Exámenes de Matemáticas II

Cédric M. Campos, Razvan G. Iagar, Marta Latorre Balado,
David Puertas Centeno, Michael Stich, Elio V. Toranzo
Área de Matemática Aplicada, ESCET

27 de marzo de 2023

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS
urjc.es

Ejercicio 1. (a) (1 punto) Decidir si existe el siguiente límite o no y en caso afirmativo calcular su valor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2+x^2y^4}.$$

(b) (1 punto) Hallar de forma razonada los valores del coeficiente k en el numerador para que el siguiente límite exista y calcular dicho límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2+ky^2}{x^2+y^2}.$$

Ejercicio 2. (a) (1,5 puntos) Hallar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3,$$

y analizar aquellos puntos críticos **que tengan componente y diferente de 0** para precisar cuáles son máximos y mínimos locales.

(b) (1,5 puntos) Hallar los máximos y mínimos absolutos de la misma función $f(x,y)$ definida en el apartado (a) sobre el triángulo cerrado (con frontera incluida) con vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(0,6)$ y $(6,0)$.

Ejercicio 3. (2,5 puntos) Hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el paraboloide $4z = x^2+y^2$, inferiormente por el plano $z=0$ y situada dentro del cilindro $x^2+y^2=8x$.

Ejercicio 4. (2,5 puntos) Hallar el volumen de la región sólida situada encima de la superficie

$$-x^2-y^2+z^2=1$$

y debajo del plano $z=3$, en coordenadas positivas $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ejercicio 1. (a) (1,25 puntos) Se considera el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y, z) = \left(yze^{xy}, xze^{xy} - z, e^{xy} - y\right).$$

Calcular la integral de línea $\int_C \overline{F} \cdot ds$, donde C es cualquier trayectoria entre los puntos $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (2, 2, 2)$.

(b) (1,25 puntos) Sea C_1 la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y C_2 la circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Sea $\overline{F} = (F_1, F_2)$ un campo vectorial que cumple la siguiente relación dentro de la corona comprendida entre las circunferencias C_1 y C_2:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Calcular la integral de línea $\int_{C_2} \overline{F} \cdot \, ds$ usando la información anterior y sabiendo además que $\int_{C_1} \overline{F} \cdot \, ds = 10$.

Ejercicio 2. (a) (1,25 puntos) Se considera la superficie S que es la parte de la semi-esfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ con la propiedad de que

$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$$

Establecer una parametrización de la superficie S.

(b) (1,25 puntos) Usando el apartado (a), calcular la integral de superficie sobre S del campo vectorial

$$\overline{F}(x, y, z) = (x, y, z).$$

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) (1,5 puntos) $y' = -\frac{x^2y^2}{x^3y+y+3}$.

(b) (1,5 puntos) $x^2y' = 3(x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} + xy$.

Ejercicio 4. (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x} \ln x}{x}.$$

Encontrar después la solución (si existe) que además cumpla las condiciones (de frontera) $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

Ejercicio 1. (a) (1,5 puntos) Decidir si existe el siguiente límite o no y en caso afirmativo calcular su valor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan(x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

(b) (1,5 puntos) La misma pregunta que en el apartado (a) para el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+2y^2}-1}.$$

Ejercicio 2. (a) (2 puntos) Hallar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2},$$

y precisar cuáles son máximos y mínimos locales. beginImportante: resolver en detalle el sistema de ecuaciones obtenido.

(b) (2 puntos) Hallar los extremos globales (absolutos) de la función

$$g(x,y) = 2xy - x - y,$$

sobre el dominio acotado (incluyendo su frontera) $\{y \leq 4, y \geq x^2\}$.

Ejercicio 3. (3 puntos) Sea W la región sólida comprendida entre el cilindro $x^2+y^2=1$, el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=0$ y $z=x+y+5$. Calcular la integral triple

$$\iiint_W x\, dV.$$

Ejercicio 1. (a) (2 puntos) Calcular la siguiente integral de línea:

$$\int_C ye^x\, dx + xe^y\, dy,$$

donde C es el contorno del triángulo de vértices $(-1,0)$, $(0,3)$, $(0,2)$ recorrido en el orden indicado por los vértices.

(b) (2 puntos) Se considera el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (xy, 2z, 3y)$. Se pide calcular la integral de línea

$$\int_C \overline{F} \cdot ds,$$

donde C es la curva de intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y el plano $x + z = 5$.

Ejercicio 2. (2 puntos) Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS, \qquad \text{donde } \overline{F}(x,y,z) = \left(x^3 + y^3, y^3 + z^3, z^3 + x^3\right)$$

y S es esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2.

Ejercicio 3. (a) (2 puntos) Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2xy - y\ln\, y}{x + y}$$

(b) (2 puntos) Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + 9y = 3\cos(3x) - 2\sin(3x)$$

y después encontrar las soluciones que también cumplan (al mismo tiempo) las condiciones de frontera

$$y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{9}.$$

Ejercicio 1. (a) (0,75 puntos) Decidir si existe el límite o no (y en caso afirmativo calcular su valor)

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}$$

(b) (1 punto) Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2\ln(1+x^2+y^2)+x^3y}{2(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

(c) (0,75 puntos) Calcular la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, donde $f(x,y)$ es la misma función que en el apartado (b).

Ejercicio 2. (a) (1,25 puntos) Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$ sobre el disco de radio 1 $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) (1,25 puntos) Encontrar todos los puntos de coordenadas (x,y,z) en el espacio tales que pertenezcan a la superficie $xyz = 8$ y que realicen la distancia mínima respecto al origen $(0,0,0)$.

Ejercicio 3. (2,5 puntos) Calcular el volumen de la región sólida W limitada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Ejercicio 4. (2,5 puntos) Calcular la integral triple

$$\iiint_W 2x \, dV,$$

donde W es el sólido limitado por el cilindro parabólico $z = y^2$ y los planos $z = 4$, $x = 0$ y $x + z = 6$.

Ejercicio 1. (a) (1,25 puntos) Se considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(4x^3y^2 - 2xy^3, 2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3\right).$$

Calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$, donde C es la curva $\mathbf{c}(t) = (t + \sin(\pi t), 2t + \cos(\pi t))$, con $0 \le t \le 1$.

(b) (1,25 puntos) Calcular la integral de línea $\int_C 2xy dx + (x^2 + x)dy$, donde C es el triángulo de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ recorrido en el sentido indicado por el orden de estos vértices.

Ejercicio 2. (a) (1,25 puntos) Calcular la integral de línea del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2),$$

sobre la curva C que es el contorno del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

(b) (1,25 puntos) Una superficie S admite una parametrización $S(u,v)$ con $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 4$ y tal que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial S}{\partial u}(u,v) = (2,0,1), \qquad \frac{\partial S}{\partial v}(u,v) = (4,0,3).$$

Con esta información, calcular el área de la superficie S.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) (1,25 puntos) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2xy-y}{x^2}$.

(b) (1,25 puntos) $x^2y' = y^2 + 2xy$.

Ejercicio 4. (2,5 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + 4\sin x.$$

Encontrar después la solución (si existe) que además cumpla las condiciones (de frontera) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Ejercicio 1. Determinar si los siguientes límites existen y en caso afirmativo calcularlas:

(a) (1,25 puntos) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

(b) (1,25 puntos) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2}$.

Ejercicio 2. (a) (1,25 puntos) Determinar **todos** los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (4y^2 - x^2)e^{-x^2-y^2}$$

que se hallan en el interior del círculo $x^2 + y^2 = 2$, y calcular el valor de $f(x,y)$ en cada uno de ellos.

(b) (1,25 puntos) Estudiando la frontera y comparando con los valores obtenidos en el apartado (a), hallar los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 2$.

Ejercicio 3. (2,5 puntos) Calcular la integral triple

$$\iiint_W z e^{x^2+y^2}\, dV,$$

donde W es el sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y limitado inferiormente y superiormente por los planos $z = 1$ y $z = 3$.

Ejercicio 4. (2,5 puntos) Sea D la región plana que se encuentra en el interior del círculo $x^2+(y-1)^2 = 1$ (de centro $(0,1)$ y radio 1) y en el exterior del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Calcular $\iint_D x\, dA$.

Ejercicio 1. (2,5 puntos) Sea C la curva compuesta por un tramo de la parábola $y = x^2$ y un tramo de la parábola $y = 8 - x^2$, unidos por los puntos de corte de las dos parábolas. Calcular la integral de línea

$$\int_C (xy - e^{2x})\, dx + (2x^2 - 4y^2)\, dy.$$

Ejercicio 2. Se considera la superficie S formada por la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$ entre los planos $z = 0$ y $z = 1$. Se pide:

(a) (1,25 puntos) Parametrizar la superficie, especificando los límites de los parámetros.

(b) (1,25 puntos) Calcular la integral de superficie $\iint_S x\, dS$, donde S es la superficie del apartado (a).

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

(a) (1,25 puntos) $\frac{y}{x}\, dx + (y^3 - \ln x)\, dy = 0$.

(b) (1,25 puntos) $(x + ye^{y/x})\, dx - xe^{y/x}\, dy = 0$.

Ejercicio 4. (2,5 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + 2\sin x - \cos x.$$

Ejercicio 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(x)+y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. (12 puntos) Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f en el punto $(x,y)=(0,0)$. En caso de existir, escribe el gradiente de f en $(0,0)$, $\nabla f(0,0)$ y el valor de la diferencial de f en $(0,0)$ aplicada al vector $(2,-4)$,$\mathrm{d}f(0,0)(2,-4)$.
2. (16 puntos) Repite el estudio anterior en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$, justificando con detalle tu respuesta. En caso de existir, calcula $\nabla f(0,1)$ y $\mathrm{d}f(0,1)(2,-4)$ (en cuyo caso no es necesario simplificar $\nabla f(x,y)$).
3. (8 puntos) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que

$$g(0,0)=(0,1) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Jac}(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula, si existen,

$$\nabla(f\circ g)(0,0) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Jac}(g^{-1})(0,1).$$

Ejercicio 2. Dado el polinomio $p(x,y)=3x^2-x^3+xy^2+y^2$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos críticos de p.
2. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podrías asegurar o descartar que estos sean globales?
3. (12 puntos) Considera ahora el recinto $D=[-1,1]\times[-3,3]$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de p en D.

Ejercicio 3. Se considera el cono de ecuación $z = 4-\sqrt{x^2+y^2}$.

1. (6 puntos) Siendo R el sólido encerrado por el cono en el semiespacio superior, estos es,

$$R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 4,\ 0\le x^2+y^2\le (z-4)^2\}$$

describe dicho conjunto en coordenadas cilíndricas.
2. (10 puntos) Calcula el volumen de dicho sólido.

Ejercicio 1. La cardioide es la curva cerrada del plano dada en coordenadas polares, (ρ, θ), por la expresión $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) (2 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ e indica su orientación.

