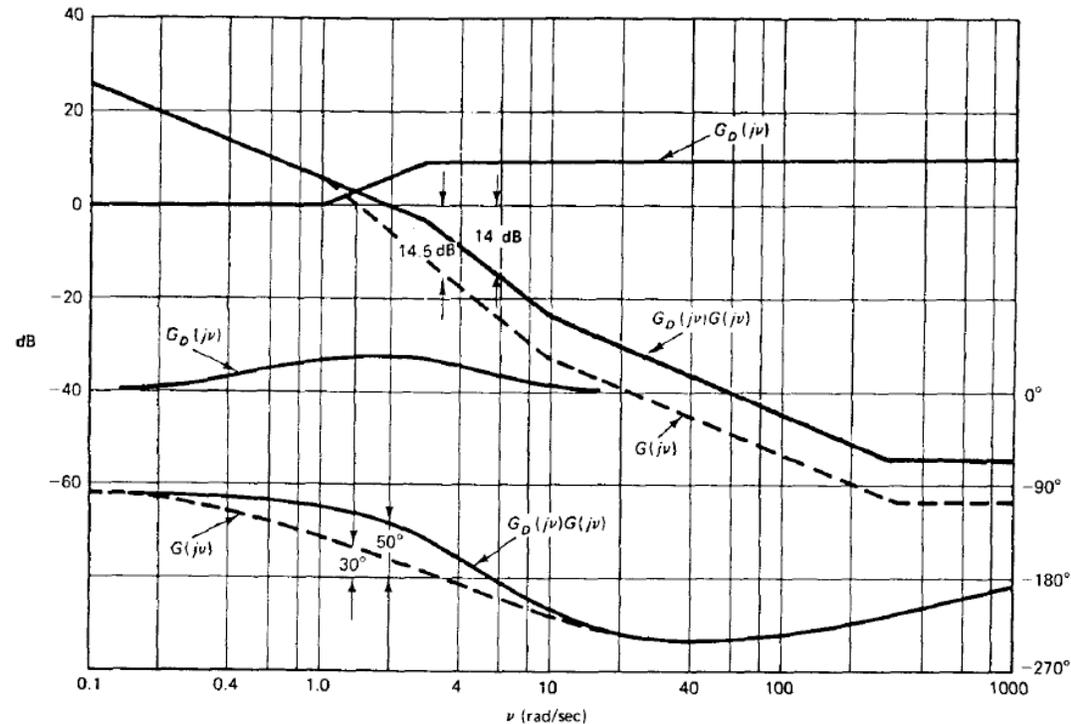
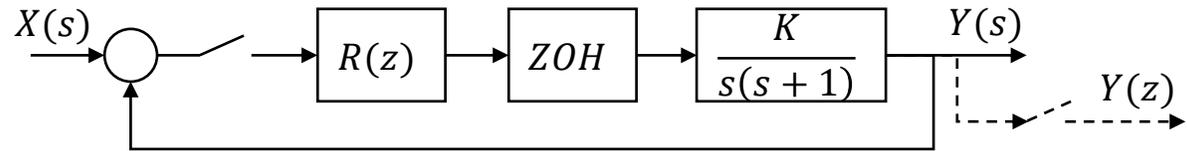


# Compensación de Adelanto de Fase

## Ejemplo

Diseñar un compensador de adelanto de fase para el sistema discreto de la figura, para un periodo de muestreo  $T = 0.2s$ , que cumpla con las siguientes especificaciones:

- $MF \geq 50^\circ$
- $MG \geq 10 \text{ dB}$
- Constante de error de velocidad  $K_v = 2s^{-1}$

