# Matemáticas I

# Ejercicios resueltos

## Grado en Ingeniería Ambiental

Marta Latorre Balado y Javier Martínez Martínez

Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos

BURJ Digital `https://burjcdigital.urjc.es/`

6 de septiembre de 2023



Universidad Rey Juan Carlos

# Índice

# TEMA 1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

**Ejercicio 1.1.** *Comprueba que* $B = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ *es la inversa de* $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 1.2.**

*(a) Calcula, si existe, la inversa de* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

*(b) Utilizando la información obtenida en el apartado anterior, halla la solución de*

$$\begin{cases} -2x + y + z = 2, \\ \quad\quad\;\; y + z = 1, \\ \quad\;\; -y + z = 2. \end{cases}$$

**Ejercicio 1.3.** *Utilizando el método de Gauss, determina si el sistema*

$$\begin{cases} x - y \phantom{{}+z} + t + 2w = -1, \\ 2x - 2y + z + 3t + 4w = 0, \\ \phantom{x - y +{}} z + t + w = 3, \\ x - y + z + 2t + 3w = 2, \end{cases}$$

*tiene una, infinitas o ninguna solución. Halla la solución en caso de que exista.*

**Ejercicio 1.4.** *Utiliza el método de Gauss-Jordan para hallar la solución de* $AX = B$ *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.5.** *Calcula, utilizando el desarrollo por adjuntos, el determinante de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

*¿Es A invertible?*

**Ejercicio 1.6.** *Utiliza el método de Gauss para determinar, en función del parámetro* $\beta \in \mathbb{R}$, *si el sistema*

$$\begin{cases} x + \beta y + 2z \phantom{{}+\beta t} = 1, \\ -x + 2y - 3z + \beta t = 0, \\ x + \beta y + 2z + \beta t = \beta, \end{cases}$$

*es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

**Ejercicio 1.7.** *Utiliza el método de Gauss para determinar, en función del valor de los parámetros* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *si el sistema*

$$\begin{cases} x - \alpha y + 2z = \beta, \\ 2x + y + \beta z = 0, \\ 2x \phantom{{}+y} + 4z = \beta, \end{cases}$$

*es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

**Ejercicio 1.8.** *Utiliza el método de Gauss para discutir y resolver el sistema*

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} x_2 + 5x_3 = -4, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 7x_2 + \phantom{5}x_3 = -2. \end{cases}$$

**Ejercicio 1.9.* *Sean $A$ y $B$ matrices $2 \times 2$ con coeficientes reales. Se define el conmutador de $A$ y $B$ como la matriz*

$$[A, B] = AB - BA,$$

*de modo que el producto de dos matrices es conmutativo si y solo si su conmutador es cero.*

**(a)** *Justifica que si la traza de $A$ es cero, entonces $A^2$ es un múltiplo de la matriz identidad.*

**(b)** *Prueba que el cuadrado de $[A, B]$ conmuta con cualquier matriz $C \in \mathcal{M}_2$.*
(Pista: ¿cuál es la traza de $[A, B]$?)

**(c)** *Prueba que el conmutador de $A$ y $B$ no puede ser nunca un múltiplo no nulo de la matriz identidad.*

**Ejercicio 1.10.* *Sea $A \in \mathcal{M}_2$. Demuestra que siempre se cumple la identidad*

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

*Emplea la identidad anterior para demostrar que si $\det(A) \neq 0$, entonces $A$ es invertible.*

**Ejercicio 1.11.* *Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes.*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + (a-1)x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - bx_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + (b-4)x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 1.12.* *Demuestra que si $A$ es una matriz $2 \times 1$ y $B$ es una matriz $1 \times 2$, entonces la matriz $AB$ no es invertible. Generaliza el resultado al caso en que $A \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y $B \in \mathcal{M}_{1\times n}$.*

**Ejercicio 1.13.* *Decimos que una matriz cuadrada $A$ es nilpotente si verifica que $A^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $A \in \mathcal{M}_n$ es nilponente:*

**(a)** *¿Cuál es el determinante de $A$?*

**(b)** *Caracteriza todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2$ nilpotentes.*

**(c)** *Demuestra que si $A \in \mathcal{M}_n$ es nilpotente, entonces $A + I_n$ es invertible.*

# TEMA 2. Espacios vectoriales

**Ejercicio 2.1.** *Determina si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del espacio correspondiente.*

(a) $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - 2b = 0\}$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$.

(b) $T = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 2\}$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}_2[x]$.

(c) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & a^2 & 2a \\ a & a^3 & 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ *subespacio vectorial de* $\mathcal{M}_{2\times 3}$.

(d) $U = \{(\lambda, 2\lambda, \lambda + 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

(e) $V = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid A = A^t\}$ *subespacio vectorial de* $\mathcal{M}_2$.

(f) $W = \{(\lambda, \lambda\mu, \mu, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$.

**Ejercicio 2.2.** *Sea* $W = \{2b + (a + b)x + (a - b)x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) *Comprueba que* $W$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) *Obtén un sistema generador de* $W$.

(c) *¿*$p(x) = 3 + 2x - x^2$ *es un vector de* $W$*?*

**Ejercicio 2.3.** *Comprueba que los vectores* $(1, \lambda + 1, 3 - \lambda)$, $(1, \lambda, 3)$ *y* $(1, \lambda + 1, 1 - \lambda)$ *forman una base de* $\mathbb{R}^3$ *para cualquier valor de* $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.4.** *Sea* $V$ *un espacio vectorial de dimensión* $3$ *y sean* $u, v, w \in V$. *Sabiendo que* $\{u, v, w\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes, comprueba si los conjuntos*

(a) $T = \{u, w\}$

(b) $S = \{u + w, u - v, 2u + w - v, 3w\}$

(c) $W = \{u + v, u - v + w, v + w\}$

*también son linealmente independientes.*

**Ejercicio 2.5.** *Sea* $V$ *un espacio vectorial y sea* $B = \{u, v, w\}$ *una base de* $V$. *Determina si los conjuntos*

(a) $U = \{u, w\}$

(b) $W = \{u, v, w, 3w - 2v\}$

*son un sistema generador de* $V$.

**Ejercicio 2.6.**

(a) *Demuestra que el conjunto de vectores* $B' = \{5x^2, x^2 + 2x, x^2 + x + 7\}$ *forma una base de* $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) *Calcula la matriz de cambio de base para pasar de coordenadas con respecto a* $B'$ *a coordenadas con respecto a la base estándar de* $\mathbb{R}_2[x]$.

**Ejercicio 2.7.** *Sea* $V$ *un espacio vectorial de dimensión* $2$ *y sean* $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$ *y* $D = \{d_1, d_2\}$ *tres bases de* $V$. *Si*

$$P_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad P_{D\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

*calcula las coordenadas de* $b_1$ *con respecto a las bases* $B$, $C$ *y* $D$ *y las matrices* $P_{B\leftarrow C}$ *y* $P_{D\leftarrow B}$.

**Ejercicio 2.8.** *En $\mathbb{R}^4$, consideramos los vectores*

$$v_1 = (1, 1, 1, 2), \qquad v_2 = (2, 2, 2, 3), \qquad v_3 = (1, 1, 0, 1),$$

*y llamamos $V$ al subespacio generado por ellos.*

**(a)** *¿Cuál es la dimensión de $V$?*

**(b)** *Si llamamos $W$ al conjunto de vectores de $V$ cuyas dos primeras coordenadas son iguales a $0$, ¿es $W$ subespacio vectorial de $V$? En caso afirmativo, calcula una base de $W$.*

**Ejercicio 2.9.** *En $\mathbb{R}^3$, dada la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, se considera el conjunto*

$$\mathcal{B}' = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2 - e_3, e_3\}.$$

**(a)** *Demuestra que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$.*

**(b)** *Escribe la matriz cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.*

**(c)** *Prueba que el conjunto de todos los vectores que tienen las mismas coordenadas respecto a ambas bases forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*

***Ejercicio 2.10.** *En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores*

$$v_1 = (2, 1, -1), \qquad v_2 = (3, 3, -1), \qquad v_3 = (0, 3, 1), \qquad v_4 = (3, 0, -2).$$

*Demuestra que $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$.*

**Ejercicio 2.11.** *Sean*

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0, y - t = 0\},$$
$$W_2 = \langle (0, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\rangle,$$

*dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.*

**(a)** *Calcula la dimensión de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$.*

**(b)** *¿Existe algún espacio $W_3$ que sea suplementario de $W_1$ y también suplementario de $W_2$? Justifica tu respuesta y proporciona un ejemplo en caso afirmativo.*

**Ejercicio 2.12.** *Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita, y consideremos tres vectores $v_1, v_2, v_3$ tales que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ son conjuntos linealmente independientes. ¿Implica eso que $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes? Razona tu respuesta.*

***Ejercicio 2.13.**

**(a)** *Sean $V_1$ y $V_2$ subespacios de un espacio vectorial fijado $V$, tales que $V_1 + V_2 = V$ y $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Demuestra que todo vector $v \in V$ puede expresarse de modo único como $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.*

**(b)** *Si consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^3$*

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \qquad V_2 = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

*aplica el apartado anterior y expresa el vector $(1, 0, 1)$ como suma de un vector de $V_1$ y un vector de $V_2$.*

# TEMA 3. Aplicaciones lineales

Ejercicio 3.1. *Justifica si las siguientes aplicaciones son lineales.*

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ *dada por* $f(a,b) = a + bx + (a+b+1)x^2$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y,z) = x - 2z$.

(c) $f\colon \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 2}$ *dada por* $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $f\colon \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *dada por* $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^2x^2 + bx + c$.

Ejercicio 3.2. *Calcula un sistema generador del núcleo de las siguientes aplicaciones lineales.*

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *dada por* $f(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(b) $f\colon \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(ax^2 + bx + c) = a + 2b - c$.