Considera ahora el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = e^{x/2}\Big((2 - \cos y)\boldsymbol{i} + 2\sin y\boldsymbol{j}\Big)$.

b) (6 puntos) Comprueba que el campo es conservativo y calcula el potencial asociado.

Sea C la mitad superior de la cardioide (con la orientación dada por la paremetrización).

c) (6 puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sirviéndote del potencial.

d) (6 puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sin utilizar el potencial (ayuda: tiene truco).

Ejercicio 2. Sea S el hemisferio norte de la esfera de radio 2 y centro $\boldsymbol{0}$ con orientación interior, y sea C el paralelo ecuatorial con orientación compatible.

a) (4 puntos) Parametriza ambos objetos, indicando si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida.

Considera ahora el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (x + y)\boldsymbol{i} + (z - y)\boldsymbol{j} + (x - z)\boldsymbol{k}$.

b) (2 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de $\boldsymbol{F}$, indicando su carácter conservativo.

c) (14 puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ de dos formas diferentes usando únicamente los objetos indicados.

Ejercicio 3. Estudia la existencia y unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} \left(2y + (1-x)(1+x)^2\right)\mathrm{d}x - (1-x^2)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(4) = 5 \end{cases}$$

así como su posible determinación.

a) (4 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la región del plano donde existe solución y donde ésta es única (ayuda: simplificar).

b) (12 puntos) Halla la solución general de la ecuación aplicando el método de resolución de ecuaciones lineales de primer orden.

   I) Escribe la EDO en forma estándar.
   II) Introduce un factor integrante e identifica la EDO asociada.
   III) Determina una solución para el factor integrante (ayuda: $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$).
   IV) Determina la solución general de la EDO original.

c) (4 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad a lo largo de éste.

Ejercicio 4. Se quiere determinar la familia biparamétrica de soluciones de la EDO

$$\tfrac{1}{2}y'' - 3y' + 7y = (4+3x)e^{-2x} + 5\cos(\sqrt{5}x)e^{3x}\,.$$

Sigue para ello el siguiente esquema.

a) (8 puntos) Obtén la solución general de la ecuación homogénea, esto es, $\frac{1}{2}y'' - 3y' + 7y = 0$.

b) (6 puntos) Obtén una solución particular de la ecuación no-homogénea considerando únicamente el término fuente $g_1(x) = (4+3x)e^{-2x}$.

c) (4 puntos) Repite con $g_2(x) = 5\cos(\sqrt{5}x)e^{3x}$, pero sólo indicando la forma de la solución particular.

d) (2 puntos) Determina la solución general de la EDO original.

Ejercicio 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) (12 puntos) Obtén una expresión para $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Sol.: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) (16 puntos) Estudia la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$.
Sol.: $\partial_x f \notin C^0(0,0)$

c) (** puntos) ¿Qué deduces de ello respecto a la diferenciabilidad y continuidad de f en $(0,0)$?
Sol.: No podemos descartar nada.

d) (8 puntos) Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que

$$g(4,3) = (2,1) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Jac}(g)(4,3) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula, si existen,

$$\nabla(f \circ g)(4,3) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Jac}(g^{-1})(2,1).$$

Ejercicio 2. Dado el polinomio $p(x,y) = x^3 + 2y^3 - 6xy$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$, se pide:

a) (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos críticos de p.
Sol.: Pto. silla, $(0,0)$; mínimo rel., $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

b) (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales (independientemente de que lo hayas hecho o no), ¿podrías asegurar o descartar que estos sean globales?

c) (12 puntos) Considera ahora el recinto D delimitado por el eje de abscisas, la bisectriz $y = x$ y la vertical $x = 2$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de p en D.
Sol.: Mínimo abs., $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$; máximo abs. $(2,0)$.

Ejercicio 3. En los siguientes cálculos integrales, además de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integración según sea conveniente.

a) (12 puntos) $\int_0^{2\sqrt{2}} \int_{y^{1/3}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^4}\, dx\, dy$
Sol.: $4/3$

b) (12 puntos) Calcula el área encerrada entre la circunferencia de centro 0 y radio $r = 2$ y la cardiode de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$.
Sol.: $5\pi/2$

Ejercicio 1. Sea C el «muelle» cuya parametrización en coordenadas cilíndricas, (r, θ, z), viene dada por las ecuaciones $r = 1$ y $\theta = 5\frac{\pi}{2}z$, con $|z| \leq 1$, uniendo así puntos diagonalmente opuestos del plano YZ.

a) (5 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, comprueba que une puntos como los mencionados, calcula el vector tangente al pasar por el plano XY e indica su orientación (giro respecto al eje OZ).

b) (3 puntos) Calcula la longitud de la curva.

Considera ahora el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = z\boldsymbol{i} + (3y^2 - \sin(y - z))\boldsymbol{j} + (x + \sin(y - z))\boldsymbol{k}$.

c) (7 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de $\boldsymbol{F}$, indicando su carácter conservativo, y calcula su potencial de ser posible.

d) (7 puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ de la forma más simple posible (con los resultados obtenidos).

e) (** puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ de forma alternativa.
Solución: $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 6y - \cos(y - z)$, $f = xz + y^3 + \cos(y - z)$, $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2$

Ejercicio 2. Dado R, el tronco de esfera de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = 4$, sea S su superficie (con orientación exterior). Dicha superficie puede descomponerse en tapa, T, base, B, y lateral, L.

a) (8 puntos) Parametriza gráficamente L, dando el dominio para (x, y), calcula el vector perpendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) e indica si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida.

b) (10 puntos) Calcula $\iint_L z\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ directamente (ayuda: cambio a polares).

c) (10 puntos) Calcula $\iint_S z\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ indirectamente (ayuda: cambio a cilíndricas con $0 \leq r \leq \sqrt{25 - z^2}$).

d) (** puntos) ¿Qué se deduce de los resultados anteriores? ¿Era de esperar?
Solución: $128\pi/3$, $236\pi/3$, $\iint_{T\cup B} z\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 36\pi$

Ejercicio 3. Estudia la existencia y unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} 3yx^2\,\mathrm{d}x - (x^3 + 2y^4)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(3/2) = 3/2 \end{cases}$$

así como su posible determinación.

a) (6 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la región del plano donde existe solución y donde ésta es única.
Solución: $y' = \frac{3yx^2}{x^3+2y^4} \rightsquigarrow x^3 + 2y^4 \neq 0$

b) (18 puntos) Halla la solución general de la ecuación aplicando el método de resolución de ecuaciones diferenciales exactas.

I) Determina si la ecuación es exacta. Solución: $M_y = 3x^2 \neq -3x^2 = N_x$

II) En caso contrario:

- introduce un factor integrante en la EDO;
- establece la EDP asociada al factor integrante;
- simplifícala y obtén una EDO bien definida para el factor integrante; y

- determina el factor integrante.
  Solución: $\mu_y = -\frac{2}{y}\mu$, $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$

III) Determina la solución general de la EDO original.

c) (6 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad a lo largo de éste.
Solución: $x^3 = \frac{2}{3}y^4 + Cy$, $C = 0 \rightsquigarrow y = \sqrt[4]{\frac{3}{2}x^3},\ x > 0$

Ejercicio 1. (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes límites.

$$\text{I.} \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x+y)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2} \qquad \text{II.} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(\frac{1+x}{1-y}\right)-\log\left(\frac{1-x}{1+y}\right)}{x^2+y^2}$$

Sol.: I. $\exists L = 0$; II. $\nexists L$.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^4}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) (10 puntos) Calcula la derivada direccional de f en $(0,0)$ en una dirección genérica $(a,b) \neq (0,0)$, esto es, $D_{(a,b)}f(0,0)$. (Ayuda: no normalizar).
Sol.: $D_{(a,b)}f(0,0) = \begin{cases} a^3/b^2, & b \neq 0; \\ \nexists, & b = 0. \end{cases}$

b) (10 puntos) Asevera o refuta la diferenciabilidad de f de dos formas diferentes.
Sol.: I. $\nexists D_{(a,0)}f(0,0)$; II. $D_{(a,b)}f(0,0)$ no lineal; III. $f \notin C^0$.

Ejercicio 3. Sea $g(x,y) = (xe^y, \pi y + \cos x)$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\pi,-1) = (2,-3\pi)$.

a) (4 puntos) Calcula $\operatorname{Jac}(g)(\pi,0)$.

b) (4 puntos) Calcula $\nabla(f \circ g)(\pi,0)$.

c) (4 puntos) Calcula $\operatorname{Jac}(g^{-1})(\pi,-1)$.

Ejercicio 4. Dado el polinomio $p(x,y) = x^3 + 3x^2y - 3y^2$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$, se pide:

a) (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos críticos de p.
Sol.: Pto. silla, $(-1,\frac{1}{2})$; no concluyente, $(0,0)$.

b) (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podrías asegurar o descartar que estos sean globales?

c) (12 puntos) Considera ahora el recinto D delimitado por las rectas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 1-x$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de p en D.
Sol.: Mín. global, $p(0,1) = -3$; máx. global, $p(1,\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$.

Ejercicio 5. En las siguientes integrales, además de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integración según sea conveniente.

a) (12 puntos) Calcula $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{\pi}{4}y^3\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$.
Sol.: $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones $x^2+y^2 = 4$ y $x^2+y^2 = 9$ y los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = x - y + 5$.
Sol.: 25π

Ejercicio 1. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = ye^{x-2z}(y\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k})$$

y sea E la curva parametrizada por

$$\boldsymbol{r}(t) = 2^{1+t}\boldsymbol{i} + (\cos\tfrac{\pi}{2}t - 3\sin\tfrac{\pi}{2}t)\boldsymbol{j} + (1+t^2)\boldsymbol{k}$$

con $t \in [0, 1]$.

a) (5 puntos) Comprueba si el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

b) (10 puntos) Calcula $\int_E \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Por otro lado, sea C la curva formada por los bordes laterales y superior del rectángulo de esquinas diagonalmente opuestas $(1, 0)$ y $(3, 1)$.

c) (10 puntos) Sin parametrizar C, pero asignándole orientación, calcula $\int_C y\ \mathrm{d}x + \frac{1}{x}\ \mathrm{d}y$.

Sol.: b) $f(4, -3, 2) - f(2, 1, 1) = 8$; c) $8/3$, con $C = (1, 0) \to (1, 1) \to (3, 1) \to (3, 0)$.

Ejercicio 2. Sea R la región del semiespacio superior encerrada por el paraboloide elíptico de ecuación $z = 1 - (\frac{x-1}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2$ y sea $S = \partial R$ su frontera.

a) (5 puntos) Siendo $S = P \cup B$, donde P es la cubierta del paraboloide y B la base, parametriza sendos objetos indicando claramente la orientación inducida.

b) (20 puntos) Calcula $\iint_S y\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ de dos formas diferentes.