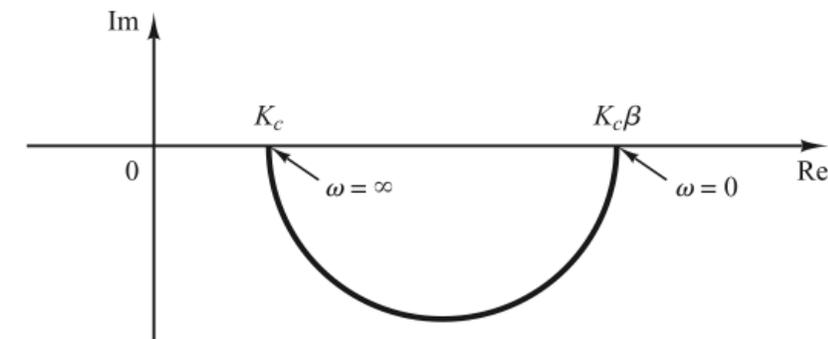
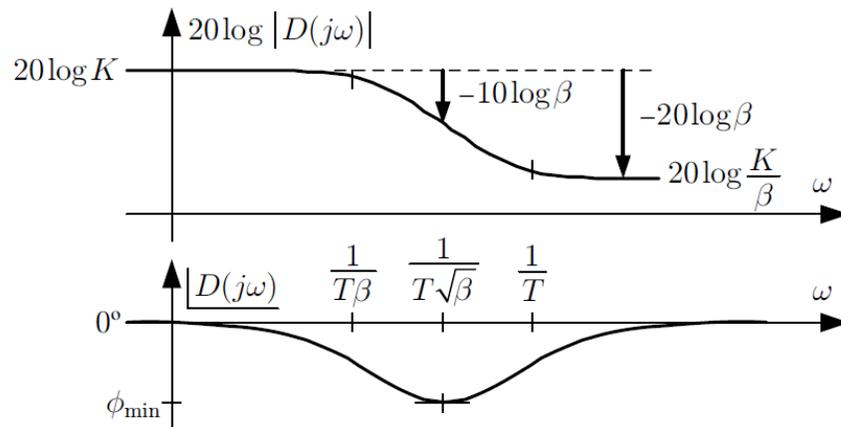


# Compensación de Retraso de Fase

$$G_c(s) = K_R \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_R \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = K_c \frac{s + a}{s + b} \quad (\beta > 1)$$

El polo se sitúa a la derecha del cero

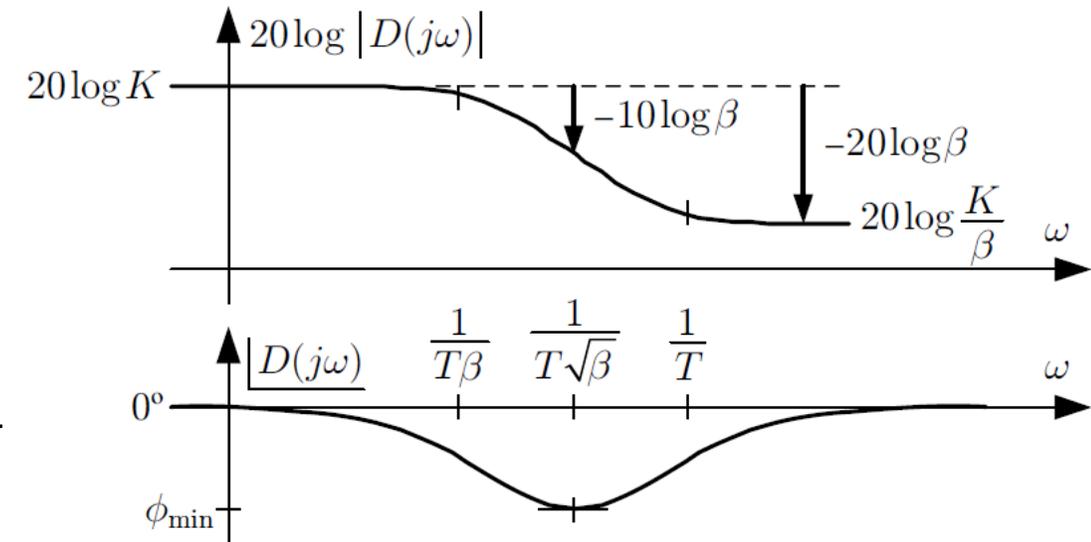
- Proporciona una atenuación en el rango de las altas frecuencias a fin de aportar un margen de fase suficiente al sistema
- Los compensadores de retardo son, en esencia filtros paso bajo, es decir, permiten una ganancia alta a bajas frecuencias (mejora el comportamiento en estado estacionario) y reduce la ganancia en frecuencias altas.
- Reducen el ancho de banda y provoca una respuesta transitoria más lenta.