Ejercicio 3.3. *Obtén un sistema generador de la imagen de las siguientes aplicaciones lineales.*

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *dada por* $f(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(b) $f\colon \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(ax^2 + bx + c) = a + 2b - c$.

Ejercicio 3.4. *Considera la aplicación lineal* $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *definida por*

$$f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Comprueba que* $B = \{(2,1), (-1,1)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$.

(b) *Sabiendo que* $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathcal{M}_2$, *calcula* $M_{B_c \leftarrow B}(f)$.

(c) *Calcula un sistema generador de* $\ker(f)$.

(d) *Calcula una base de* $\operatorname{Im}(f)$.

(e) *Calcula* $M_{B_c \leftarrow B_c'}(f)$ *siendo* $B_c' = \{(1,0), (0,1)\}$.

Ejercicio 3.5. *Determina si las siguientes aplicaciones lineales son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.*

(a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *dada por* $A = M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *siendo* $B = \{1\}$ *y* $B' = \{1, x, x^2\}$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $f(1,0) = (0,1,2)$ *y* $f(0,1) = (0,0,0)$.

Ejercicio 3.6. *Sea* $f\colon V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal tal que*

$$f(v_1) = w_1 + 2w_2, \qquad f(v_2) = -w_1, \qquad f(v_3) = w_1 + w_2,$$

*donde* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *y* $B' = \{w_1, w_2\}$ *son bases de* $V$ *y* $W$ *respectivamente.*

**(a)** *Calcula* $M_{B' \leftarrow B}(f)$.

**(b)** *Comprueba que* $C = \{f(v_1), f(v_2)\}$ *es una base de* $W$.

**(c)** *Halla* $M_{C \leftarrow B}(f)$.

**Ejercicio 3.7.** *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la aplicación lineal dada por*

$$f(x, y, z) = (x + y, z, x + z).$$

**(a)** *Calcula la matriz de la aplicación lineal respecto a la base canónica.*

**(b)** *Determina la imagen mediante* $f$ *del subespacio de ecuación* $x + y + z = 0$.

**(c)** *Obtén el conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^3$ *tales que* $f(v) \in W$, *donde* $W$ *es el subespacio de ecuación* $x - y = 0$.

**Ejercicio 3.8.** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación lineal que cumple:*

$$f(1, 1) = (2, 2) \qquad y \qquad (2, 1) \in \ker(f).$$

**(a)** *Calcula la matriz asociada a* $f$ *respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}^2$.

**(b)** *Calcula la matriz asociada a* $f$ *respecto a la base* $B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

**Ejercicio 3.9.** *Sea la aplicación* $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la aplicación definida como* $f(A) = \mathrm{tr}(A)$.

**(a)** *Prueba que* $f$ *es una aplicación lineal.*

**(b)** *Determina la dimensión y una base del núcleo de* $f$.

**Ejercicio 3.10.** *Si consideramos la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuya matriz respecto de la base canónica es*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ \alpha & 4 & 4 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix},$$

*determina la inyectividad y sobreyectividad de* $f$ *en función de los posibles valores de* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 3.11.** *Sea* $g : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *la aplicación lineal definida como* $g(A) = AB$, *donde* $B$ *es la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**(a)** *Demuestra que la aplicación* $g$ *es lineal.*

**(b)** *Calcula la matriz asociada a* $g$ *respecto a la base canónica de* $\mathcal{M}_2$.

**(c)** *Halla una base y la dimensión del núcleo.*

**(d)** *Indica la dimensión de la imagen.*

# TEMA 4. Diagonalización

**Ejercicio 4.1.** *Indica si la matriz $A$ es diagonalizable y, si existe, calcula una matriz diagonal $D$ semejante a la dada y la matriz de paso $P$ tal que $A = PDP^{-1}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 4.2.** *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(x, y) = (3x - y, 2x)$. Indica si $f$ es diagonalizable y, en caso de que exista, da una base $B$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_{B\leftarrow B}(f)$ es diagonal.*

**Ejercicio 4.3.** *Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (-3x + z, 2y, -ax)$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f$ tenga tres vales propios reales (no necesariamente distintos).*

**Ejercicio 4.4.** *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Sabiendo que $\lambda = 3$ es un valor propio de $A$, calcula el valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$.*
*Con valor de $\beta$ obtenido en el apartado anterior:*

(b) *Da tres vectores propios distintos asociados al valor propio $\lambda = 3$.*

(c) *Calcula todos los valores propios de $A$. ¿Es $A$ diagonalizable?*

(d) *Comprueba si $v = (4, -2, 0, 1)$ es un vector propio de $A$ e indica el valor propio asociado.*

**Ejercicio 4.5.** *Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula los autovalores y autovectores de $A$. ¿Es $A$ diagonalizable?*

**Ejercicio 4.6.** *Prueba que toda matriz simétrica $2 \times 2$ es diagonalizable.*

**Ejercicio 4.7.** *Se consideran las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Calcula los autovalores de $A$ y de $B$.*

(b) *Determina si $A$ y $B$ son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcula una forma diagonal $D$ y una matriz de paso $P$ y expresa la relación entre ellas y la matriz original.*

**Ejercicio 4.8.** *Construye una matriz $M \in \mathcal{M}_2$ tal que $v_1 = (2, 3)$ sea autovector con autovalor $2$ y $v_2 = (1, 2)$ sea autovector con autovalor $-1$.*

**Ejercicio 4.9.** *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si $A$ es una matriz tal que $A^n = 0$, entonces su único autovalor posible es $\lambda = 0$.*

(b) *Si $\lambda$ es autovalor de una matriz $A$ invertible, entonces $\lambda^{-1}$ es autovalor de su matriz inversa $A^{-1}$.*

(c) *Si $\lambda$ es un autovalor de $A$, entonces $\lambda$ es también autovalor de $A^t$, la matriz traspuesta de $A$.*

(d) *Los autovectores asociados a dos autovalores distintos son siempre linealmente independientes.*

# TEMA 5. Espacios normados

**Ejercicio 5.1.** *Sea la aplicación bilineal* $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$(a,b,c)\cdot(x,y,z) = 2ax - 2ay - 2bx + \beta by + az + cx + 6cz.$$

**(a)** *Determina el valor del parámetro* $\beta$ *para que* $\cdot$ *sea un producto escalar.*
*Si* $\beta = 3$, $v = (1,1,-1)$ *y* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$:

**(b)** *Comprueba si* $v \perp W$.

**Ejercicio 5.2.** *Considera, en* $\mathbb{R}^3$, *los vectores* $v = (2,0,1)$ *y* $w = (2,0,0)$ *y el producto escalar cuya matriz de Gram con respecto a la base* $B = \{(1,1,1),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ *es*

$$G_B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**(a)** *Calcula* $\|v\|$.

**(b)** *Calcula la distancia entre* $v$ *y* $w$.

**Ejercicio 5.3.** *Sea* $\cdot : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *el producto escalar en* $\mathbb{R}_2[x]$ *dado por*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)\cdot(a_2x^2 + b_2x + c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + 2c_1c_2,$$

*y sean los vectores* $p(x) = x + x^2$, $q(x) = 1 + x$ *y* $r(x) = -x^2$.

**(a)** *Calcula* $p(x)\cdot q(x)$.

**(b)** *¿Es* $r(x)$ *unitario?*

**(c)** *Calcula la matriz de Gram del producto escalar con respecto a la base* $B = \{p(x), q(x), r(x)\}$.

**Ejercicio 5.4.** *Calcula una base ortonormal a los siguientes subespacios con el producto escalar indicado.*

**(a)** $T = \langle(1,2,0,-1),(2,1,1,0)\rangle$ *con el producto escalar estándar de* $\mathbb{R}^4$.

**(b)** $W$ *es el subespacio de* $\mathbb{R}^3$ *cuya base es* $B = \{x^2 - 1, x^2 + 2x + 3\}$ *con el producto escalar*

$$\cdot : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{tal que} \qquad (a_1x^2 + b_1x + c_1)\cdot(a_2x^2 + b_2 + c_2) = 3a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2.$$

**(c)** $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b + c - 2d = 0,\ b - c + d = 0,\ c + d = 0\right\}$ *con el producto escalar*

$$\cdot : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{dado por} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = ae + bf + cg + dh.$$

**Ejercicio 5.5.** *Sea* $V$ *un espacio euclídeo y sea* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ *una base de* $V$ *tal que* $b_1$ *es unitario,* $b_1 \cdot b_2 = 0$, $b_2 \cdot b_2 = 1$, $\|b_3\| = \sqrt{2}$, $(b_1 - b_3)\cdot b_2 = 0$ *y* $(b_1 - b_3)\perp b_1$.

**(a)** *Calcula la matriz de Gram con respecto a la base* $B$.

**(b)** *Calcula* $\mathrm{d}(b_1, b_3)$ *y el ángulo que forman* $b_3 - b_1$ *y* $b_2$.

**(c)** *Calcula una base* $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *ortonormal.*

**(d)** *Calcula la matriz de Gram con respecto a la nueva base* $B'$.

**Ejercicio 5.6.** *Considera el producto escalar con matriz de Gram* $G_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$*, siendo la base* $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

- **(a)** *Obtén* $G_{B_c}$ *si* $B_c$ *denota a la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.
- **(b)** *Halla, utilizando* $G_B$*, el producto escalar* $(1,1,1)\cdot(0,1,0)$.
- **(c)** *Calcula el producto escalar* $(1,1,1)\cdot(0,1,0)$ *utilizando ahora* $G_{B_c}$.
- **(d)** *¿Son coherentes los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c)?*

**Ejercicio 5.7.** *En* $\mathbb{R}^3$*, se considera el producto escalar dado por*

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

- **(a)** *Halla la matriz de Gram del producto escalar anterior.*
- **(b)** *Calcula el módulo del vector* $v = (1,0,1)$ *respecto al producto escalar dado.*
- **(c)** *Determina unas ecuaciones implícitas del subespacio ortogonal al vector anterior.*

**Ejercicio 5.8.** *En* $\mathbb{R}_2[x]$ *se considera el producto escalar dado por*

$$p(x)\cdot q(x) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

- **(a)** *Calcula la matriz de Gram para la base canónica de* $\mathbb{R}_2[x]$.
- **(b)** *Calcula la distancia entre los polinomios* $x$ *y* $x^2$.
- **(c)** *Calcula la norma de los polinomios* $1+x$ *y* $1-x$.