Sol.: 3π con orientación «exterior».

Ejercicio 3. Dada la siguiente EDO:

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

a) (6 puntos) Clasifícala de manera justificada.

b) (20 puntos) Resuélvela detalladamente.

Solución:

a) Se trata de una ecuación lineal de coeficientes constantes no homogénea.

b) Para resolverla seguimos el método de variación de constantes una vez resuelta la ecuación lineal homogénea asociada. Para resolver esta, hallamos las raices de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

es decir, la raiz es $\lambda = 1$ con mutiplicidad 2. Por tanto la solución de la ecuación lineal homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Para resolver la no homogénea, tenemos en cuenta que el conjunto fundamental de e^x es e^x, pero como ella y xe^x están incluidas en las soluciones de la homogénea, multiplicamos por x^2 y la solución particular, y sus derivadas, tendrán la forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax^2e^x \\ y_p'(x) &= 2Axe^x + Ax^2e^x \\ y_p''(x) &= Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación original

$$(Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x) - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) + (Ax^2e^x) = e^x.$$

y despejando $A = 1/2$. Por tanto

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

Ejercicio 4. Responde a las siguientes preguntas marcando solamente una casilla para cada pregunta. Cada respuesta correcta suma 6 puntos, cada respuesta errónea resta 3 puntos, no responder no penaliza.

a) Dada la EDO

$$y^{6)} - 9y^{5)} + 16y^{4)} - 18y^{3)} + 29y'' - 9y' + 14y = 0\,,$$

la solución general viene dada por

- ■ $y(x) = C_1e^{7x} + C_2e^{2x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x) + C_5x\cos(x) + C_6x\sin(x)$
- ☐ $y(x) = C_1e^{7x} + C_2xe^{7x} + C_3e^{2x} + C_4xe^{2x} + C_5\cos(x) + C_6x\cos(x)$
- ☐ $y(x) = C_1e^{7x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} + C_4\cos(x) + C_5x\cos(x)$

Solución: *No hace falta hallar las raíces del polinomio característico. El número de soluciones ha de ser* 6 *(el grado de la EDO) y en las soluciones complejas senos y cosenos siempren van juntos.*

b) La ecuación

$$x^2y - (\tfrac{1}{3}x^3 + 2y^3)y' = 0$$

- ☐ Es exacta y homogénea.
- ☐ Es exacta pero no es homogénea.
- ■ Ninguna de las dos anteriores.

Solución: *Es homogénea (grado tres en ambos lados), pero no es exacta ya que las derivadas se diferencian en el signo.*

c) ¿Qué valor tiene que tener k para que la siguiente ecuación sea exacta?

$$(3xy^2 + 20x^2y^3)\ \mathrm{d}y + (y^3 + kxy^4 - 2x)\ \mathrm{d}x = 0$$

- ☐ $k = 8$
- ■ $k = 10$
- ☐ Ninguna de las dos anteriores.

Solución: *Las derivadas dan, con $k = 10$, $3y^2 + 40xy^3$. Hay que fijarse que dy está a la izquierda y dx a la derecha.*

d) Dada la EDO

$$(3x^5y^8 - y^3)\ \mathrm{d}x + (5x^6y^7 + x^3)\ \mathrm{d}y = 0\,,$$

un factor integrante es

- ☐ xy
- ■ $x^{-3}y^{-3}$
- ☐ Ninguna de las dos anteriores.

Solución: *Derivar y comprobar.*

Ejercicio 5. Responde a las siguientes preguntas marcando solamente una casilla para cada pregunta. Cada respuesta correcta suma 6 puntos, cada respuesta errónea resta 3 puntos, no responder no penaliza.

a) ¿Qué valor tiene que tener k para que la siguiente ecuación sea exacta?

$$(3xy^2 + 20x^2y^3)\ \mathrm{d}y + (y^3 + kxy^4 - 2x)\ \mathrm{d}x = 0$$

- ☐ $k = 10$
- ☐ $k = 8$
- ☐ Ninguna de las dos anteriores.

b) Dada la EDO

$$(3x^5y^8 - y^3)\ \mathrm{d}x + (5x^6y^7 + x^3)\ \mathrm{d}y = 0\,,$$

un factor integrante es

- ☐ $x^{-3}y^{-3}$
- ☐ xy
- ☐ Ninguna de las dos anteriores.

c) La ecuación

$$x^2y - (\tfrac{1}{3}x^3 + 2y^3)y' = 0$$

- ☐ Es exacta y homogénea.
- ☐ Es exacta pero no es homogénea.
- ☐ Ninguna de las dos anteriores.

d) Dada la EDO

$$y^{6)} - 9y^{5)} + 16y^{4)} - 18y^{3)} + 29y'' - 9y' + 14y = 0\,,$$

la solución general viene dada por

- ☐ $y(x) = C_1e^{7x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} + C_4\cos(x) + C_5x\cos(x)$
- ☐ $y(x) = C_1e^{7x} + C_2xe^{7x} + C_3e^{2x} + C_4xe^{2x} + C_5\cos(x) + C_6x\cos(x)$
- ☐ $y(x) = C_1e^{7x} + C_2e^{2x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x) + C_5x\cos(x) + C_6x\sin(x)$

Ejercicio 1. (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes límites.

I. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{1-|xy|}{x-|y|}$ II. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan(x+y)\arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Sol.: I. $\nexists L$; II. $\exists L = 0$.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^6+y^6}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) (10 puntos) Obtén una expresión para $\frac{\partial f}{\partial x}$. ¿Es continua?

b) (10 puntos) Sin más cálculos, asevera o refuta la diferenciabilidad y continuidad de f.

Sol.: $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \nexists \mathrm{D}f(0,0) \Rightarrow$ ¿$f \in C^0(0,0)$?; $f \in C^1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$.

Ejercicio 3. Sea $g(x,y) = \left(x \log y, \tan \frac{x}{y}\right)$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(0,0) = (3,1)$.

a) (4 puntos) Calcula $\mathrm{D}g(\pi,1)(a,b)$ para cualquier vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

b) (4 puntos) Calcula $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(\pi,1)$.

c) (4 puntos) Calcula $\mathrm{Jac}(g^{-1})(0,0)$.

Sol.: a) $(\pi b, a-\pi b)$; b) 2π; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\pi} & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Dado el polinomio $p(x,y) = 4x^2 - kxy + y^2$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$ y donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijado, se pide:

a) (8 puntos) Determina los puntos críticos de p según los valores de k.

b) (8 puntos) Clasifica los puntos críticos de p para $k = 1, 4, 6$.

c) (12 puntos) Considera la región D delimitada por la elipse de ecuación $4x^2+y^2 = 4$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de p en D cuando $k = 1$.

Sol.: a) ▪ $k \neq \pm 4$, $\mathrm{crít}(p) = \{(0,0)\}$; ▪ $k = \pm 4$, $\mathrm{crít}(p) = \{(x, \pm 2x)\}$; b) ▪ $k = 1, 4$, mínimo(s) local; ▪ $k = 6$, punto de silla; c) ▪ mínimo global, $p(0,0) = 0$; ▪ máximo global, $p(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}) = 4$.

Ejercicio 5. En las siguientes integrales, además de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integración según sea conveniente.

a) (12 puntos) Calcula $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 6\sqrt[2]{1-x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones $x^2+y^2 = 4$ y $x^2+y^2 = 9$ y los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = x - y + 5$.

Sol.: a) 1; b) 25π.

Ejercicio 1. Considera la rosa polar de 4 pétalos, esto es, la curva determinada en coordenadas polares, (r, θ), por la ecuación $r = \sin(2\theta)$ y sea C el pétalo que dibuja en el primer cuadrante para $\theta \in [0, \pi/2]$.

a) (4 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, $\boldsymbol{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, comprueba si la curva es cerrada e indica la orientación por medio del vector tangente para $\theta = \pi/4$.

b) (4 puntos) Comprueba si el campo $\boldsymbol{F}(x, y) = y\boldsymbol{i} + 9x\boldsymbol{j}$ es conservativo.

c) (12 puntos) Calcula el trabajo $\int_C y \, \mathrm{d}x + 9x \, \mathrm{d}y$.

d) (5 puntos) ¿Concuerdan los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta.

Sol.: π

Ejercicio 2. Sea R la región del semiespacio superior encerrada por el paraboloide elíptico de ecuación $z = 1 - (\frac{x-1}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2$ y sea $S = \partial R$ su frontera.

a) (5 puntos) Siendo $S = P \cup B$, donde P es la cubierta del paraboloide y B la base, parametriza sendos objetos indicando claramente la orientación inducida.

b) (20 puntos) Calcula $\iint_S y\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ de dos formas diferentes.

Sol.: 3π con orientación ≪exterior≫.

Ejercicio 3. Dada la ecuación $y'' + 9y = 16 \sin 3x + 12 \cos 3x$, se pide:

a) (4 puntos) Clasifícala justificadamente.

b) (18 puntos) Resuélvela indicando detalladamente los pasos.

Ejercicio 4. Dada la ecuación $(x^2 + 4y^2) - xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, se pide:

a) (4 puntos) Clasifícala justificadamente.

b) (18 puntos) Resuélvela indicando detalladamente los pasos.

c) (6 puntos) Resuelve el problema de valor inicial para $y(1) = 1$.

Ejercicio 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(x)+y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. (12 puntos) Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f en el punto $(x,y)=(0,0)$. En caso de existir, escribe el gradiente de f en $(0,0)$, $\nabla f(0,0)$ y el valor de la diferencial de f en $(0,0)$ aplicada al vector $(2,-4)$,$\mathrm{d}f(0,0)(2,-4)$.

2. (16 puntos) Repite el estudio anterior en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$, justificando con detalle tu respuesta. En caso de existir, calcula $\nabla f(0,1)$ y $\mathrm{d}f(0,1)(2,-4)$ (en cuyo caso no es necesario simplificar $\nabla f(x,y)$).

3. (8 puntos) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que

$$g(0,0)=(0,1) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Jac}(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcula, si existen,

$$\nabla(f\circ g)(0,0) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Jac}(g^{-1})(0,1).$$

Ejercicio 2. Dado el polinomio $p(x,y)=3x^2-x^3+xy^2+y^2$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos críticos de p.

2. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podrías asegurar o descartar que estos sean globales?

3. (12 puntos) Considera ahora el recinto $D=[-1,1]\times[-3,3]$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de p en D.

Ejercicio 3. Se considera el cono de ecuación $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$.

1. (6 puntos) Siendo R el sólido encerrado por el cono en el semiespacio superior, estos es,

$$R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 4,\ 0\le x^2+y^2\le (z-4)^2\}$$

   describe dicho conjunto en coordenadas cilíndricas.

2. (10 puntos) Calcula el volumen de dicho sólido.