$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

## Efecto sobre la magnitud

- Los aportes en magnitud son constantes a bajas y altas frecuencias.
- El aporte a bajas frecuencias es siempre mayor que a altas frecuencias => atenúa los efectos de ruido en alta frecuencia
- El aporte en magnitud a bajas frecuencias depende de la ganancia estática del compensador
- El aporte en magnitud a altas frecuencias depende de la ganancia estática del compensador y de la separación polo-cero



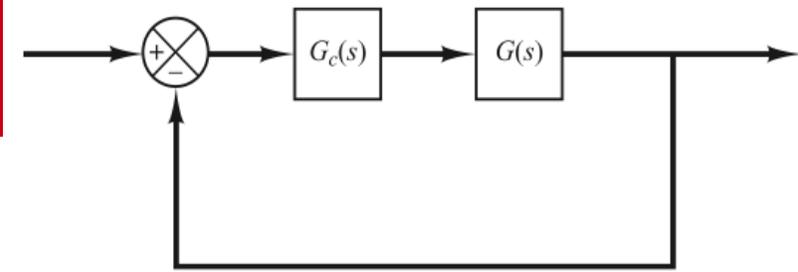
$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

## Efecto sobre la fase

- No aporta fase a bajas y altas frecuencias
- Entre el par polo-cero aporta fase positiva => **atrassa** la fase entre el par polo-cero. Es un efecto en general no deseado de la compensación de retardo.
- Desplaza la frecuencia de cruce de ganancia a la izquierda, es decir, aumenta el margen de fase
- El ángulo de retraso máximo:
  - Depende de la separación polo-cero:  **$\sin \phi_{min} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$**   
 $\beta \equiv$  Factor de atenuación
  - Se encuentra en la media geométrica de sus frecuencias esquina:  **$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$**
  - El valor máximo de retraso es  $-90^\circ$ , pero en la práctica no suele superar  $-65^\circ$
- No aporta fase a bajas y altas frecuencias
- Entre el par polo-cero aporta fase positiva => **atrassa** la fase entre el par polo-cero. Es un efecto en general no deseado de la compensación de retardo.
- Desplaza la frecuencia de cruce de ganancia a la izquierda, es decir, aumenta el margen de fase
- El ángulo de retraso máximo:
  - Depende de la separación polo-cero:  **$\sin \phi_{min} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$**   
 $\beta \equiv$  Factor de atenuación
  - Se encuentra en la media geométrica de sus frecuencias esquina:  **$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$**
  - El valor máximo de retraso es  $-90^\circ$ , pero en la práctica no suele superar  $-65^\circ$

# Compensación de Retraso de Fase

## Método de diseño



1. Determinar la  $K$  que satisfaga la constante de error de velocidad:

- Aplicando el teorema del valor final:

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} K_c G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \cdot G_1(s) \Rightarrow G_1(s) = K_c G(s)$$

2. Dibujar el diagrama de Bode de  $G_1(j\omega) = K_c G(j\omega)$ , y determinar la frecuencia a la que el MF (que se habrá modificado como consecuencia de  $K_c$ ) es el deseado, añadiendo  $5^\circ - 12^\circ$  debido a que el compensador desplaza la frecuencia de cruce de ganancias (añade magnitud) y por tanto reduce el MF. Esta frecuencia es la nueva frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_{cg}$
3. Seleccionar la frecuencia de esquina del cero  $\omega_z = 1/T$  entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esto se hace para evitar los efectos adversos de la fase negativa.
4. Determinar la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Si se considera que esta atenuación es  $-20 \log \beta$  la frecuencia esquina del polo viene determinada por  $\omega_p = 1/\beta T$