**Ejercicio 5.9.** *Se considera, en* $\mathbb{R}^4$ *con el producto escalar habitual, el subespacio definido por las ecuaciones implícitas*

$$x+y+z=0, \qquad y-z+2t=0.$$

- **(a)** *Calcula la dimensión y una base de* $W$.
- **(b)** *Emplea el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal a partir de la base hallada en el apartado anterior.*
- **(c)** *Calcula la proyección del vector* $v=(1,0,0,0)$ *sobre* $W$.

**Ejercicio 5.10.** *Demuestra que en un espacio euclídeo* $V$ *se cumple la ley del paralelogramo*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

*para todo* $u, v \in V$.

**Ejercicio 5.11.** *Demuestra que si dos vectores* $u, v$ *de un espacio euclídeo verifican que*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2,$$

*entonces son ortogonales.*

**Ejercicio 5.12.** *En* $\mathbb{R}^4$ *con el producto escalar habitual y dado* $v=(1,2,3,1)$*, encuentra el vector de* $W$ *más cercano a* $v$ *si* $W$ *es el subespacio de ecuaciones*

$$x+y=0, \qquad x-y+z=0.$$

*****Ejercicio 5.13.** *Si* $U$ *y* $V$ *son subespacios de un espacio euclídeo, demuestra que*

$$(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp.$$

# TEMA 6. Números complejos

Ejercicio 6.1. *Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica.*

(a) $\dfrac{(i+3)(2i-1)}{1-i}$

(b) $\dfrac{(1+i)\overline{2+2i}}{3+i}$

(c) $2e^{\frac{\pi}{3}i}-(i+2)$

(d) $\dfrac{4_{\frac{\pi}{4}}}{2_{\frac{-\pi}{2}}}$

Ejercicio 6.2. *Expresa en forma polar los siguientes números complejos.*

(a) $e^{1+i}$

(b) $2_{\frac{\pi}{5}}3_{\pi}1_{\frac{-\pi}{2}}$

(c) $i^7$

Ejercicio 6.3. *Encuentra todos los números complejos $z\in\mathbb{C}$ tales que $z^4=e^{\pi i}$.*

Ejercicio 6.4. *Representa los siguientes conjuntos en el plano complejo.*

(a) $A=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-i|=2\}$

(b) $B=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1 \text{ y } \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\geq 0\}$

(c) $C=\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<2\}$

(d) $D=\{z\in\mathbb{C}\mid -2\leq \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\leq 2\}$

(e) $E=\{z\in\mathbb{C}\mid z^3=-8\}$

Ejercicio 6.5. *Encuentra todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.*

(a) $z^3+1=i$

(b) $(z+1)^4=16$

Ejercicio 6.6. *Determina todos los números complejos que satisfacen la ecuación $|z+1|=|z-i|$.*

Ejercicio 6.7. *Expresa los siguientes números complejos en forma binómica y en forma polar.*

(a) $\left(\dfrac{1}{-i}\right)^{100}$

(b) $(1-i)^{50}$

(c) $\dfrac{(2+2i)^{20}}{(2-2i)^{40}}$

Ejercicio 6.8. *Resuelve la ecuación $x^6-2x^3+2=0$ con $x\in\mathbb{C}$.*

**Ejercicio 6.9.** *Sea* $z \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\frac{z}{z-2} = \frac{1-i}{i+1}.$$

*Calcula la forma polar y binómica de* $z^2 + i$.

**Ejercicio 6.10.** *Demuestra que si* $p(x)$ *es un polinomio de grado* $n \in \mathbb{N}$ *con coeficientes reales y* $z \in C$ *es raíz de* $p(x)$*, entonces* $\overline{z}$ *también es raíz de* $p(x)$.

# TEMA 7. Límites y continuidad

**Ejercicio 7.1.** *Halla el valor de los siguientes límites.*

(a) $\displaystyle \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x-a)^2}$ *si* $a \geq 0$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{x-a}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}}$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+a}-ax\right)$ *si* $a \geq 0$

**Ejercicio 7.2.** *Calcula el límite de las siguientes funciones en el origen.*

(a) $f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})$

(b) $g(x) = \dfrac{2^{1/x}+5^{-1/x}}{3^{1/x}+4^{-1/x}}$

(c) $h(x) = (3x^2+1)^{1/x^2}$

**Ejercicio 7.3.** *Estudia la continuidad de las siguientes funciones.*

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1,1] \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ x-1 & \text{si} \quad x \notin [-1,1] \end{cases}$

**Ejercicio 7.4.** *Sabiendo que* $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua tal que* $h(0) = \beta$, *determina el valor de los parámetros* $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ *para que la función* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{|x-2|+4} & \text{si} \quad x \leq 2, \\ (x-2)\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right) & \text{si} \quad 2 < x \leq 10, \\ \dfrac{h(x-10)-10}{10^x+10} & \text{si} \quad x > 10, \end{cases}$$

*sea continua en* $x = 2$ *y en* $x = 10$.

**Ejercicio 7.5.** *Demuestra que la ecuación* $\sin x = 2x - 3$ *tiene, al menos, una solución real.*

**Ejercicio 7.6.** *Sea la función* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{x+6}{x^2-4x+3} & \text{si} \quad x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

(a) *Calcula* $f(0)$ *y* $f(2)$.

(b) *Comprueba si existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 0$.

**(c)** *Explica si los resultados anteriores contradicen, o no, el Teorema de Bolzano.*

**Ejercicio 7.7.** *Sea $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $0 \leq f(x) \leq 1$. Demuestra que la ecuación $f(x) = x$ tiene, al menos, una solución.*

**Ejercicio 7.8.** *Demuestra que la ecuación*

$$x^2 = \cos x - x \sin x$$

*tiene al menos dos soluciones reales.*

**Ejercicio 7.9.** *Demuestra que la ecuación $x^6 = 1 + 6x$ tiene exactamente dos soluciones reales.*

***Ejercicio 7.10.** *Calcula los siguientes límites.*

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

**(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + x \sin x)^{2/x^2}$

**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt[3]{x-a}}$

**(d)** $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$

**Ejercicio 7.11.** *Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2ax + 5a}$$

*sea continua en todo $\mathbb{R}$.*

***Ejercicio 7.12.** *Determina el valor de $c \in \mathbb{R}$ para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x \cot x & \text{si} \quad x \neq 0, \\ c & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

*sea continua en $x = 0$.*

**Ejercicio 7.13.** *Determina si existe algún valor $c \in \mathbb{R}$ para el que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4 + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si} \quad x < 0, \\ c & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{4^{1/x}} & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

*es continua en $x = 0$.*

# TEMA 8. Derivación de funciones

**Ejercicio 8.1.** *Utiliza la Regla de L'Hôpital para resolver el siguiente límite.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

**Ejercicio 8.2.** *Determina el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + 2$ en el punto $(2, 0)$ sea $y - x + 2 = 0$.*

**Ejercicio 8.3.** *Demuestra que la función $f(x) = xe^{x^2-1} + \lambda x$ tiene una única raíz real en el intervalo $[-\alpha, \alpha]$ para cualquier valor $\alpha, \lambda > 0$.*

**Ejercicio 8.4.** *Sea $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}$.*

(a) *Calcula $f(-4)$ y $f(2)$.*

(b) *Comprueba que la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución si $x \in (-4, 2)$.*

(c) *¿Contradicen los resultados anteriores el Teorema de Rolle?*

**Ejercicio 8.5.** *Utiliza un polinomio de Taylor de orden $2$ para obtener un valor aproximado de $e^{0,1}\sin(0,2)$ y acota el error cometido en dicha aproximación.*

**Ejercicio 8.6.** *Haz un esbozo de la gráfica de*

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}(x-2)}$$

*calculando previamente el dominio, los puntos de corte con los ejes, asíntotas verticales y horizontales, monotonía y extremos relativos.*

**Ejercicio 8.7.** *Aproxima el número $\sqrt[3]{e^2}$ con un error menor que $10^{-2}$.*

**Ejercicio 8.8.** *Calcula el polinomio de Taylor $P(x)$ de segundo orden alrededor del punto $x = \frac{\pi}{4}$ de la función $f(x) = \sec x$.*

**Ejercicio 8.9.** *Dada $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$, realiza un esbozo de su gráfica analizando su dominio, asíntotas, monotonía y extremos relativos.*

**Ejercicio 8.10.** *Dada la función*

$$f(x) = |1 - |x||,$$

*determina su dominio, puntos de corte con los ejes, analiza su continuidad y derivabilidad y estudia su monotonía y extremos relativos.*

**Ejercicio 8.11.** *Calcula los puntos de la parábola $y = x^2$ que se hallan a distancia mínima del punto $(0, 2)$.*

# TEMA 9. Integración

Ejercicio 9.1. *Utiliza la técnica de integración por partes para hallar* $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$.

Ejercicio 9.2. *Utiliza un cambio de variable para calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}\, dx$.

Ejercicio 9.3. *Resuelve la siguiente integral cíclica:* $\displaystyle\int e^{2x} \sin x \, dx$.