Ejercicio 1. Sea R la región del plano encerrada por la parábola $y = 2 + 3x - 2x^2$ en el primer cuadrante y sea C la curva que delimita a R (con orientación positiva).

a) (2 puntos) Describe la región R como conjunto simple e indica sus propiedades topológicas (abierto, cerrado, acotado, etc.).

b) (4 puntos) Parametriza la curva indicando si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida.

c) (14 puntos) Calcula $\int_C \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$ de dos formas diferentes.

Ejercicio 2. Dado R el tronco de paraboloide de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = 3$, sea S su superficie (con orientación exterior). Dicha superficie puede descomponerse en tapa, T, base, B, y lateral, L.

a) (4 puntos) Parametriza gráficamente L, dando el dominio para (x, y), calcula el vector perpendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) e indica si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida (ayuda: dominio anular).

b) (7 puntos) Calcula $\iint_L yz\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ directamente (ayuda: cambio a polares).

c) (7 puntos) Calcula $\iint_S yz\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ indirectamente (ayuda: cambio a cilíndricas con $0 \leq r \leq \sqrt{4-z}$).

d) (2 puntos) ¿Qué se deduce de los resultados anteriores? ¿Era de esperar?

Ejercicio 3. Estudia la existencia y unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} 2x(1-4y)\,\mathrm{d}x + (4-x^2)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

así como su posible determinación.

a) (4 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la región del plano donde existe solución y donde ésta es única.

b) (12 puntos) Halla la solución general de la ecuación aplicando el método de resolución de ecuaciones diferenciales exactas.

  I) Determina si la ecuación es exacta.

  II) En caso contrario:

  - introduce un factor integrante en la EDO;
  - establece la EDP asociada al factor integrante;
  - simplifícala y obtén una EDO bien definida para el factor integrante; y
  - determina el factor integrante (ayuda: algo al cubo).

  III) Determina la solución general de la EDO original.

c) (4 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad a lo largo de éste.

Ejercicio 4. Se quiere determinar la familia biparamétrica de soluciones de la EDO

$$2y'' - 5y' - 3y = 5\sin x + (5-7x)e^{3x}\,.$$

Sigue para ello el siguiente esquema.

a) (8 puntos) Obtén la solución general de la ecuación homogénea, esto es, $2y'' - 5y' - 3y = 0$.

b) (6 puntos) Obtén una solución particular de la ecuación no-homogénea considerando únicamente el término fuente $g_1(x) = 5\sin x$.

c) (4 puntos) Repite con $g_2(x) = (5-7x)e^{3x}$, pero sólo indicando la forma de la solución particular.

d) (2 puntos) Determina la solución general de la EDO original.

Ejercicio 1.

a) (16 puntos) Determina la existencia de los siguientes límites, en cuyo caso calcula su valor.

I. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^2 + y^4}$ II. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)y}{x^2+y^2}$

b) (8 puntos) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcula (por def.) la derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección $(2,1)$, $D_{(2,1)}f(0,0)$. No es necesario normalizar el vector.

c) (8 puntos) Repite el apartado anterior para una dirección genérica (a,b). ¿Es f diferenciable?

Ejercicio 2. Sea p el polinomio $p(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + x^2) - (\frac{1}{2}x + 8)y^2$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$.

a) (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos críticos de p. (Ayuda: en la segunda ecuación, saca factor común y no despejes x).
Sol.: Pto. silla, $(0,0)$; mínimo, $(2, \pm\sqrt{2})$.

b) (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales (independientemente de que lo hayas hecho o no), ¿podrías asegurar o descartar que estos sean globales?

c) (8 puntos) Considera ahora el recinto triangular T delimitado por las bisectrices del semiplano superior, $y = |x|$, y la horizontal $y = 1$. Justifica, sin determinarlos, la existencia de extremos globales de p en T además de su localización en la frontera o el interior.
Sol.: teorema de Weierstraß; $(2, \pm 3\sqrt{2}) \notin \operatorname{int}(T)$, por tanto, en la frontera.

d) (** puntos) Sabiendo que existe un punto crítico de p restringido a la frontera de T, (x_0, y_0), tal que $p(x_0, y_0) \approx {}^1/_8 - 8$, identifica los extremos globales de p en T. (Ayuda: no es necesario determinar (x_0, y_0)).
Sol.: Mínimo, $(x_0, 1)$ con $|x_0| < 1$; máximo $(0,0)$.

Ejercicio 3. En las siguientes integrales, además de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integración según sea conveniente.

a) (12 puntos) Calcula $\int_0^3 \int_{2y}^6 \exp(x^2/12)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Sol.: $3(e^3 - 1)$

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado bajo la función $f(x,y) = {}^{|y|}/_{(x^2+y^2)}$ y sobre la región del plano delimitada por la espiral de ecuación polar $r = \theta$, con $\theta \geq 0$, en su primer medio giro alrededor del origen.
Sol.: π

Ejercicio 1. Sea C la curva sobre la esfera de radio 1 y centro en el origen dada en coordenadas esféricas, (ρ, θ, ϕ), por las ecuaciones $\theta = 2\phi$, con $\phi \in [0, \pi]$, y $\rho = 1$.

a) (6 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, comprueba que une los polos de la esfera, calcula el vector tangente al pasar por el ecuador e indica su orientación (giro respecto al eje OZ).

b) (** puntos) Obtén una expresión simplificada para la longitud de la curva dejando la integral indicada.

Considera ahora el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (y + ze^{xz})\boldsymbol{i} + (1 + x)\boldsymbol{j} + (2 + xe^{xz})\boldsymbol{k}$.

c) (8 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de $\boldsymbol{F}$, indicando su carácter conservativo, y calcula su potencial de ser posible.
Solución: $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = (x^2 + z^2)e^{xz}$, $f = (1 + x)y + 2z + e^{xz}$

d) (8 puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ de la forma más simple posible (con los resultados obtenidos).

e) (** puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ de forma alternativa.
Solución: -4

Ejercicio 2. Sea S el balde formado por un cilindro, L, de radio 2, eje OZ, entre $z = 0$ y $z = 4$, y una base plana, B, cerrando la parte inferior. Sea C el borde, curva, superior de S. Se establece para S una orientación «exterior» y para C una orientación compatible con la de S.

a) (8 puntos) Parametriza ambos objetos, $S = L \cup B$ y C, indicando si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida.

Considera ahora el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (x - y)\boldsymbol{i} + (z + y)\boldsymbol{j} + (x - z)\boldsymbol{k}$.

b) (20 puntos) Calcula $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ de dos formas diferentes usando únicamente los objetos indicados.
Solución: 4π

Ejercicio 3. Estudia la existencia y unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} \left(4y + (1 + x)(1 - x)^3\right) \mathrm{d}x + (1 - x^2)\, \mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

así como su posible determinación.

a) (6 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la región del plano donde existe solución y donde ésta es única (ayuda: simplificar).
Solución: $y' = -\frac{4y}{1-x^2} - (1 - x)^2 \rightsquigarrow x \neq \pm 1$

b) (18 puntos) Halla la solución general de la ecuación aplicando el método de resolución de ecuaciones lineales de primer orden.

I) Escribe la EDO en forma estándar.
Solución: $y' + \frac{4}{1-x^2} y = -(1 - x)^2$

II) Introduce un factor integrante e identifica la EDO asociada.
Solución: $\mu' = \frac{4}{1-x^2}\mu$

III) Determina una solución para el factor integrante (ayuda: $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$).
Solución: $\mu(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

IV) Determina la solución general de la EDO original.
Solución: $y(x) = (x - 1)^2 \left(\frac{C}{(x+1)^2} - \frac{1+x}{3}\right)$

c) (6 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad a lo largo de éste.
Solución: $C = 4/3$, $|x| < 1 \rightsquigarrow y = \frac{(x-1)^2}{3}\left(\frac{4}{(x+1)^2} - 1 - x\right)$

Ejercicio 1. (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes límites.

I. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2y^2+(x-y)^2}$ II. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan(x+y)\arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Sol.: I. $\nexists L$; II. $\exists L = 0$.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^4}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) (10 puntos) Calcula la derivada direccional de f en $(0,0)$ en una dirección genérica $(a,b) \neq (0,0)$, esto es, $D_{(a,b)}f(0,0)$. (Ayuda: no normalizar).
Sol.: $D_{(a,b)}f(0,0) = \begin{cases} a^3/b^2, & b \neq 0; \\ \nexists, & b = 0. \end{cases}$

b) (10 puntos) Asevera o refuta la diferenciabilidad de f de dos formas diferentes.
Sol.: I. $\nexists D_{(a,0)}f(0,0)$; II. $D_{(a,b)}f(0,0)$ no lineal; III. $f \notin C^0$.

Ejercicio 3. Sea $g(x,y) = (xe^y, \pi y + \cos x)$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\pi,-1) = (2,-3\pi)$.

a) (4 puntos) Calcula $\mathrm{Jac}(g)(\pi,0)$.

b) (4 puntos) Calcula $\nabla(f\circ g)(\pi,0)$.

c) (4 puntos) Calcula $\mathrm{Jac}(g^{-1})(\pi,-1)$.

Ejercicio 4. Dado el polinomio $p(x,y) = x^3 - 2x^2y + 4y^2$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$, se pide:

a) (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos críticos de p.
Sol.: Pto. silla, $(3, \frac{9}{4})$; no concluyente, $(0,0)$.

b) (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podrías asegurar o descartar que estos sean globales?

c) (12 puntos) Considera ahora el recinto D delimitado por las rectas $x=0$, $y=0$ e $y = 1-\frac{1}{2}x$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de p en D.
Sol.: Mín. global, $p(0,0)=0$; máx. global, $p(2,0)=8$.

Ejercicio 5. En las siguientes integrales, además de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integración según sea conveniente.

a) (12 puntos) Calcula $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{\pi}{4}y^3\right)\,dy\,dx$.
Sol.: $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$ y los planos de ecuaciones $z=0$ y $z=x-y+5$.
Sol.: 25π

Ejercicio 1. Considera la rosa polar de 3 pétalos, esto es, la curva determinada en coordenadas polares, (r, θ), por la ecuación $r = \cos(3\theta)$ y sea C el pétalo que dibuja en el semiplano derecho para $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$.

a) (4 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, $\boldsymbol{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, comprueba si la curva es cerrada e indica la orientación por medio del vector tangente para $\theta = 0$.

b) (4 puntos) Comprueba si el campo $\boldsymbol{F}(x, y) = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ es conservativo.

c) (12 puntos) Calcula el trabajo $\int_C y \, \mathrm{d}x - x \, \mathrm{d}y$.

d) (5 puntos) ¿Concuerdan los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta.

Sol.: $-\pi/6$

Ejercicio 2. Considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

a) (3 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de $\boldsymbol{F}$, indicando su carácter conservativo.
Sol.: No conservativo.