# Consideraciones

	Adelanto de fase	Retraso de fase
<b>Método</b>	Aporte de fase próximo a la frecuencia de cruce para lograr los polos en LC deseados	Aporte de fase negativa para mejorar la constante de error, manteniendo la ubicación de los polos en LC (margen de fase)
<b>Resultados</b>	Aumenta el ancho de banda del sistema en LC Aumenta la ganancia en frecuencias altas	Disminuye el ancho de banda del sistema en LC
<b>Ventajas</b>	Permite lograr la respuesta deseada (polos en LC, MF) Mejora la dinámica de la respuesta (rapidez)	Suprime el ruido de alta frecuencia Reduce el error en estado estacionario
<b>Desventajas</b>	Al aumentar el ancho de banda es más susceptible al efecto del ruido	Empeora la dinámica de la respuesta (rapidez)
<b>Aplicaciones</b>	Cuando se desea mejorar la respuesta transitoria (rapidez)	Cuando se especifican las constantes de error (estado estacionario)
<b>No aplicable</b>	Cuando la fase disminuya rápidamente cerca de la frecuencia de cruce	Cuando no existe un intervalo de bajas frecuencias donde la fase sea igual al MF deseado

©2022 Autor Antonio J. del Ama Espinosa  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# Introducción a la representación en espacio de estados

TEMA 5

- **Estados:** Los estados de un sistema dinámico son los elementos del conjunto mínimo de variables tal que su conocimiento en  $t_0$  junto con las entradas para  $t > t_0$  nos permite conocer toda la dinámica para  $t > t_0$  (posición, velocidad, voltaje, etc.)
- **Variable de estado:** El conjunto de estados que conforma el conjunto antes descrito.
- **Vector de estado:** Dado un sistema con  $N$  variables de estado. El vector de estado es un vector conformado por  $N$  elementos que representan el valor de cada una de las variables de estado o estados en un tiempo  $t$ .
- **Ecuación de estado:** Representación matemática que relaciona entradas salidas y estados en el sistema.

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}(k) = \text{vector } n \quad (\text{vector de estado})$$

$$\mathbf{y}(k) = \text{vector } m \quad (\text{vector de salida})$$

$$\mathbf{u}(k) = \text{vector } r \quad (\text{vector de entrada})$$

$$\mathbf{G}(k) = \text{matriz } n \times n \quad (\text{matriz de estado})$$

$$\mathbf{H}(k) = \text{matriz } n \times r \quad (\text{matriz de entrada})$$

$$\mathbf{C}(k) = \text{matriz } m \times n \quad (\text{matriz de salida})$$

$$\mathbf{D}(k) = \text{matriz } m \times r \quad (\text{matriz de transmisión directa})$$