Ejercicio 9.4. *Resuelve las siguientes integrales definidas.*

*(a)* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

*(b)* $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ *con* $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x<1 \\ 3x^2-4x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Ejercicio 9.5. *Calcula* $\displaystyle\int \frac{3x^5-4x^3+4x^2-9x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\, dx$.

Ejercicio 9.6. *Calcula* $\displaystyle\int \frac{-4}{x^3+2x^2+3x+6}\, dx$.

Ejercicio 9.7. *Calcula una primitiva de* $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

Ejercicio 9.8. *Resuelve la integral trigonométrica* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$.

Ejercicio 9.9. *Calcula la integral definida* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$.

Ejercicio 9.10. *Calcula la integral* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$.

# Soluciones

**Solución 1.1.** Como $AB = I_2$ y $BA = I_2$, deducimos que $B$ es la inversa de $A$.

**Solución 1.2.**

(a)
$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_3}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to \frac{-1}{2}F_1 \\ F_3 \to \frac{1}{2}F_3}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(I_3 \mid A^{-1}\right).$$

(b) Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, resolvemos el sistema $AX = B$ multiplicando la ecuación matricial por $A^{-1}$:
$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Solución 1.3.** Hacemos operaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema:
$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 \to F_4 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como $\mathrm{rg}(A \mid B) = \mathrm{rg}(A) = 3 \neq 5 =$ nº incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones:
$$AX = B \quad \sim \quad \left\{ \begin{array}{rl} x - y \quad + t + 2w = & -1 \\ z + t \qquad = & 2 \\ w = & 1 \\ 0 = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha - \beta - 3, \\ y = \alpha, \\ z = 2 - \beta \\ t = \beta, \\ w = 1, \end{array} \right. \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Solución 1.4.**
$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \underset{F_2 \to \frac{-1}{6}F_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 3F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Una vez hemos obtenido la matriz escalonada reducida equivalente a $(A \mid B)$, resolvemos el sistema:
$$AX = B \quad \sim \quad \left\{ \begin{array}{rl} x - y \quad = & 2 \\ z = & -1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \alpha, \\ y = \alpha, \\ z = -1, \end{array} \right. \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Solución 1.5.**
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{Adj. } C_2}{=} 2(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 1(-1)^{4+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Adj. } C_1}{=}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\left[1(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} + 1(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right] +\\
&- \left[1(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 1(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right] =\\
&= -2\Big[(-2-3)+(6+3)\Big] - \Big[(-1-0)+(6+3)\Big] = -16.
\end{aligned}
$$

Como $\det(A) \neq 0$, la matriz $A$ es invertible.

Solución 1.6. Realizamos operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema:

$$
(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \beta & 2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3 & \beta & 0\\ 1 & \beta & 2 & \beta & \beta \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \beta & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2+\beta & -1 & \beta & 1\\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta-1 \end{array}\right).
$$

- Si $\beta \neq -2$ y $\beta \neq 0$: la matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A) = 3 \neq 4 =$ nº incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
- Si $\beta = -2$: $(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$.

  La matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A) = 3 \neq 4 =$ nº incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
- Si $\beta = 0$: $(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$.

  La matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = 3 \neq 2 = \text{rg}(A)$, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

Solución 1.7.

$$
(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 2 & \beta\\ 2 & 1 & \beta & 0\\ 2 & 1 & 4 & \beta \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3-2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 2 & \beta\\ 0 & 1+2\alpha & \beta-4 & -2\beta\\ 0 & 1+2\alpha & 0 & -\beta \end{array}\right).
$$

- Si $\alpha \neq \frac{-1}{2}$: $(A \mid B) \underset{F_3\to F_3-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 2 & \beta\\ 0 & 1+2\alpha & \beta-4 & -2\beta\\ 0 & 0 & 4-\beta & \beta \end{array}\right)$.
  - Si $\beta \neq 4$: la matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A) = 3 =$ nº incógnitas, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.
  - Si $\beta = 4$: $(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 2 & 4\\ 0 & 1+2\alpha & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$.

    La matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = 3 \neq 2 = \text{rg}(A)$, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.
- Si $\alpha = \frac{-1}{2}$: $(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \beta\\ 0 & 0 & \beta-4 & -2\beta\\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right)$.
  - Si $\beta \neq 4$ y $\beta \neq 0$: la matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A) = 3 =$ nº incógnitas, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.
  - Si $\beta = 4$: $(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

    La matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = 2 \neq 1 = \text{rg}(A)$, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.
  - Si $\beta = 0$: $(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

    La matriz está escalonada y como $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A) = 2 \neq 3 =$ nº incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Solución 1.8.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

A partir de la forma escalonada se deduce que $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A \mid B) = 3$, luego el sistema es incompatible y no tiene solución.

Solución 1.9.

(a) Si la traza de $A$ es cero, podemos escribir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y calculamos

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = (a^2 + bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a^2 + bc) I_2.$$

(b) Siguiendo la pista dada, calculamos en primer lugar $\operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA)$:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22},$$

y también

$$\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}.$$

Se sigue de ello que $\operatorname{tr}[A, B] = 0$.

Por el apartado (a), puesto que $\operatorname{tr}[A, B] = 0$, el cuadrado de $[A, B]$ es un múltiplo de la identidad, es decir, $[A, B]^2 = \alpha I_2$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos ahora a comprobar que el conmutador de una matriz $C \in \mathcal{M}_2$ con un múltiplo de la identidad es la matriz cero:

$$[C, [A, B]^2] = [C, \alpha I_2] = C\alpha I_2 - \alpha I_2 C = \alpha(CI_2 - I_2 C) = \alpha(C - C) = 0,$$

y por tanto $C$ conmuta con $[A, B]^2$.

(c) Si fuese cierto que $[A, B] = \alpha I_2$, con $\alpha \neq 0$, se tendría que $\operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr}(\alpha I_2) = 2\alpha \neq 0$, lo que supone una contradicción con $\operatorname{tr}[A, B] = 0$ (probado en el apartado anterior) y concluimos que $[A, B]$ no puede ser nunca un múltiplo no nulo de la identidad.

Solución 1.10. Es un cálculo directo verificar la identidad. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & d^2 + bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + da & ab + db \\ ac + dc & d^2 + ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Veamos ahora que $A$ es invertible si $\det(A) \neq 0$. Podemos despejar $\det(A)I_2$ de la identidad del apartado anterior, de modo que:

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A = -\det(A)I_2.$$

Puesto que $\det(A) \neq 0$, podemos dividir por $-\det(A)$ y llegar a la identidad

$$\frac{1}{\det(A)}\left(\operatorname{tr}(A)A - A^2\right) = I_2.$$

Sacando factor común $A$ (por la izquierda y por la derecha), se obtienen las identidades

$$A\left(\frac{\operatorname{tr}(A)I_2 - A}{\det(A)}\right) = I_2 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\operatorname{tr}(A)I_2 - A}{\det(A)}\right)A = I_2,$$

lo que permite afirmar que $A$ es invertible, y $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\operatorname{tr}(A)I_2 - A\right)$.

Solución 1.11. Para que los sistemas de ecuaciones sean equivalentes, ambos deben tener el mismo conjunto de soluciones. Si consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones,

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & a-1 & 0 \\ 2 & 1 & b & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -b & 1 & 0 \\ 1 & -4 & b-4 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & -3 & b-2 & 1-2a & 0 \\ 0 & -3 & -b-4 & 5-4a & 0 \\ 0 & -6 & b-5 & -4-a & 0 \end{array}\right),$$

es inmediato comprobar, analizando las dos primeras ecuaciones, que el primer sistema tiene rango $2$ para todo valor de $a, b \in \mathbb{R}$. Por tanto, para que el segundo sistema sea equivalente al primero, es necesario que la matriz $4 \times 4$ tenga también rango $2$, ya que en otro caso ambos sistemas no serían compatibles. Si realizamos más operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & -3 & b-2 & 1-2a & 0 \\ 0 & -3 & -b-4 & 5-4a & 0 \\ 0 & -6 & b-5 & -4-a & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_2 \\ F_4 \to F_4 - 2F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & -3 & b-2 & 1-2a & 0 \\ 0 & 0 & -2b-2 & 4-2a & 0 \\ 0 & 0 & -b-1 & -6+3a & 0 \end{array}\right)$$

vemos que para que la matriz tenga rango $2$, los parámetros $a$ y $b$ deberán satisfacer las ecuaciones

$$-b-1 = 0 \qquad \text{y} \qquad 2-a = 0,$$

que proporcionan los valores $a = 2$, $b = -1$. Sustituyendo en la matriz anterior, obtenemos la matriz ampliada del sistema escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, para $a = 2$ y $b = -1$, $\operatorname{rg}(A \mid B) = 2$ y las ecuaciones del segundo sistema se obtienen a partir del primero mediante operaciones elementales, por lo que toda solución del primer sistema también lo será del segundo.

Es sencillo comprobar que la matriz del segundo sistema tiene también rango $2$, por lo que las ecuaciones del primer sistema pueden ser también expresadas mediante operaciones elementales a partir del primero, y ambos sistemas son equivalentes.

Solución 1.12. En primer lugar, la matriz $AB$ está bien definida y se trata de una matriz $2 \times 2$. Si llamamos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix},$$

y esta matriz nunca será invertible porque $\det(AB) = a_1 b_1 a_2 b_2 - a_1 b_2 a_2 b_1 = 0$ para cualquier valor $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Finalmente, si $A$ es un vector columna y $B$ un vector fila, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Si expresamos la matriz $AB$ en función de sus columnas, tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ b_1 A & b_2 A & \ldots & b_{n-1} A & b_n A \\ | & | & & | & | \end{pmatrix},$$

de modo que todas las columnas de $AB$ son proporcionales al vector columna $A$. Por tanto, es inmediato deducir que $\det(AB) = 0$ (la matriz $AB$ tiene rango menor o igual a $1$) y la matriz no es invertible.