Sea S la superficie dada por el cono «invertido» de ecuación $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $y, z \geq 0$ y orientación «exterior/superior».

b) (6 puntos) Parametriza S gráficamente, determina su dominio, calcula el vector perpendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) y utilízalo para indicar si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida.

c) (4 puntos) Parametriza la curva $C = \partial S$ indicando si la orientación dada por la parametrización es compatible con la de la superficie.

d) (12 puntos) Calcula $\iint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ de dos formas diferentes.
Sol.: 1 con orientación «exterior».

Ejercicio 3. Dada la siguiente EDO:

$$y' e^{x^2} = x y^2.$$

a) (5 puntos) Clasifícala de manera justificada.

b) (16 puntos) Resuélvela detalladamente considerando todas las posibles soluciones.

c) (5 puntos) Resuelve el problema de valor inicial para $y(0) = 1$.

Solución:

a) Se trata de una ecuación de variables separables, ya que se puede expresar como

$$y' = \frac{x}{e^{x^2}} y^2 = h(x) g(y),$$

con $g(y) = y^2$ y $h(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$

b) Para resolverla integraremos en ambas partes

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{x}{e^{x^2}} \, \mathrm{d}x,$$

es decir

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C^*$$

esto es

$$y(x) = \frac{2}{e^{-x^2} + C}$$

Por otra parte tenemos la solución $y = 0$.

c) Simplemete sustituimos

$$y(0) = \frac{2}{1 + C} \Rightarrow C = 1$$

por lo que

$$y(x) = \frac{2}{e^{-x^2} + 1}$$

Ejercicio 4. Responde a las siguientes preguntas marcando solamente una casilla para cada pregunta. Cada respuesta correcta suma 6 puntos, cada respuesta errónea resta 3 puntos, no responder no penaliza.

a) Dada la EDO

$$y^{5)} - 5y^{4)} + 7y^{3)} - 11y'' + 12y' + 36y = 0\,,$$

la solución general viene dada por

- ■ $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x) + C_5e^{-x}$
- □ $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3x^2e^{3x} + C_4\cos(2x) + C_5xe^{-x}$
- □ $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x) + C_5xe^{-x}$

Solución: *No hace falta hallar las raíces del polinomio característico. El número de soluciones ha de ser* 5 *(el grado de la EDO) y en las soluciones complejas senos y cosenos siempren van juntos.*

b) La ecuación

$$x^2y - (\tfrac{1}{3}x^3 + 2y^3)y' = 0$$

- □ Es exacta y homogénea.
- □ Es exacta pero no es homogénea.
- ■ Ninguna de las dos anteriores.

Solución: *Es homogénea (grado tres en ambos lados), pero no es exacta ya que las derivadas se diferencian en el signo.*

c) ¿Qué valor tiene que tener k para que la siguiente ecuación sea exacta?

$$(3xy^2 + 16x^2y^3)\,\mathrm{d}y + (y^3 + kxy^4 - 2x)\,\mathrm{d}x = 0$$

- ■ $k = 8$
- □ $k = 10$
- □ Ninguna de las dos anteriores.

Solución: *Las derivadas dan, con* $k = 8$, $3y^2 + 32xy^3$. *Hay que fijarse que* dy *está a la izquierda y* dx *a la derecha.*

d) Dada la EDO

$$(3x^5y^9 - y^4)\,\mathrm{d}x + (5x^6y^8 + x^3y)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

un factor integrante es

- ■ $x^{-3}y^{-4}$
- □ x
- □ Ninguna de las dos anteriores.

Solución: *Derivar y comprobar.*

Ejercicio 1. (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes límites.

I. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x+y)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2}$ II. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2-|x|-|y|}{x^2+y^3}$

Sol.: I. $\exists L = 0$; II. $\nexists L$.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por la siguiente expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) (10 puntos) Obtén una expresión para $\frac{\partial f}{\partial x}$. ¿Es continua?

b) (10 puntos) Sin más cálculos, asevera o refuta la diferenciabilidad y continuidad de f.

Sol.: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Ejercicio 3. Sea $g(x,y) = \left(x\tan y, \log\frac{x}{y}\right)$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(0,0) = (3,\pi^2)$.

a) (4 puntos) Calcula $\mathrm{D}g(\pi,\pi)(a,b)$ para cualquier vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

b) (4 puntos) Calcula $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(\pi,\pi)$.

c) (4 puntos) Calcula $\mathrm{Jac}(g^{-1})(0,0)$.

Sol.: a) $(\pi b, (a-b)/\pi)$; b) 2π; c) $\dfrac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 1 & \pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Dada la función $f(x,y) = xye^{x+y}$ definido sobre todo $\mathbb{R}^2$, se pide:

a) (16 puntos) Determina y clasifica todos los puntos críticos de f.

b) (12 puntos) Considera la región T encerrada por $y = 2|x|$ y la recta $y = 2$. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de f en T.

Sol.: a) ▪ $(0,0)$, punto de silla; ▪ $(-1,-1)$, máximo local; b) ▪ mínimo global, $f(-1,2) = -2e$; ▪ máximo global, $f(1,2) = 2e^3$.

Ejercicio 5. En las siguientes integrales, además de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integración según sea conveniente.

a) (12 puntos) Calcula $\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{1} 4\sqrt[3]{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$ y los planos de ecuaciones $z=0$ y $z=x-y+5$.

Sol.: a) $3(2\sqrt{2}-1)$; b) 25π.

Ejercicio 1. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = ye^{x-2z}(y\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k})$$

y sea E la curva parametrizada por

$$\boldsymbol{r}(t) = 2^{1+t}\boldsymbol{i} + (\cos\tfrac{\pi}{2}t - 3\sin\tfrac{\pi}{2}t)\boldsymbol{j} + (1+t^2)\boldsymbol{k}$$

con $t \in [0,1]$.

a) (4 puntos) Comprueba si el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

b) (8 puntos) Calcula $\int_E \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Por otro lado, sea C la curva formada por los bordes laterales y superior del rectángulo de esquinas diagonalmente opuestas $(1,0)$ y $(3,1)$.

c) (10 puntos) Sin parametrizar C, pero asignándole orientación, calcula $\int_C y\ \mathrm{d}x + \frac{1}{x}\ \mathrm{d}y$.

Sol.: b) $f(4,-3,2) - f(2,1,1) = 8$; c) $8/3$, con $C = (1,0) \to (1,1) \to (3,1) \to (3,0)$.

Ejercicio 2. Considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

a) (3 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de $\boldsymbol{F}$, indicando su carácter conservativo.

Sea S la superficie dada por el cono «invertido» de ecuación $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ con $y, z \geq 0$ y orientación «exterior/superior».

b) (6 puntos) Parametriza S gráficamente, determina su dominio, calcula el vector perpendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) y utilízalo para indicar si la orientación dada por la parametrización coincide con la establecida.

c) (4 puntos) Parametriza la curva $C = \partial S$ indicando si la orientación dada por la parametrización es compatible con la de la superficie.

d) (15 puntos) Calcula $\iint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ de dos formas diferentes.

Sol.: a) No conservativo; d) 1 con orientación «exterior».

Ejercicio 3. Dada la ecuación

$$y^{(4)} + 2y'' + y = e^x\,,$$

se pide:

a) (4 ptos) Clasifícala justificadamente.

b) (18 ptos) Resuélvela indicando detalladamente los pasos.

Ejercicio 4. Dada la ecuación

$$(5x+4y)\,\mathrm{d}x + (4x-8y^3)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

se pide:

a) (4 ptos) Clasifícala justificadamente.

b) (18 ptos) Resuélvela indicando detalladamente los pasos.

c) (6 ptos) Resuelve el problema de valor inicial para $y(0) = -1$.

Ejercicio 1. Estudia la existencia o inexistencia del siguiente límite. Calcula su valor en caso de que sea posible.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5(x^3+y^2)+3(y^3+x^2)}{3x^2+5y^2}$$

(3 puntos)

Ejercicio 2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^3y+xy^2$, y sean $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ funciones tales que

$$x(7,8)=1,\quad y(7,8)=-1,\quad \vec{\nabla}x(7,8)=(2,-2),\quad \vec{\nabla}y(7,8)=(0,3)$$

Consideremos la función compuesta $g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$.

a) Sea $\mathcal{C}$ la curva de nivel de $g(s,t)$ que pasa por el punto $(s,t)=(7,8)$. Obtén un vector unitario y perpendicular a $\mathcal{C}$. **(1.5 puntos)**

b) Obtén un vector cualquiera $\vec{u}\neq\vec{0}$ que satisfaga $D_{\vec{u}}g(7,8)=0$ **(1 punto)**

c) Sea $h(s,t)=s\cdot g(s,t)$, y sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por $w=h(s,t)$. Obtén la expresión del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $(s,t)=(7,8)$. **(1.5 puntos)**

Ejercicio 3. Sea $a>0$ y sea $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle/ ax^2+y^2\leq 1\right\}$. Sea $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ una función dada por $f(x,y)=e^{x^2y^2}$.

a) Calcula el valor de a para que f alcance un extremo absoluto en cierto punto $\vec{r}_1=(x_1,y_1)$, con $x_1=3,\ y_1>0$. **(1.5 puntos)**

b) Identifica todos los máximos y mínimos absolutos de la función f bajo las hipótesis del apartado anterior. **(1.5 puntos)**

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{C}$ una curva parametrizada por $\vec{\gamma}(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$

1. Calcula la longitud de $\mathcal{C}$ **(OBLIGATORIO: 2 puntos)**
2. Sea $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$. Calcula $\int_C f(\vec{r})\, ds$ **(OPCIONAL: 2 puntos)**
3. Sea $\vec{F}(\vec{r}) = (e^x + y,\ e^y + x)$. Calcula $\int_C \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$
   (OBLIGATORIO: 2 puntos)

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ x^2 + y^2 = z^6,\ z \in [0, 1]\right\}$

1. Obtén el área de $\mathcal{S}$ **(OPCIONAL: 2 puntos)**
2. Considera ahora la superficie cerrada $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_B$, donde $\mathcal{S}_B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1\right\}$.
   Sea el campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y, z) = \left(x^3 z + y^2,\ y^3 z + x^2,\ e^{x+y}\right)$.
   Calcula $\iint_{\overline{\mathcal{S}}} \vec{F}(\vec{r})\, \hat{N}\, dS$ **(OBLIGATORIO: 2 puntos)**

Ejercicio 3. **(OPCIONAL)**

1. Consideremos la ecuación diferencial $y' = \frac{x-y}{x^4}$.
   - a.1) Realiza un esbozo del campo de pendientes. **(0.5 puntos)**
   - a.2) Dada la condición inicial $y(x_0) = y_0$, ¿para qué valores de x_0, y_0 podemos asegurar que existe una solución y que además es única? **(0.5 puntos)**
2. Consideremos la ecuación diferencial $y' = \frac{y^3 x + 5x}{y^2(x^2+1)}$. Encuentra la solución general y las soluciones constantes si las hubiera. **(1 punto)**