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

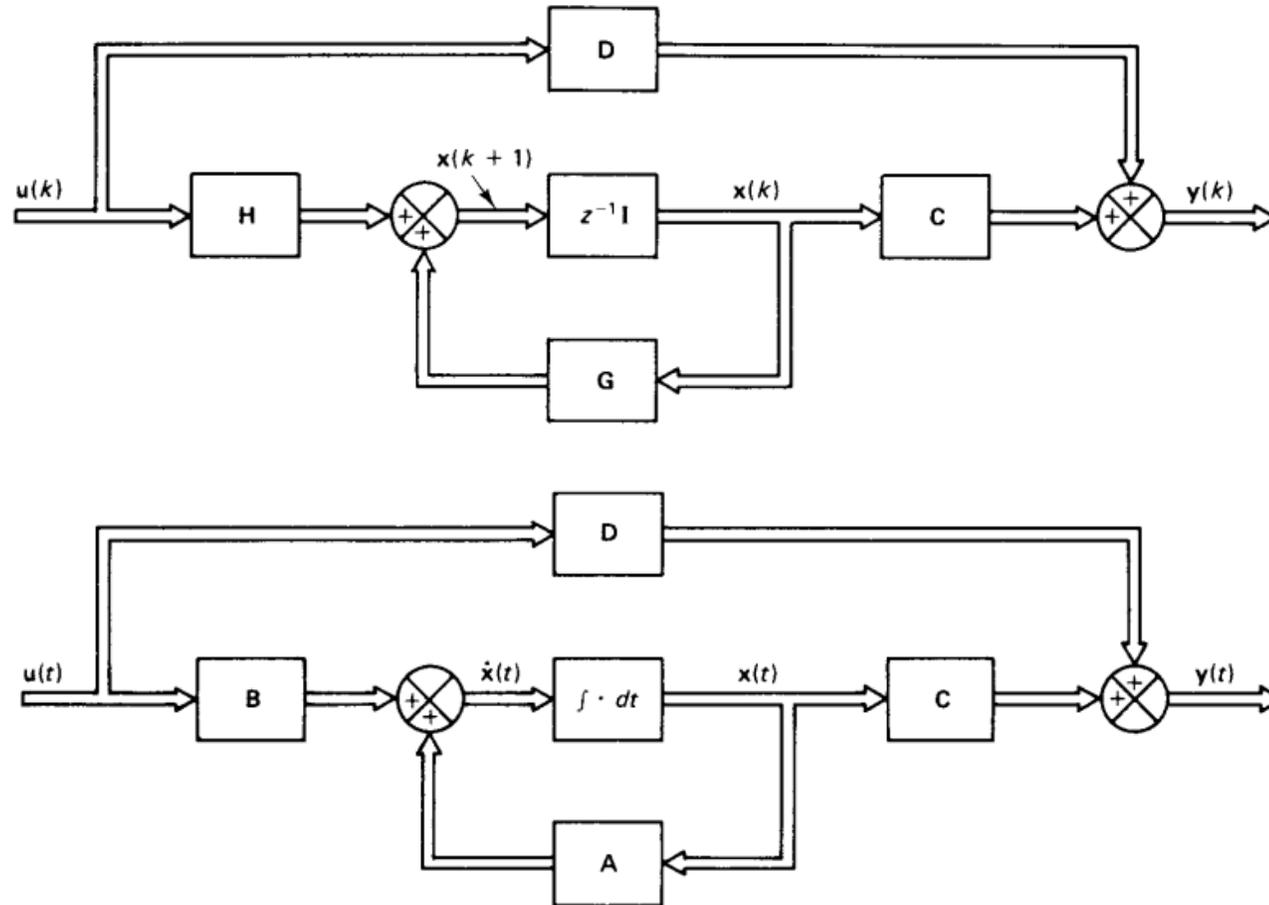
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- Representación en diagrama de bloques para la obtención de la ecuación de estado lineal en tiempo discreto y en continuo:



Katsuhiko OGATA, *Discrete-time control systems*. Prentice Hall (1994)

Para una ecuación diferencial, no lineal y de primer orden:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t)]$$

Punto de operación se asume el estado estable:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0 = f[\bar{x}, \bar{u}]$$

Las variables incrementales:

$$\hat{x}(t) = x(t) - \bar{x} \quad \hat{u}(t) = u(t) - \bar{u}$$

La ecuación linealizada:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{[\bar{x}, \bar{u}]} \hat{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{[\bar{x}, \bar{u}]} \hat{u}(t)$$

Restando las dos ecuaciones:

$$\frac{d(x(t) - \bar{x})}{dt} = f[x(t), u(t)] - f[\bar{x}, \bar{u}]$$

Linealizando la función de dos variables:

$$\frac{d(x(t) - \bar{x})}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{[\bar{x}, \bar{u}]} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{[\bar{x}, \bar{u}]} (u(t) - \bar{u})$$

Linealización ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1[x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n[x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