Solución 1.13.

(a) Como $0 = A^n$, entonces $0 = \det(A^n) = (\det(A))^n$ y deducimos que $\det(A) = 0$.

(b) Si $A$ es nilpotente, se tiene que $\det(A) = 0$ y aplicando el ejercicio 1.10 deducimos

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A = -\det(A)I_2 = 0, \tag{1}$$

o equivalentemente, $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$. Además, deducimos que

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A = \operatorname{tr}(A)A^2 = (\operatorname{tr}(A))^2A, \\ A^4 &= A^3A = (\operatorname{tr}(A))^2A^2 = (\operatorname{tr}(A))^3A, \end{aligned}$$

de donde puede probarse por inducción que $A^n = (\operatorname{tr} A)^{n-1}A$. Deducimos entonces que $A^n$ es una matriz no nula si $A$ es no nula y $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Por tanto, para que $A \neq 0$ sea nilpotente, es necesario que $\operatorname{tr}(A) = 0$ (y también $\det(A) = 0$). Dichas matrices serán del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \qquad a^2 = bc, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(c) Si $A^n = 0$, entonces

$$(A + I_n)^{-1} = I_n - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1}$$

ya que

$$\begin{aligned} (I_n + A)(I_n - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1}) &= I_n + (-1)^{n-1}A^n = I_n, \\ (I_n - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1})(I_n + A) &= I_n + (-1)^{n-1}A^n = I_n. \end{aligned}$$

Solución 2.1.

(a) El conjunto $S$ sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ ya que

(i) si $(a,b)$ y $(c,d) \in S$, entonces $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \in S$ ya que

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in S \Rightarrow a=2b\\(c,d)\in S \Rightarrow c=2d\end{array}\right\} + \Rightarrow a+c=2b+2d=2(b+d);$$

(ii) si $(a,b) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b) \in S$ ya que

$$\left.\begin{array}{r}(a,b)\in S \Rightarrow a=2b\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \times \Rightarrow \lambda a=\lambda 2b=2(\lambda b).$$

(b) El conjunto $T$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ porque $q(x)=0 \notin T$ $(q(0)=0\neq 2)$.

(c) El conjunto $R$ no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}$ ya que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix} \in R$ (con $a=1$), pero $2A=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&2&6\end{pmatrix} \notin R$.

(d) El conjunto $U$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$: si tomamos $u=(0,0,1)$ (vector obtenido con $\lambda=0$) y $u'=(1,2,2)$ (vector obtenido con $\lambda=1$), ambos pertenecen a $U$, pero su suma

$$u+u'=(0,0,1)+(1,2,2)=(1,2,3)$$

no pertenece a $U$ (el sistema $(1,2,3)=(\lambda,2\lambda,\lambda+1)$ es incompatible).

(e) El conjunto $V$ sí es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$: si $A,B\in V$ (es decir, $A=A^t$ y $B=B^t$) y $\lambda\in\mathbb{R}$, se tiene que

(i) $(A+B)^t=A^t+B^t=A+B$, luego $A+B\in U$;

(ii) $(\lambda A)^t=\lambda A^t=\lambda A$, de donde se deduce que $\lambda A\in U$;

y por tanto $U$ es subespacio.

(f) El conjunto $W$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Como contraejemplo, si tomamos $\lambda=1$ y $\mu=1$, obtenemos el vector $v=(1,1,1,0)\in W$. No obstante, $2v=(2,2,2,0)$ no es un vector de $W$, ya que no es igual a $(\lambda,\lambda\mu,\mu,0)$ para ningún valor de $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Solución 2.2.

(a) El conjunto $W$ sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ ya que

(i) si $r(x)=2b+(a+b)x+(a-b)x^2$ y $s(x)=2d+(c+d)x+(c-d)x^2\in W$, entonces la suma $r(x)+s(x)=2(b+d)+\big((a+c)+(b+d)\big)x+\big((a+c)-(b+d)\big)x^2\in W$ porque $a+c,b+d\in\mathbb{R}$;

(ii) si $r(x)=2b+(a+b)x+(a-b)x^2\in W$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces $\lambda r(x)=2\lambda b+(\lambda a+\lambda b)x+(\lambda a-\lambda b)x^2\in W$ porque $\lambda a,\lambda b\in\mathbb{R}$.

(b) $W=\{2b+(a+b)x+(a-b)x^2\in\mathbb{R}_2[x]\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\{a(x+x^2)+b(2+x-x^2)\in\mathbb{R}_2[x]\mid a,b\in\mathbb{R}\}=$
$=\langle x+x^2,2+x-x^2\rangle$.

(c) Resolvemos: $3+2x-x^2=\alpha(x+x^2)+\beta(2+x-x^2)$, es decir,

$$\left.\begin{array}{lrl}\text{Térm. indep.}: & 3= & 2\beta\\ \text{Coef. } x: & 2= & \alpha+\ \beta\\ \text{Coef. } x^2: & -1= & \alpha-\ \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{2},\\ \beta=\frac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Como el sistema tiene solución, concluimos que $p(x)\in W$ con $p(x)=\frac{1}{2}(x+x^2)+\frac{3}{2}(2+x-x^2)$.

Solución 2.3. Tenemos tres vectores en un espacio de dimensión 3, así que para comprobar que forman una base de $\mathbb{R}^3$ basta con ver que son linealmente independientes. Para ello, calculamos el rango:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\lambda+1&3-\lambda\\1&\lambda&3\\1&\lambda+1&1-\lambda\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2-F_1\\F_3\to F_3-F_1}}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\lambda+1&3-\lambda\\0&-1&\lambda\\0&0&-2-2\lambda\end{pmatrix}=3.$$

Como el rango de los vectores es 3 para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$, los vectores son linealmente independientes y para cualquier valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

## Solución 2.4.

(a) Es linealmente independiente porque $\{u, w\} \subset \{u, v, w\}$, que es linealmente independiente.

(b) El número máximo de vectores linealmente independientes coincide con la dimesión del espacio vectorial. Como $S$ tiene 4 vectores y $\dim(V) = 3$, el conjunto $S$ no es linealmente independiente.

(c) Vamos a comprobar si $W$ es linealmente independiente utilizando la definición. Planteamos:

$$0 = \alpha(u+v) + \beta(u-v+w) + \gamma(v+w) = (\alpha+\beta)u + (\alpha-\beta+\gamma)v + (\beta+\gamma)w.$$

Como $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha+\beta \quad &= 0 \\ \alpha-\beta+\gamma &= 0 \\ \beta+\gamma &= 0 \end{aligned}\right. \underset{E_2\to E_2-E_1}{\sim} \left\{\begin{aligned} \alpha+\beta \quad &= 0 \\ -2\beta+\gamma &= 0 \\ \beta+\gamma &= 0 \end{aligned}\right. \underset{E_3\to E_3+\frac{1}{2}E_2}{\sim} \left\{\begin{aligned} \alpha+\beta \quad &= 0 \\ -2\beta+\gamma &= 0 \\ \tfrac{3}{2}\gamma &= 0 \end{aligned}\right.$$

Al ser el sistema compatible determinado con solución $\alpha = \beta = \gamma = 0$, deducimos que el conjunto $W$ sí que es linealmente independiente.

## Solución 2.5.

(a) El conjunto $U$ no es un sistema generador de $V$ porque el número mínimo de vectores de un sistema generador coincide con la dimensión del espacio y $\dim(V) = 3 \neq 2 =$ nº vectores de $U$.

(b) El conjunto $W$ sí es un sistema generador de $V$ porque $B \subset W$ y $B$ es sistema generador de $V$ (por ser base).

## Solución 2.6.

(a) El conjunto $B'$ está formado tres vectores y $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, así que para comprobar que forman una base de $\mathbb{R}_2[x]$ basta con ver que son linealmente independientes. Para ello, pasamos a coordenadas con respecto a la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$:

$$5x^2 = [0,0,5]_B, \qquad x^2+2x = [0,2,1]_B, \qquad x^2+x+7 = [7,1,1]_B,$$

y como $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, concluimos que los vectores de $B'$ son linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Escribimos las coordenadas de los elementos de $B'$ con respecto $B$ en las columnas de $P_{B\leftarrow B'}$ en el orden adecuado: $P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

## Solución 2.7.

- Como $b_1$ es el primer vector de la base $B$: $b_1 = [1,0]_B$.
- De la matriz $P_{C\leftarrow B}$ deducimos que $b_1 = [-1,0]_C$.
- $P_{D\leftarrow B} = P_{D\leftarrow C}P_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- De la matriz $P_{D\leftarrow B}$ deducimos que $b_1 = [-1,1]_D$.
- $P_{B\leftarrow C} = (P_{C\leftarrow B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ya que

$$(P_{C\leftarrow B} \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1\to F_1-2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1\to -F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$
$$= (I_2 \mid (P_{C\leftarrow B})^{-1}).$$

## Solución 2.8.

(a) Colocamos los tres vectores como columnas de una matriz $A$ y la escalonamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

vemos que el rango es $3$, por lo que los tres vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base de $V$. Se sigue además que $\dim(V) = 3$.

(b) $V$ es espacio vectorial por ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. En $V$, el subconjunto $W$ viene definido como el siguiente conjunto de soluciones al sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0,$$

así que es subespacio de $V$. Como $V$ viene definido por la ecuación implícita

$$x_1 - x_2 = 0,$$

se tiene que el único vector de $V$ que cumple que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, es el vector $0$. Se concluye que $W = \{0\}$, el subespacio nulo, que no tiene base.