Ejercicio 1 (Obligatorio).
Estudia la existencia o inexsitencia de los siguientes límites. **(1 punto/apartado)**

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3+2y^3}$
2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$
3. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^8+y^4}$

Ejercicio 2. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = 2x^3 + \frac{y^3}{3} - xy^2 - x.$$

Identifica todos los puntos críticos de f y clasifícalos en máximos, mínimos relativos y puntos de silla. **(3.5 puntos)**

Ejercicio 3. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuya dirección de máximo crecimiento en el punto $(8,6)$ es la del vector $(1,2)$. Además, el valor máximo que alcanza la derivada direccional es 5. Sean ahora dos funciones $x(s,t,u)$, $y(s,t,u)$ dadas por

$$x(s,t,u) = s + t^2 + u, \quad y(s,t,u) = s^2 + t + u,$$

y sea g la función compuesta $g(s,t,u) = f(x(s,t,u), y(s,t,u))$. Calcula la derivada direccional de g en el punto $(1,2,3)$ y en la dirección del vector $(1,1,-1)$ **(3.5 puntos)**

Ejercicio 4. Sean Q_1, Q_2 las regiones del espacio dadas por

$$Q_1 = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2+y^2 \le z^2, \quad z \in [0,1]\right\}, \quad Q_2 = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2+y^2 \le (1-z)^2, \quad z \in [0,1]\right\}.$$

1. Calcula $\iiint_{Q_1} x^2 dV$ **(1.5 puntos)**
2. Calcula el volumen de $Q_1 \cap Q_2$. **(2 puntos)**

Ejercicio 1 (**Obligatorio**). Considera el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(z\, e^{xz} + y,\ z\, e^{yz} + x,\ x\, e^{zx} + y\, e^{yz}\right).$$

Calcula $\int_C \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$ donde C es una curva que comienza en $(5, 1, 0)$, y que termina en $(2, 2, 1)$.

(3 puntos)

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{S} = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \big/ z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0\right\}$, y sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcula $\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}(\vec{r})\, \hat{N}\, dS$ **(3.5 puntos)**

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{S} = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \big/ z = \frac{x^4}{4} + y, \quad y \leq x^2 \leq 1, \quad x, y \geq 0\right\}$.

1. Obtén un vector normal a $\mathcal{S}$ en un punto arbitrario $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ **(0.5 puntos)**
2. Calcula $\iint_{\mathcal{S}} f(\vec{r})\, dS$, donde f es una función escalar dada por **(3 puntos)**

$$f(x, y, z) = \frac{x^5 y}{z - y}.$$

Ejercicio 4. Encuentra la solución general de la siguiente ecuación diferencial, así como la solución particular que pasa por el punto $(x, y) = (0, 0)$, e indica el dominio de dicha solución particular.

$$y' - e^{-y} x^2 = x^2$$

(3.5 puntos)

Ejercicio 1. Sea la función f en dos variables dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{a(-|x|-|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ b, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Hallar la relación que deben satisfacer a y b para que existan $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$. ¿Cuál es el valor de $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$?

2. Determinar si f es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio 2. Sea la función

$$f(x,y)=5+\sqrt{-9-x^2-6x-y^2-2y}$$

1. Determinar el dominio de f. ¿Es cerrado y acotado o abierto?

2. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado anterior, clasificar los puntos críticos de f o hallar sus valores máximo y mínimo absolutos que alcanza en su dominio.

Ejercicio 1. Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

1. Sean el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(ye^{xy}+\frac{e^x}{(1+e^{2x})},xe^{xy}+\frac{e^y}{(1+e^y)^2}\right)$$

   y la curva C cuya ecuación vectorial viene dada por

$$\mathbf{r}(t)=(1+t^2,1+t),\quad 0\le t\le 1$$

   Calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

2. Calcular

$$\int_C -\frac{3x^2}{z}dx-\frac{3y^2}{z}dy+\frac{x^3+y^3}{z^2}dz$$

   siendo C la curva de ecuación vectorial $\mathbf{r}(t)=\left(\frac{t}{1+t^4},-\frac{2t}{1+t^2},\frac{1+t^2}{(1+t^4)^2}\right)$, $0\le t\le 1$

Ejercicio 2. Teorema de Green:

1. Evaluar la integral de línea del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x^3+y^3}{3},\frac{y^3-x^3}{3}\right)$$

   siendo C la trayectoria definida como $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\le x^2+y^2\le 9, x\ge 0, y\ge 0\}$

2. Calcular el área de la región acotada por la curva C de ecuación

$$4x^2+9y^2=1,\quad x\ge 0$$

Ejercicio 3. Teorema de Stokes:

1. Calcular el rotacional del campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(y^2,3-yx,\frac{z^2}{2}\right)$$

2. Calcular el flujo de $\nabla\times\mathbf{F}$ a través de la superficie S definida como $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2,\ -2\le z\le 0\}$

Ejercicio 4. Teorema de la divergencia:

1. Calcular la divergencia del campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(2x^3y,-3x^2y^2,2z\right)$$

2. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través del sólido acotado por la superficie S de ecuación $z=x^2+y^2-4x$ y el plano xy

Ejercicio 1 (1 punto). Calculad la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$ en el punto $(0,1,\pi/2)$ en la dirección dada por la curva $r(t) = (\cos((\pi/2)t), \sin((\pi/2)t), (\pi/2)t)$.

Ejercicio 2 (2 puntos). Hallad los óptimos globales de $f(x,y) = (x-4)^2 + y^2$ en la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $y = x^3$ e $y = 4x$.

Ejercicio 3 (2 puntos). Hallad los óptimos locales de $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2 - 6x + 2$, donde k es una constante.

Ejercicio 4 (1 punto). Calculad

$$\oint_C (3x^2 + y)dx + (2x + y^3)dy,$$

donde C es la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Ejercicio 5 (1 punto). Calculad

$$\int_C \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln(x) - 2)dy,$$

donde C es el trozo de la parábola $x = y^2$ que va de $(1,1)$ a (e^2, e).

Ejercicio 6 (1 punto). Dado el sólido T limitado superiormente por el cono $z^2 = x^2+y^2$, inferiormente por el plano $z = 0$, y en sus lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4x$, hallad el volumen de T.

Ejercicio 7 (1 punto). Calculad el flujo saliente de $v(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través del sólido T limitado superiormente por el plano $z = 4$, inferiormente por el plano xy, y a sus lados por el cilindro $x^2+y^2 = 4$.

Ejercicio 8 (1 punto). Calculad

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy,$$

donde $f(x,y) = 3xy^2 - y$, y Ω es la región acotada del plano delimitada por las rectas $x = -1$, $x = 1$, y las curvas $y = |x|$, $y = -|x|$.

Ejercicio 1 (1 punto). Calculad la derivada direccional de $f(x, y, z) = x^2 + 2xyz - yz^2$ en el punto $(1, 1, 2)$ en una dirección paralela a la recta

$$3y + z = 5, \ x - 2y = -3.$$

Ejercicio 2 (2 puntos). Hallad los óptimos globales de $f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ejercicio 3 (2 puntos). Hallad los óptimos locales de $f(x, y) = x^2 + kxy + 4y^2 - 3y + 1$, donde k es una constante.

Ejercicio 4 (1 punto). Sea $a > 0$ una constante. Calculad

$$\oint_C (x+y)dx + (y^2 - x)dy,$$

donde C es la curva cerrada que parte de $(-a, 0)$, va hasta $(a, 0)$ a lo largo del exercisee x, y vuelve a $(-a, 0)$ por la parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Ejercicio 5 (1 punto). Calculad

$$\int_C \left(e^{2y} - 2xy\right) dx + (2xe^{2y} - x^2 + 1)dy,$$

donde C es la curva dada por $r(t) = (te^t, 1 + t)$, $t \in [0, 1]$.

Ejercicio 6 (1 punto). Calculad

$$\iiint_T e^{g(x,y,z)} dxdydz,$$

donde $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, y T es el sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ejercicio 7 (1 punto). Calculad el flujo saliente de $v(x, y, z) = (xy, xz, yz)$ a través del sólido T del primer octante limitado inferiormente por el plano xy y superiormente por el plano $x + y + z = 1$.

Ejercicio 8 (1 punto). Calculad el volumen del sólido T limitado superiormente por $z = 1 + xy$, e inferiormente por el triángulo de vértices $(1, 1, 0)$, $(4, 1, 0)$, y $(3, 2, 0)$.

Ejercicio 1. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función en varias variables dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(Ayuda: $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ *y* $0 \leq (\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq 2$*)*

Ejercicio 2. Sea $f(x,y,z) = \frac{z^3}{\sec(x^2-xy)}$. Se pide:

1. Calcular $\nabla f(s,t)$ teniendo en cuenta que $x = \log(st)$, $y = s^2 + t^2$ y $z = t^3$.
2. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(t,s) = (1,1)$.

Ejercicio 3. La derivada direccional de una función diferenciable $D_{\hat{\mathbf{u}}}f(x_0,y_0,z_0)$ toma los valores -1, 2, -1 en la dirección de los vectores $(0,-1,1)$, $(0,1,0)$ y $(-1,1,0)$. Hallar el valor del gradiente de f en el punto (x_0,y_0,z_0).

Ejercicio 4. Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$$

Ejercicio 1. Sea la curva con parametrización

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

Calcular la integral curvilínea

$$\int_C \pi yz \cos(\pi x)\, dx + z \sin(\pi x)\, dy + y \sin(\pi x)\, dz$$

haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo Integral en varias variables.

Ejercicio 2. Haciendo uso del Teorema de Green, evaluar la integral curvilínea

$$\int_C -\frac{1}{2} y^2 x\, dx + yx\, dy$$

donde $\mathcal{C}$ es el contorno de la región comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la elipse $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ sobre el semieje y positivo.

Ejercicio 3. En cada aitemado se pide lo siguiente:

1. Calcular el rotacional del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(z^2 - 1, z - xy^3, x + y\right)$$

2. Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar el flujo del rotacional de **F**, siendo S la porción de superficie $x = 7 - 4z^2 - 4y^2$ acotada por el plano $x = 3$ con la orientación en la dirección negativa del eje x

Ejercicio 4. En cada aitemado se pide:

1. Calcular la divergencia del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(yx^2, -xy^2 - yz^3, zx^3 + \frac{1}{4}z^4\right)$$

2. Calcular el flujo de **F** a través del sólido acotado por la porción esfera de radio 4 centrada en el origen con $y, z \geq 0$

Ejercicio 1. Sea la función f en dos variables dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^a \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ k, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $a, k \in \mathbb{R}$.