Existe un vector de entradas  $\bar{U}$  que lleva al sistema al punto de equilibrio:

$$\dot{X} = F(\bar{X}, \bar{U}) = 0$$

Expansión en serie de Taylor:

$$\frac{dx}{dt} = F(\bar{X} + \hat{x}, \bar{U} + \hat{u})$$

$$\begin{aligned} X &= \bar{X} + \hat{X} & U &= \bar{U} + \hat{U} & Y &= \bar{Y} + \hat{Y} \\ \hat{X} &= X - \bar{X} & \hat{U} &= U - \bar{U} & \hat{Y} &= Y - \bar{Y} \end{aligned}$$

$$\dot{X} \approx F(\bar{X}, \bar{U}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} \hat{X} + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} \hat{U} + \dots$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \bigg|_{\bar{X}, \bar{U}} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{du_1} & \dots & \frac{df_1}{du_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{du_1} & \dots & \frac{df_n}{du_p} \end{pmatrix} \bigg|_{\bar{X}, \bar{U}}$$

Comparando con la original:

$$\frac{d(X)}{dt} = \frac{d(\bar{X} + \hat{X})}{dt} = A\hat{X} + B\hat{U}$$

$$\hat{y} = C\hat{X} + D\hat{U}$$

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\bar{X}, \bar{U}}$$

La ecuación de salida:

$$y_1 = h_1[x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

$$y_q = h_q[x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{dh_1}{dx_1} & \dots & \frac{dh_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dh_q}{dx_1} & \dots & \frac{dh_q}{dx_n} \end{pmatrix} \bigg|_{\bar{X}, \bar{U}} \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{dh_1}{du_1} & \dots & \frac{dh_1}{du_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dh_q}{du_1} & \dots & \frac{dh_q}{du_p} \end{pmatrix} \bigg|_{\bar{X}, \bar{U}}$$

“La ecuación de estado de un sistema es completamente controlable si existe una entrada  $U(t)$ , que pueda transferir cualquier estado inicial a cualquier estado final en un tiempo finito, en caso contrario no es controlable”

$$\mathbb{C} = (B : AB : \dots : A^{n-1}B)$$

Sistema controlable si y sólo si  $\text{rango } \mathbb{C} = n$ ,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

“Un sistema es completamente observable si y solo si existe un tiempo finito  $t$ , tal que el estado inicial se puede determinar a partir de las salidas y de las entradas.”

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.8 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y_1(k) = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Sistema observable si y sólo si  $\text{rango } \mathbb{O} = n$

- Si un sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia la descripción por variables de estado es controlable y observable.
- Si el sistema es controlable y observable está completamente caracterizado por  $G(s)$  y esta se puede emplear para análisis y diseño.
- Una función racional es irreducible si y solo si no hay términos comunes entre los polinomios del numerador y denominador, excepto una constante.
- Un sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia propia e irreducible  $G(s)$ , si el grado de esta es igual al número de variables de estado del sistema.

Dado que tanto la Función de transferencia como las ecuaciones de estado representan al sistema, ambos modelos estarán relacionados

*Dado el sistema*

$$\frac{\delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} * \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} * \mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Para el caso invariante la transformada de Laplace es

$$L\{\dot{\mathbf{X}}\} = L\{\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\}$$
$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\text{Respuesta debida al estado inicial}} + \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{\text{Respuesta debida a la entrada externa}}$$

# Ejemplo de resolución de problema

Solución en tiempo:

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

Se define la matriz de transición de estados:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathfrak{L}^{-1} \{ \Phi(s) \}$$

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Comparando las soluciones en el tiempo y la frecuencia:

$$X(t) = \underbrace{\Phi(t)X(0)}_{\substack{\text{Respuesta no forzada} \\ \text{(Homogenea o natural o a entrada cero)}}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau) d\tau}_{\text{Respuesta forzada o en estado cero}}$$

©2022 Autor Antonio J. del Ama Espinosa y Enrique Hernández Balaguera  
Algunos derechos reservados  
Este documento se distribuye bajo la licencia  
"Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons,  
disponible en  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

$\Phi(t)$  relaciona el estado en cualquier tiempo  $t$  con el estado en el instante inicial.