**Solución 2.9.**

(a) $\mathcal{B}'$ es un conjunto de $3$ vectores en $\mathbb{R}^3$, luego basta ver que son linealmente independientes para verificar que forman base. Respecto a la base $\mathcal{B}$, se tiene que

$$e_1 + e_2 = [1, 1, 0]_{\mathcal{B}}, \qquad e_1 - e_2 - e_3 = [1, -1, -1]_{\mathcal{B}}, \qquad e_3 = [0, 0, 1]_{\mathcal{B}},$$

y como $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, los vectores son linealmente independientes y constituyen una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Por la propia definición y construcción de la matriz cambio de base, se tiene que

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y por las propiedades de la matriz cambio de base deducimos que

$$P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Supongamos que $v$ es un vector que tiene las mismas coordenadas respecto a ambas bases, es decir, cumple que $v = [v_1, v_2, v_3]_{\mathcal{B}} = [v_1, v_2, v_3]_{\mathcal{B}'}$. Por tanto, matricialmente se verifica que:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

de donde despejando obtenemos el sistema

$$(P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} - I_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, los vectores con las mismas coordenadas respecto a ambas bases son solución de un sistema lineal homogéneo y, por lo tanto, forman subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

**Solución 2.10.** En primer lugar, se tiene que $\dim(\langle v_1, v_2 \rangle) = \dim(\langle v_3, v_4 \rangle) = 2$, ya que es sencillo verificar que $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son dos conjuntos linealmente independientes.

Si formamos una matriz con $v_1, v_2, v_3$ y $v_4$ como filas y la escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - \frac{3}{2}F_1 \\ F_4 \to F_4 - \frac{3}{2}F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - 2F_2 \\ F_4 \to F_4 + F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vemos que el rango es $2$, por lo que se deduce que $v_3$ y $v_4$ pueden expresarse como combinación lineal de $v_1$ y $v_2$. Por tanto, $\langle v_3, v_4 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$. Como ambos subespacios tienen dimensión dos, concluimos que $\langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, como queríamos probar.

Solución 2.11.

(a) Si resolvemos el sistema proporcionado por las ecuaciones implícitas de $W_1$ obtenemos una base de dicho subespacio, como por ejemplo

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{(-1,0,1,0),(0,1,0,1)\},$$

lo que prueba que $W_1$ tiene dimensión $2$. Por otro lado, como $\{(0,0,0,1),(1,1,-1,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente, deducimos que también es base de $W_2$.

Si juntamos las bases de $W_1$ y $W_2$ obtenemos un sistema generador de $W_1 + W_2$, que puede no ser base. Si formamos una matriz con dichos vectores y escalonamos con operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + F_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deducimos que el rango es $3$ y se sigue que $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

Aplicando la fórmula de Grassmann obtenemos la dimensión del subespacio intersección:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

(b) Sí, es posible que exista. Un posible ejemplo viene dado por

$$W_3 = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0) \rangle,$$

que cumple lo deseado.

Veamos que es suplementario de $W_1$. Se tiene que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$, de donde se deduce que $\dim(W_1 + W_3) = 4$ y por tanto $W_1 + W_3 = \mathbb{R}^4$. Como claramente $\dim(W_3) = 2$, la fórmula de Grassmann proporciona que $\dim W_1 \cap W_3 = 0$, de donde $W_1 + W_3 = \{0\}$, luego $W_3$ es suplementario de $W_1$. Cálculos similares prueban que $W_3$ también es suplementario de $W_2$.

Solución 2.12. La respuesta es negativa: tres vectores no son siempre linealmente independientes aunque dos a dos lo sean. Un posible ejemplo es el dado por los siguientes tres vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,0,0), \qquad v_2 = (0,1,0), \qquad v_3 = (1,1,0).$$

Es sencillo verificar que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ son conjuntos linealmente independientes, pero $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente, puesto que $v_3 = v_1 + v_2$.

Solución 2.13.

(a) Si recordamos la definición del subespacio suma como

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\},$$

se tiene que si $V_1 + V_2 = V$, todo vector $v$ de $V$ puede expresarse como $v = v_1 + v_2$ para algún $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Si suponemos que hay otra expresión $v = v_1' + v_2'$, con $v_1' \in V_1$, $v_2' \in V_2$, se tiene que

$$v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'.$$

Despejando en la última igualdad, se sigue que

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2.$$

Este vector pertenece simultáneamente a $V_1$ y $V_2$, ya que $v_1 - v_1' \in V_1$, pero también $v_2 - v_2' \in V_2$. Como $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, se tendrá entonces que

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 = 0$$

y por tanto $v_1 = v_1'$, $v_2 = v_2'$ y concluimos que la expresión es única.

(b) Obtengamos en primer lugar una base de $V_1 + V_2$. Se verifica que los siguientes conjuntos son base de $V_1$ y $V_2$, respectivamente

$$\mathcal{B}_{V_1} = \{(-1,0,1),(0,-1,1)\}, \qquad \mathcal{B}_{V_2} = \{(1,1,1)\},$$

de donde se sigue que $\mathcal{B}_{V_1+V_2} = \{(-1,0,1),(0,-1,1),(1,1,1)\}$ es sistema generador de $V_1 + V_2$. Es además base de $V_1 + V_2$ por ser linealmente independiente, puesto que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

La descomposición buscada se halla expresando el vector $(1,0,1)$ respecto a esta base, para lo que resolvemos el sistema

$$(1,0,1) = \lambda_1(-1,0,1) + \lambda_2(0,-1,1) + \lambda_3(1,1,1),$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} -\lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + \lambda_3 = 1, \\ \phantom{\lambda_1} - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \end{cases}$$

cuya solución es $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2}{3}$. Por tanto, sumando los dos primeros vectores, que pertenecen a $V_1$, obtenemos la descomposición deseada:

$$v = -\frac{1}{3}(-1,0,1) + \frac{2}{3}(0,-1,1) + \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

## Solución 3.1.

(a) $f$ no es una aplicación lineal porque $f(0,0) = x^2 \neq 0 + 0x + 0x^2$.

(b) $f$ es una aplicación lineal ya que

(i) $f(x,y,z) + f(u,v,w) = (x-2z) + (u-2w) = (x+u) - 2(z+w) = f(x+u, y+v, z+w)$;

(ii) $\lambda f(x,y,z) = \lambda(x-2z) = \lambda x - 2\lambda z = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = f(\lambda(x,y,z))$.

(c) $f$ no es una aplicación lineal porque $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $f$ no es una aplicación lineal porque $f\left(2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 16x^2 + 4x + 4$ pero no coincide con $2f\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2(4x^2 + 2x + 2) = 8x^2 + 4x + 4$.

## Solución 3.2.

(a) $\ker(f) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} a+b & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(0,0)\}$ ya que el sistema $\begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ a=0 \\ 0=0 \end{cases}$ es compatible determinado con solución $a = b = 0$.

(b) $\ker(f) = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(ax^2+bx+c) = 0\} = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + 2b - c = 0\} =$
$= \{(\alpha - 2\beta)x^2 + \beta x + \alpha \in \mathbb{R}_2[x] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(x^2+1) + \beta(-2x^2+x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$
$= \langle x^2+1, -2x^2+x \rangle$,

donde hemos resuelto la ecuación $\left\{a + 2b - c = 0\right. \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha - 2\beta, \\ b = \beta, \\ c = \alpha, \end{cases}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

## Solución 3.3.

(a) Como $B = \{(1,0),(0,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0), f(0,1) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Como $B = \{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, entonces

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1), f(x), f(x^2) \rangle = \langle -1, 2, 1 \rangle = \langle 1 \rangle.$$

## Solución 3.4.

(a) Como $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, basta con comprobar que los dos vectores de $B$ son linealmente independientes y esto es cierto ya que $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$.

(b) Calculamos las coordenadas de la imagen de los elementos de $B$ con respecto a $B_c$:

$$f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [0, -1, 1, 2]_{B_c},$$
$$f(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [1, -2, -1, 0]_{B_c}.$$

Entonces, $M_{B_c \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\ker(f) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\} = \left\{[\alpha,\beta]_B \mid M_{B_c\leftarrow B}(f)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} =$

$= \left\{[\alpha,\beta]_B \mid \begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\\1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{[\alpha,\beta]_B \mid \begin{pmatrix}\beta\\-\alpha-2\beta\\\alpha-\beta\\2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} =$

$= \{[0,0]_B\} = \langle[0,0]_B\rangle = \langle(0,0)\rangle.$

(d) Como $\mathbb{R}^2 = \langle(2,1),(-1,1)\rangle$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \langle f(2,1), f(-1,1)\rangle = \langle[0,-1,1,2]_B, [1,-2,-1,0]_B\rangle$ y como además, $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&1&2\end{pmatrix} = 2$, deducimos que los vectores con coordenadas $[0,-1,1,2]_B$ y $[1,-2,-1,0]_B$ son linealmente independientes y una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-2\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$.

(e) Como $M_{B_c\leftarrow B_c'}(f) = M_{B_c\leftarrow B}(f)P_{B\leftarrow B_c'}$, calculamos $P_{B\leftarrow B_c'}$:

$$(1,0) = \alpha(2,1)+\beta(-1,1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}1 = 2\alpha-\beta\\ 0 = \alpha+\beta\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{3}\\ \beta = \frac{-1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow (0,1) = \left[\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right]_B,$$

$$(0,1) = \lambda(2,1)+\gamma(-1,1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}0 = 2\lambda-\gamma\\ 1 = \lambda+\gamma\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda = \frac{1}{3}\\ \gamma = \frac{2}{3}\end{array}\right. \Rightarrow (0,1) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]_B.$$

Entonces, $P_{B\leftarrow B_c'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ y

$$M_{B_c\leftarrow B_c'}(f) = M_{B_c\leftarrow B}(f)P_{B\leftarrow B_c'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\\1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-5\\2&-1\\2&2\end{pmatrix}.$$

## Solución 3.5.

(a) Como $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$, deducimos que $f$ es inyectiva ($\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathbb{R}) = 1$), no es sobreyectiva ($\mathrm{rg}(A) = 1 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$) y no es biyectiva (porque no es sobreyectiva).