1. Hallar el valor de k y el rango de valores de a para que f sea continua en $(0,0)$.
2. Determinar el rango de valores de a para que exista la derivada direccional de f a lo largo de cualquier dirección, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$.
3. Escoger el primer valor entero positivo de a en el aitemado (b) y estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 2. Sea la función

$$f(x,y) = x(x^2-4)y^2 + x(4-x^2)$$

1. Calcular los puntos críticos de f.
2. Clasificar los puntos obtenidos en el aitemado anterior.

Ejercicio 3. Sea Ω la región del plano situada en el primer cuadrante y acotada por las curvas $x^2 + y^2 = 6$ y $xy = 1$.

1. Dibujar la región Ω y obtener los puntos de intersección de ambas curvas.
   (Ayuda: el polinomio $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$ contiene dos puntos de intersección que no están en el primer cuadrante)
2. Calcular la integral doble $\iint_\Omega x \, dx dy$

Ejercicio 4. Calcular el volumen del sólido acotado superiormente por el plano $z = -y + 3$, inferiormente por el plano $z = y - 3$ y lateralmente por el plano $y = 0$ así como los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 1. Sea el campo vectorial, **F**, dado por

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{6x^2y^3 + 3x^4y + 3y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}\mathbf{i} + \frac{3x^5 + 3xy^4 + 6y^2x^3}{y^4 + 2y^2x^2 + x^4}\mathbf{j}$$

Se pide:

1. Calcular la circulación de **F** a lo largo de la curva $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0\}$.

2. Calcular la circulación del campo vectorial **F** a lo largo de la curva $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + 2y^2 - 6x + 5 = 0\}$ considerando la curva $C = C_1 \cup C_2$.

Ejercicio 2. Sea la superficie $S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \, 0 \le z \le 1\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \, z \ge 1\}$$

y el campo vectorial, **F**, dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + z + 1, xy + y^2, x^2 + y^2)$$

Se pide:

1. Calcular el flujo de **F** a través de S.

2. Calcular el flujo de **F** a través de la superficie cerrada $S_c = S \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = 0\}$.

Ejercicio 3. Sea el campo vectorial, **F**, dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + (x^2 + y)\mathbf{j} + (x + z^2)\mathbf{k}$$

Se pide:

1. Calcular el flujo del campo vectorial $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la superficie $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \, 0 \le z \le 2\}$.

2. Calcular el flujo de **F** a través de la superficie $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4, z = 2\}$ considerando la superficie cerrada $S_c = S_1 \cup S_2$.

Ejercicio 4. Escoger **una** EDO de primer orden, **otra** de segundo orden y obtener la solución general de cada una de ellas:

1. $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$
2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
3. $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$
4. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\sin(2x)$
5. $y'' + 4y = \tan(2x)$
6. $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

Ejercicio 1. Sea la función f en dos variables dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2-2y+1}, & (x,y) \neq (0,1) \\ 1-e^{-k}, & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Hallar el valor de k para que f sea continua en $(0,1)$.
2. Calcular la derivada direccional de f en el punto $(0,1)$ a lo largo de cualquier dirección, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$. ¿Existen $f_x(0,1)$ y $f_y(0,1)$? En caso afirmativo, ¿cuál es su valor?

100 Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,1)$.

Ejercicio 2. Sea la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1$$

y la región del plano, R, cerrada y acotada dada por la semicircunferencia de ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 4$ y las rectas $y + x = -1$ e $y - x = -1$.
Se pide:

1. Calcular los puntos críticos de f en el interior y en el borde de R (si los hubiera).
2. Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre R.

Ejercicio 3. Sea Ω la región del plano situada en el primer cuadrante y acotada por las curvas $e^{x-1} - y = 0$, $y - e^{-x} = 2$ y el eje y.

1. Esbozar la región Ω y obtener los puntos de intersección entre las curvas que la delimitan.
2. Calcular la integral doble $\iint_\Omega e^x \, dA$

Ejercicio 4. Sea el sólido, T, acotado por los cilindros $z^2 + (y-2)^2 = 4$, $z^2 + (y-2)^2 = 1$ y los planos $x = -3$ y $x = 4$.
Se pide:

1. Describir el sólido T en coordenadas cilíndricas y esbozar su gráfica.
2. Calcular el volumen de T.

Ejercicio 1. Sea el campo vectorial, **F**, dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)}\mathbf{i} + 2ye^{-(x^2+y^2)}\mathbf{j}$$

Se pide:

125 Determinar si **F** es o no conservativo. En caso afirmativo, calcular su función potencial, f.

125 Calcular la circulación del campo vectorial **F** a lo largo de la curva C compuesta por el segmento de recta de $(1, -1)$ a $(1, 1)$, la mitad superior de una circunferencia de radio 1 y centro $(0, 1)$ y el segmento de recta de $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Ejercicio 2. Sea la superficie S resultante de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z - x - y - 2 = 0$, y el campo vectorial, **F**, dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z + 1, y + z - 2, x + 2y + 3)$$

Se pide:

125 Calcular el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de S de forma directa.

125 Calcular el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de S haciendo uso del teorema adecuado.

Ejercicio 3. Sea el campo vectorial, **F**, dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(yz + \frac{x^3}{3}\right)\mathbf{i} - \left(x^2 z - \frac{y^3}{3}\right)\mathbf{j} + \left(x^2 y^4 + \frac{z^3}{3}\right)\mathbf{k}$$

Se pide:

1. Calcular el flujo de **F** a través del sólido tetraédrico situado en el primer octante y acotado superiormente por el plano $z - x - y = 1$
2. Calcular el flujo de **F** a través de la porción de bola situada en el tercer octante de radio 3 y centrada en el origen.

Ejercicio 4. Obtener la solución general de cada una de las EDOs:

1. $(2x^2 + y^2)dy + \frac{xy}{3}dx = 0$
2. $xyy' - y^2 = x^4 \sin(x)$
3. $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}\cos(x)$ *(método de los coeficientes indeterminados)*
4. $y'' + 9y = e^{-x}$ *(método de variación de las constantes)*

Ejercicio 1. *(1 punto)* Calcula, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}.$$

Ejercicio 2. *(1 punto)* Estudia la continuidad de la siguiente función en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^4 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 3. *(2 puntos)* Estudia la diferenciabilidad de la siguiente función en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 4. *(total: 2,5 puntos)* Sea

$$f\colon R = [-4,4]\times[-4,4] \to \mathbb{R} \quad \text{con } f(x,y) = x^4+y^4-2x^2-y^2.$$

- **(a)** *(2 puntos)* Encuentra y clasifica todos los puntos críticos de f.
- **(b)** *(0,5 puntos)* Justifica si el máximo relativo encontrado en (a) también es el máximo absoluto de f en R o no.

Ejercicio 5. *(total: 3,5 puntos)* Sea Ω la región del plano XY limitada por $g_1(x) = \dfrac{x^2}{4}$ y $g_2(x) = 2 - \dfrac{x^2}{4}$ (los puntos en las curvas pertenecen a Ω). Sea

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{con } f(x,y) = |x|e^{2y}.$$

- **(a)** *(1,5 puntos)* Calcula el área de Ω mediante una integral doble.
- **(b)** *(2 puntos)* Calcula el volumen entre la gráfica de $f(x,y)$ y el plano XY mediante una integral doble o triple.

Ejercicio 1. *(1 punto)* Sea $f(x, y) = x^3 y$ y la curva dada por $x^2 + y^2 = 4$ y recorrida desde $(0, 2)$ hasta $(-2, 0)$. Calcular la integral de f a lo largo de esta curva.

Ejercicio 2. *(2 puntos)* Calcular el trabajo realizado por un cuerpo en el campo de fuerza $F(x, y) = (x \sin(y), y)$ que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(2, 4)$.

Ejercicio 3. *(2 puntos)* Evaluar la integral de superficie aplicando el teorema de la divergencia de Gauss para $F(x, y, z) = (\cos(y), \sin(x), \sin(z))$, siendo S la superficie que encierra la región especificada por $x^2 + y^2 \leq 4$, $|z| \leq 2$.

Ejercicio 4. *(total: 3 puntos)*

(a) *(2 puntos)* Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 \sin(x) = 0.$$

(b) *(0,5 puntos)* Comprobar la solución encontrada en (a).

(c) *(0,5 puntos)* Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 \sin(x) = 0, \qquad y(0) = 3.$$

Ejercicio 5. *(2 puntos)* Hallar la solución particular del problema de valor inicial

$$y''' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -9.$$

Ejercicio 1. *(total: 4 puntos)* Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

se pide:

(a) *(1 punto)* Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$.

(b) *(1 punto)* Calcular el gradiente de $f(x,y)$ en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) *(1 punto)* Calcular las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.

(d) *(1 punto)* Justificar si $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ o no. En caso afirmativo, calcular el plano tangente en $(0,0)$.

Ejercicio 2. *(1 punto)* Hallar y clasificar los puntos críticos de la función dada por $f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$.

Ejercicio 3. *(2,5 puntos)* Calcular la integral

$$I = \iint_D x^2 y \, \mathrm{d}(x,y)\,,$$

siendo D la región del segundo cuadrante encerrada entre $y = -x$ e $y = x^2$.

Ejercicio 4. *(2,5 puntos)* Calcular mediante una integral triple el volumen de la región Ω limitada por las superficies

$$x^2 + y^2 = 2, \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 0.$$

Ejercicio 1. *(2,5 puntos)* Utilizando una integral de línea, calcular la longitud de la curva σ que va del punto $(1,0)$ al punto $(0,1)$ por línea recta y luego de $(0,1)$ a $(1,0)$ por el arco de una circunferencia de radio 1.

Ejercicio 2. *(3 puntos)* Evaluar la integral de superficie $\iint_\Phi x\, d(u,v)$, siendo Φ el trozo de la superficie esférica de radio 2 del primer octante. Identidad útil: $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$.

Ejercicio 3. *(3 puntos)* Hallar mediante el método "variación de constante" la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = x + e^{-2x}.$$

Ejercicio 4. *(total: 1,5 puntos)*

(a) *(0,5 puntos)* Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

(b) *(1 punto)* Hallar la solución particular del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$$

Ejercicio 1. *(2 puntos)* Calcula, si existen, los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+xy^2}{x^2+y^2}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}$

Ejercicio 2. Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y(x-y)}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

(a) *(1.5 puntos)* Estudia la continuidad de la función en $\mathbb{R}^2$.

(b) *(1 punto)* Calcula las derivadas parciales de f en el $(0,0)$.

(c) *(0.5 puntos)* Estudia la diferenciablidad de f en el $(0,0)$.

Ejercicio 3. *(2 puntos)* Calcula y clasifica todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy\,.$$

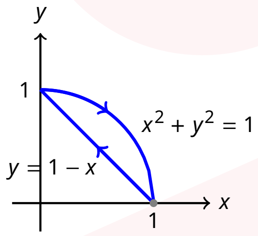
Ejercicio 4. *(2 puntos)* Calcula la integral de

$$f(x,y)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad y\leq x^2\,, \\ 4xy & \text{si} \quad y>x^2\,, \end{cases}$$

en el rectángulo $R=[0,3]\times[0,1]$.

Ejercicio 5. *(1 punto)* Utiliza una integral triple para calcular el volumen de un cilindro de altura 5 y radio de la base 2.

Ejercicio 1. **(a)** *(1 punto)* Parametriza, con la orientación adecuada, la siguiente curva α con punto inicial $(1,0)$.



(b) *(1 punto)* Calcula la longitud de la curva α utilizando una integral de línea.

(c) *(1.5 puntos)* Comprueba si el campo

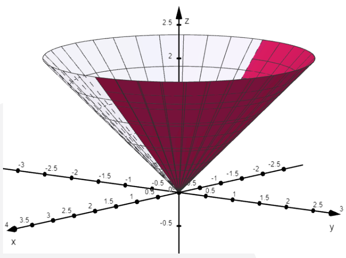
$$F(x,y) = (6xy + y - 1,\ 3x^2 + x + 2)$$

es conservativo y calcula, si existe, una función potencial.

(d) *(0.5 puntos)* Calcula $\displaystyle\int_\alpha F$.

Ejercicio 2. **(a)** *(0.5 puntos)* Parametriza la siguiente superficie Φ.

$$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\,\}$$



Trozo del cono con

- vértice en el origen de coordenadas,
- altura 2,
- ecuación de la base $x^2 + y^2 = 4$,
- $y \geq 0$.

(b) *(1.5 puntos)* Calcula $\displaystyle\iint_\Phi F$ siendo $F(x,y,z) = (x,y,1)$.

Ejercicio 3. **(a)** *(2 puntos)* Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x + e^{-2x}$$

mediante el método “variación de constante”.

(b) *(0.5 puntos)* Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

(c) *(0.5 puntos)* Hallar la solución particular del problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 3, \end{cases}$$

utilizando el resultado de (b).

Ejercicio 4. *(1 punto)* Utilizando el método de diferencias divididas de Newton, dar el polinomio interpolador $P(x)$ para los datos de la tabla abajo y el valor de $P(14.1)$ redondeado a 4 decimales.

x	0	2	15	25	30
y	0	0.3817	0.1215	−0.7468	−0.2070

Ejercicio 1. (*3 puntos*) Calcula, si existen, los siguientes límites.

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\log(\frac{x}{2}) + \log(y)}{x+y-3}$ **(b)** $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^3}{x^2+y^2}$

Ejercicio 2. (*2.5 puntos*) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Calcula, si existen, las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(b) Estudia la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 3. (*1.5 puntos*) Sea la función

$$f(x,y) = (x+y)e^{3y}\,.$$

(a) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1,0)$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie generada por f en el punto $(-1,0)$.

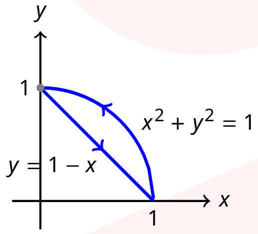
Ejercicio 4. *(3 puntos)* Calcula

$$\iint_R \frac{xy}{x^2+y^2}\, d(x,y)$$

siendo R el recinto del primer cuadrante limitado por

$$x^2+y^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad x^2+y^2 = 4\,.$$

Ejercicio 1. **(a)** *(0.5 puntos)* Parametriza, con la orientación adecuada, la siguiente curva α con punto inicial $(0,1)$.



(b) *(1 punto)* Calcula $\int_\alpha f$ siendo $f(x,y) = 2x + 1$.

Ejercicio 2. *(3 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(a) Si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo conservativo y

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{con } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\beta(t) = (0, t) \quad \text{con } t \in [-1, 1],$$

entonces $\int_\alpha F = \int_\beta F$.

(b) Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2 - x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 5 - x^2.$$

Si α una curva cerrada simple de $\mathbb{R}^2$ orientada positivamente que encierra un recinto R de área 3, entonces $\int_\alpha F = 3$

Ejercicio 3. **(a)** *(0.5 puntos)* Parametriza la superficie lateral de un cilindro vertical de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ entre los planos $z = -2$ y $z = 1$.

(b) *(1 punto)* Utiliza una integral de superficie para calcular el área de la superficie del apartado anterior.

Ejercicio 4. **(a)** *(1,5 puntos)* Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y^2 \sin(x) = 0.$$

(b) *(0.5 puntos)* Comprobar la solución encontrada en (a).

(c) *(0.5 puntos)* Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y^2 \sin(x) = 0, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Ejercicio 5. **(a)** *(1 punto)* Utilizando el método de Lagrange y para los datos de la tabla abajo, dar el polinomio interpolador $P(x)$ de forma expandida y con un único término por grado del polinomio. Los coeficientes de $P(x)$ deben estar redondeados a 6 decimales.

x	0	2	15	25
y	0	0.3817	0.1215	−0.7468

(b) *(0,5 puntos)* Dar el valor de $P(20)$ redondeado a 4 decimales.

Ejercicio 1. *(2 puntos)* Calcula, si existen, los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2(y-1)-y^2}{2x^2+y^2}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y)-y}{|x|+|y|}$

Ejercicio 2. Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

(a) *(1 punto)* Calcula todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(b) *(1 punto)* Calcula $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ en todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(b) *(0.5 puntos)* Estudia la diferenciablidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 3. Sea la función

$$f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2\,.$$

(a) *(1 punto)* Calcula todos los puntos críticos.

(b) *(0.5 puntos)* Clasifica el punto crítico $(1,-1)$.

(c) *(0.5 puntos)* Justifica que $(0,0)$ es punto de silla.

Ejercicio 4. Sea R el recinto del primer cuadrante limitado por $x=0$, $y=1$, $y=2$ e $y=x^2$.

(a) *(0.5 puntos)* Escribe el conjunto R como horizontal o verticalmente simple.

(b) *(1 punto)* Calcula $\displaystyle\iint_R x e^{-\frac{x^2}{y}}\, d(x,y)$.

Ejercicio 5. *(1.5 puntos)* Sea Ω el recinto del primer cuadante limitado por las circunferencias centradas en $(0,0)$ y de radios 1 y 2. Calcula el área de Ω utilizando una integral doble.

Ejercicio 6. *(0.5 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

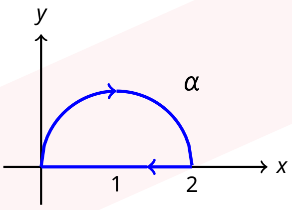
(a) $x=5$ es punto de acumulación de $T=[-2,3)\cup\{\,5\,\}$.

(b) El conjunto $W=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2\leq y<3\,\}$ está acotado.

Ejercicio 1. *(1.5 puntos)* Calcula $\int_\alpha F$ siendo $F(x,y) = (2xy-2,\ x^2+1)$ y

$$\alpha(t) = \left(\log(t^2+1),\ \frac{6t(t-1)}{t^2+7}\right) \quad \text{con} \quad t \in [0,1]\,.$$

Ejercicio 2. *(1.5 puntos)* Calcula, de dos formas distintas, $\int_\alpha F$ siendo $F(x,y) = (-y,\ x-1)$ y



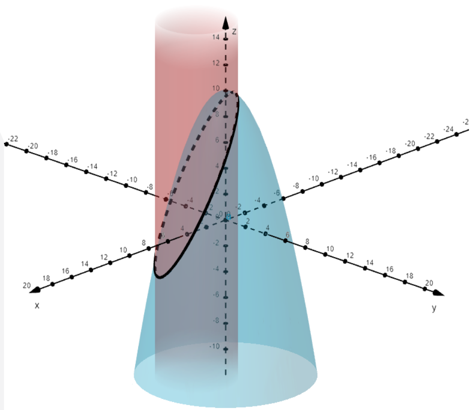
Ejercicio 3. Sea la superficie

$$T = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2,\ x \le 0,\ -2 \le z \le 3 \,\}\,.$$

(a) *(0.5 puntos)* Parametriza T.

(b) *(1 punto)* Calcula el área de T con integrales.

Ejercicio 4. *(1.5 puntos)* Calcula la integral del campo $F(x,y,z) = (x,z,2y)$ sobre la curva (con orientación positiva) obtenida al intersecar el paraboloide elíptico $z = 10 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ y el cilindro vertical cuya base es una circunferencia centrada en $(2,-1)$ y de radio 3.



Ejercicio 1. *(2 puntos)* Calcula, si existen, los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,y\log(x^2+y^2)$

Ejercicio 2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^3 - x^6 y}{(x^4+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) *(1 punto)* Estudia la continuidad de $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ en $(0,0)$.

(b) *(0.75 puntos)* Justifica si f es diferenciable en $(0,0)$.

(c) *(0.75 puntos)* Justifica si f es diferenciable en $(1,1)$.

Ejercicio 3. Sea la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2\,.$$

(a) *(1 punto)* Calcula todos los puntos críticos.

(b) *(0.5 puntos)* Clasifica el punto crítico $(-1,1)$.

(c) *(0.5 puntos)* Justifica que $(0,0)$ es punto de silla.

Ejercicio 4. *(1.5 puntos)* Calcula

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) \qquad \text{siendo} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{si } y < e^x \\ 2y & \text{si } y \geq e^x \end{cases} \qquad \text{y} \quad R = [-1,0]\times[0,1].$$

Ejercicio 5. *(1.5 puntos)* Calcula el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

Ejercicio 6. *(0.5 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(a) $x = -7$ es un punto de la frontera de $A = (-\infty, 6\,]$.

(b) $x = 5$ es punto interior de $B = [-2,3) \cup \{\,5\,\}$.

Ejercicio 1. *(3 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(a) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar cualquiera. Si α es una curva simple cerrada de $\mathbb{R}^2$, entonces $\int_\alpha f = 0$.

(b) Si $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo conservativo y

$$\beta_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$
$$\beta_2(t) = (0, t) \quad \text{con } t \in [-1, 1],$$

entonces $\int_{\beta_1} F = \int_{\beta_2} F$.

(c) Sea $G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial dado por $G(x, y) = (2y - 3x^2y,\ 5x - x^3 + 4y)$. Si γ es una curva cerrada simple de $\mathbb{R}^2$ orientada positivamente que encierra un recinto R de área 3, entonces $\int_\gamma G = 3$.

Ejercicio 2. **(a)** *(0.5 puntos)* Parametriza la siguiente superficie Φ:

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ y \le 0,\ 0 \le z \le 2 \}.$$

(b) *(1 punto)* Calcula $\iint_\Phi f$ siendo $f(x, y, z) = 2z$.

Ejercicio 3. *(1.5 puntos)* Calcula la integral del campo $F(x, y, z) = (2z, y, x)$ sobre la curva cerrada (con orientación positiva) obtenida al intersecar el plano $x - 2y + 2z = 3$ con el semicilindro vertical cuya base es el trozo de circunferencia centrada en el origen y de radio 1 con $x \ge 0$.