(b) $f$ no es inyectiva porque $\ker(f) \neq \{(0,0)\}$ (ya que $(0,1)\in\ker(f)$), no es sobreyectiva porque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 > 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ y tampoco es biyectiva porque no es inyectiva (o sobreyectiva).

## Solución 3.6.

(a) Calculamos las coordenadas de las imágenes de los elementos de $B$ con respecto $B'$:

$$f(v_1) = w_1+2w_2 = [1,2]_{B'}, \qquad f(v_2) = -w_1 = [-1,0]_{B'}, \qquad f(v_3) = w_1+w_2 = [1,1]_{B'},$$

entonces, $M_{B'\leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$.

(b) Como $\dim(W) = 2$ (ya que la base $B'$ tiene dos elementos) y $C$ tiene dos vectores, basta con comprobar que esos vectores son linealmente independientes y esto es cierto ya que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix} = 2.$$

Por lo tanto, deducimos que $C$ es una base de $W$.

(c) Calculamos las coordenadas de las imágenes de los elementos de $B$ con respecto $B'$:
Sabemos que $f(v_1) = [1,0]_C$ y $f(v_2) = [0,1]_C$ y

$$f(v_3) = w_1+w_2 = \alpha f(v_1)+\beta f(v_2) = \alpha(w_1+2w_2)+\beta(-w_1) \Rightarrow 0 = (\alpha-\beta-1)w_1+(2\alpha-1)w_2$$

Al ser $B'$ una base, los vectores $w_1$ y $w_2$ son linealmente independientes y como tenemos una combinación lineal nula de esos dos elementos, deducimos que

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha - \beta - 1 = 0 \\ 2\alpha - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}, \\ \beta = \frac{-1}{2}, \end{array} \right.$$

y por lo tanto, $f(v_3) = [\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}]_C$. Entonces, $M_{C \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Solución 3.7.

(a) Puesto que

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,1) = [1,0,1]_{B_c}, \\ f(0,1,0) &= (1,0,0) = [1,0,0]_{B_c}, \\ f(0,0,1) &= (0,1,1) = [0,1,1]_{B_c}, \end{aligned}$$

se obtiene que $M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Sea $V$ el subespacio de ecuación $x + y + z = 0$. Resolviendo el sistema formado por esa única ecuación implícita, se obtiene que los vectores $v_1 = (0, -1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ forman una base de $V$. Sus imágenes,

$$f(v_1) = (-1, 1, 1), \qquad f(v_2) = (-1, 1, 0),$$

forman una base del subespacio $f(V)$. Por tanto, $f(V) = \langle (-1,1,1), (-1,1,0) \rangle$ (es un plano, de ecuación $x + y = 0$).

(c) Un vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cumplirá que $f(v) \in W$ si satisface la ecuación implícita de $W$, es decir, si $x - y = 0$. Puesto que

$$f(x, y, z) = (x + y, z, x + z),$$

$f(v)$ cumplirá la ecuación si la diferencia entre su primera y segunda coordenada es cero, esto es, si

$$(x + y) - z = 0,$$

que es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$.

Solución 3.8.

(a) Puesto que $B' = \{(1,1), (2,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ (son linealmente independientes), y además

$$f(1,1) = (2,2), \qquad f(2,1) = (0,0),$$

se tiene que $M_{B_c \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} M_{B_c \leftarrow B_c}(f) &= M_{B_c \leftarrow B'}(f) P_{B' \leftarrow B_c} = M_{B_c \leftarrow B'}(f) \left(P_{B_c \leftarrow B'}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Empleando de nuevo la matriz cambio de base adecuada, tenemos que

$$M_{B' \leftarrow B'}(f) = P_{B' \leftarrow B_c} M_{B_c \leftarrow B'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución 3.9. Recordemos que, dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, se define la traza como

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

En el caso de $\mathcal{M}_2$, la aplicación viene dada por $f(A) = a_{11} + a_{22}$.

(a) $f$ es lineal, puesto que si $A, B \in \mathcal{M}_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple:

(i) $f(A) + f(B) = a_{11} + a_{22} + b_{11} + b_{22} = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} = f(A + B)$;

(ii) $\lambda f(A) = \lambda(a_{11} + a_{22}) = \lambda a_{11} + \lambda a_{22} = f(\lambda A)$.

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_2$ tal que $f(A) = 0$. Por la definición de traza, $A$ verifica la ecuación implícita

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = 0$$

cuya solución es

$$a_{11} = -\lambda, \qquad a_{12} = \gamma, \qquad a_{21} = \beta, \qquad a_{22} = \lambda,$$

con $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Matricialmente:

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda & \gamma \\ \beta & \lambda \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se tiene por tanto que $\dim(\ker(f)) = 3$ y una base viene dada por:

$$B_{\ker(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución 3.10. Si realizamos operaciones elementales por filas para calcular el rango de $M_{Bc}(f)$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ \alpha & 4 & 4 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix} \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 4 & 4 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - \frac{\alpha}{2}F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 - \frac{\alpha}{2} & 4 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \beta - 1 \end{pmatrix},$$

podemos hacer el siguiente análisis por casos analizando sus pivotes:

- Si $\alpha \neq 8$, $\beta \neq 1$, entonces $\operatorname{rg}(A) = 3$.
- Si $\alpha \neq 8$, $\beta = 1$, entonces $\operatorname{rg}(A) = 2$.
- Si $\alpha = 8$, $\beta \neq 1$, entonces $\operatorname{rg}(A) = 2$.
- Si $\alpha = 8$, $\beta = 1$, entonces $\operatorname{rg}(A) = 1$.

Puesto que $\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im}(f))$ y $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$, se tendrá que

- Si $\alpha \neq 8$ y $\beta \neq 1$, entonces $f$ es biyectiva porque $\dim(\ker(f)) = \operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im}(f))$.
- En resto de casos ($\alpha = 8$ o $\beta = 1$), $f$ no es inyectiva (porque $\dim(\ker(f)) \neq \operatorname{rg}(A)$) ni sobreyectiva (porque $\dim(\operatorname{Im}(f)) \neq \operatorname{rg}(A)$).

Solución 3.11.

(a) La aplicación $g$ es lineal, puesto que, para todo $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

(i) $g(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B = g(A_1) + g(A_2)$,

(ii) $g(\alpha A_1) = (\alpha A_1)B = \alpha A_1 B = \alpha g(A_1)$,

por las propiedades del producto matricial.

(b) Si calculamos las imágenes de las matrices de la base canónica y las expresamos en coordenadas, se tiene que

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [1, 3, 0, 0]_{B_c},$$
$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [2, 6, 0, 0]_{B_c},$$
$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = [0, 0, 1, 3]_{B_c},$$
$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = [0, 0, 2, 6]_{B_c},$$

de donde se obtiene que la matriz asociada respecto a la base canónica es

$$M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(c) Una matriz $A \in \mathcal{M}_2$ pertenece al núcleo si cumple que $g(A) = 0$, esto es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 0, \\ 3a_{11} + 6a_{12} = 0, \\ a_{21} + 2a_{22} = 0, \\ 3a_{21} + 6a_{22} = 0, \end{cases}$$

cuya solución es

$$a_{11} = -2\mu, \qquad a_{12} = \mu, \qquad a_{21} = -2\lambda, \qquad a_{22} = \lambda,$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\mu & \mu \\ -2\lambda & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

El núcleo tiene dimensión 2 y una base viene dada por $B_{\ker(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) La dimensión de la imagen es igual a 2, dado que

$$\dim(\mathrm{Im}(g) = \dim(\mathcal{M}_2) - \dim(\ker(g)) = 4 - 2 = 2.$$

Solución 4.1. Calculamos los valores propios (con sus multiplicidades algebraicas):

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & 0\\ -1 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Los valores propios de $A$ son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=1$ con $m_a(1)=1$ y $m_a(2)=2$.

Calculamos las multiplicidades geométricas:

$$\begin{aligned}&m_g(1)=1 \text{ proque } 1\le m_g(1)\le m_a(1)=1,\\ &m_g(2)=3-\operatorname{rg}(A-2I_3)=3-\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=3-\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=3-\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\\ &\qquad =3-2=1.\end{aligned}$$

Como $m_a(2)=2\neq 1=m_g(2)$, concluimos que $A$ no es diagonalizable.

Solución 4.2. Sea $B_c=\{(1,0),(0,1)\}$. Entonces $A=M_{B_c\leftarrow B_c}(f)=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Como la matriz es simétrica ($A=A^T$), deducimos que $f$ es diagonalizable. Para obtener la base $B$, necesitamos los valores y vectores propios de $A$.

Calculamos los valores propios (con sus multiplicidades algebraicas):

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ 2 & -\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1).$$

Los valores propios de $A$ son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=1$ con $m_a(1)=1$ y $m_a(2)=1$.

Calculamos el subespacio propio $V_1$:

$$V_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (A-I_2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\},$$

resolvemos el sistema $(A-I_2)X=0$, es decir, $\left\{\begin{array}{l}2x-y=0\\ 2x-y=0\end{array}\right. \Rightarrow$ SCI con solución: $\left\{\begin{array}{l}x=\alpha,\\ y=2\alpha,\end{array}\right.$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.
Entonces, $V_1=\{(\alpha,2\alpha)\in\mathbb{R}^2\mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\langle(1,2)\rangle$.

Calculamos el subespacio propio $V_2$:

$$V_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (A-2I_2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\},$$

resolvemos el sistema $(A-2I_2)X=0$, es decir, $\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\ 2x-2y=0\end{array}\right. \Rightarrow$ SCI con solución: $\left\{\begin{array}{l}x=\beta,\\ y=\beta,\end{array}\right.$ con $\beta\in\mathbb{R}$.
Entonces, $V_2=\{(\beta,\beta)\in\mathbb{R}^2\mid \beta\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1)\rangle$.

La base que buscamos es $B=\{(1,2),(1,1)\}$.

Solución 4.3. Si $B$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces $A=M_{B\leftarrow B}(f)=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -a\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Calculamos los valores propios de $A$:

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 0 & -a\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\underset{\text{Adj. } C_2}{=}(2-\lambda)(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & -a\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}=\\ &=(2-\lambda)\left[\lambda(3+\lambda)+a\right]=(2-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+a).\end{aligned}$$

Como las raíces de la ecuación $\lambda^2+3\lambda+a=0$ vienen dadas por $\lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9-4a}}{2}$, deducimos que $f$ tiene tres valores propios (no necesariamente distintos) si $9-4a\geq 0$, es decir, si $a\leq\frac{9}{4}$.

Solución 4.4.

(a) Como $\lambda = 3$ es valor propio de $A$, sabemos que $3$ es raíz del polinomio característico, es decir, $p(3) = 0$. Calculamos:

$$p(3) = \det(A - 3I_4) = \det\begin{pmatrix} -2 & \beta & \beta & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \underset{\text{Adj. } C_4}{=} (-5)(-1)^{4+4}\det\begin{pmatrix} -2 & \beta & \beta \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{Adj. } F_3}{=}$$
$$= (-5)(-2)(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} -2 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 10(2-\beta) = 0 \ \Rightarrow\ \beta = 2.$$

(b) Calculamos el subespacio propio $V_3$:

$$V_3 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 3I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 3I_4)X = 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 + \frac{1}{2}F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es decir $\left\{ \begin{array}{rl} x - y - z & = 0 \\ 3y + 2z - 5t & = 0 \\ z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI con solución: $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5\alpha}{3}, \\ y = \frac{5\alpha}{3}, \\ z = 0, \\ t = \alpha, \end{array} \right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$V_3 = \left\{ \left( \frac{5\alpha}{3}, \frac{5\alpha}{3}, 0, \alpha \right) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left( \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1 \right) \right\rangle$$

y tres vectores de $V_3$ son $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1)$, $(5, 5, 0, 3)$ y $(-5, -5, 0, -3)$.

(c) Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{Adj. } C_4}{=}$$
$$= (-2-\lambda)(-1)^{4+4}\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{Adj. } F_3}{=}$$
$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2] =$$
$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)\lambda(\lambda - 3).$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ y $\lambda_4 = 3$. Como $A \in \mathcal{M}_4$ tiene $4$ valores propios distintos, es diagonalizable.

(d) Calculamos $Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como $Av = 0 \cdot v$, deducimos que $v$ es un vector propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda = 0$.

Solución 4.5. Calculamos el polinomio característico de $A$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda + 2),$$

y obtenemos que los autovalores de $A$: $\lambda = 0$, que es autovalor doble (o dicho de otro modo, tiene multiplicidad algebraica 2) y $\lambda = 2$, que es autovalor simple (la multiplicidad algebraica es 1).

El subespacio propio asociado a $\lambda = 0$ es el núcleo de $A$, $V_0 = \ker(A)$. Resolvemos el sistema $AX = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y vemos que el núcleo viene definido por la ecuación $x - y - z = 0$, cuya solución es

$$V_0 = \{(\mu + \beta, \mu, \beta) \mid \beta, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ es 2 y una base del núcleo es $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Para el segundo espacio propio, resolvemos el sistema de ecuaciones asociado a $V_2 = \ker(A - 2I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_2 + F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La solución del sistema escalonado es la siguiente:

$$V_{-2} = \{(2\beta, -\beta, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\},$$

de donde obtenemos el autovector $(2, -1, 1)$ como base. La multiplicidad geométrica de $\lambda = -2$ es 1.

Dado que las multiplicidades geométricas y algebraicas coinciden para $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$, la matriz $A$ es diagonalizable.

**Solución 4.6.** Si tomamos una matriz simétrica $2 \times 2$, es decir, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y calculamos su polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2),$$

al calcular sus raíces vemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2}}{2} = \\ &= \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Como $(a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$, las raíces son siempre números reales (la raíz es siempre mayor o igual a 0). Pueden darse dos casos:

- $(a - c)^2 + 4b^2 > 0$, en cuyo caso la matriz tiene dos autovalores reales distintos y es, por tanto, diagonalizable.
- $(a - c)^2 + 4b^2 = 0$, lo que sucede si $a = c$, $b = 0$. En ese caso, $A$ es también diagonalizable ya que es una matriz diagonal.

**Solución 4.7.**

(a) Calculamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5),$$

y deducimos que los autovalores de $A$ son: $\lambda = -1$, con multiplicidad algebraica 2, y $\lambda = 5$, con multiplicidad algebraica 1.

Del mismo modo,

$$\det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 5 = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5).$$

Las raíces del polinomio característico son $-1$, $2-i$, $2+i$, luego tiene un único autovalor real con multiplicidad algebraica $1$ y dos autovalores complejos, $2+i$ y $2-i$, también con multiplicidad algebraica $1$.

(b) Si calculamos los subespacios propios de $A$, tenemos que $V_{-1} = \ker(A+I_3)$. Si resolvemos el sistema $(A+I_3)X = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El núcleo tiene por tanto una única ecuación implícita, $x+2y+z=0$, y la solución es

$$V_{-1} = \{(-2\mu - \beta, \mu, \beta) \mid \beta, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Una base de $V_{-1}$ está formada por los autovectores $\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$.

Para el segundo autovalor, resolvemos el sistema de ecuaciones asociado a $V_5 = \ker(A-5I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + 5F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to \frac{-1}{6} F_2 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{r} x+2y-5z=0, \\ y-2z=0, \end{array}\right.$ cuya solución es

$$V_{-5} = \{(\beta, 2\beta, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Una base es la formada por el autovector $\{(1,2,1)\}$.

Las multiplicidades algebraica y geométrica de todos los autovalores coinciden, luego la matriz $A$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Una forma diagonal $D$ y una matriz de paso $P$ para $A$ son

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que $A = PDP^{-1}$.

La matriz $B$ no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, ya que no tiene tres autovalores reales.

Solución 4.8. A partir de los datos, se sigue que una forma diagonal de $M$ es $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\{(2,3),(1,2)\}$. Si llamamos

$$P = M_{B_c \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz $M$ buscada cumple $M = PDP^{-1}$. Por tanto

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}.$$

Solución 4.9.

(a) Sea $\lambda$ un autovalor de $A$. Por definición, existe un autovector $v$ no nulo tal que $Av = \lambda v$. Entonces, si aplicamos $A^n$ al vector $v$, aplicando $n$ veces la definición de autovector, vemos que

$$A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1}(\lambda v) = \lambda A^{n-1} v = \lambda A^{n-2}(Av) = \lambda A^{n-2}(\lambda v) = \lambda^2 A^{n-2} v = \ldots = \lambda^n v,$$

de donde se deduce que $\lambda^n$ es autovalor de $A^n$. Como $A^n$ es la matriz nula (su único autovalor es el 0), se deduce que $\lambda^n = 0$ y concluimos que $\lambda = 0$.

(b) Sea $\lambda$ un autovalor de $A$. Existe entonces $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Aplicando $A^{-1}$ a ambos lados, deducimos que

$$A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda v),$$

y como $A^{-1}A = I_n$ y $A^{-1}$ es lineal, entonces $v = \lambda A^{-1}v$ y despejando:

$$A^{-1}v = \lambda^{-1}v.$$

(c) Si $\lambda$ es autovalor de $A$ entonces es raíz del polinomio característico y cumple por ello la ecuación

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Si trasponemos la matriz $A - \lambda I_n$, se tiene que $(A - \lambda I_n)^t = A^t - \lambda I_n^t = A^t - \lambda I_n$ (por las propiedades de la traspuesta y por ser la matriz identidad una matriz simétrica). Como el determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales, se deduce que

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^t) = \det(A^t - \lambda I_n) = 0,$$

lo que en particular implica que $\lambda$ es raíz del polinomio característico de $A^t$, y por tanto es autovalor de $A^t$.

(d) Sean $\lambda_1$ y $\lambda_2$ dos autovalores distintos y sean $v_1$ y $v_2$ sus respectivos autovectores asociados. Veamos que $v_1$ y $v_2$ son linealmente independientes. Sean $a_1$, $a_2$ escalares tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0. \tag{2}$$

Si aplicamos $A$ a la igualdad anterior se tiene que

$$A(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1Av_1 + a_2Av_2 = a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 = 0.$$

Por otro lado, si se multiplica (2) por $\lambda_2$ conseguimos

$$\lambda_2a_1v_1 + \lambda_2a_2v_2 = 0. \tag{3}$$

Restando (3) y (3) deducimos que

$$a_1(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 = 0$$

y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $v_1 \neq 0$, se sigue que $a_1 = 0$. Sustituyendo de nuevo en (2) se obtiene que $a_2 = 0$ y por tanto los autovectores son linealmente independientes.

## Solución 5.1.

(a) Vamos a comprobar que la matriz de Gram $G_B$ (siendo $B$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$) es simétrica y definida positiva.

Calculamos la matriz de Gram:

$$G_B = \begin{pmatrix} (1,0,0)\cdot(1,0,0) & (1,0,0)\cdot(0,1,0) & (1,0,0)\cdot(0,0,1) \\ (1,0,0)\cdot(0,1,0) & (0,1,0)\cdot(0,1,0) & (0,1,0)\cdot(0,0,1) \\ (1,0,0)\cdot(0,0,1) & (0,1,0)\cdot(0,0,1) & (0,0,1)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

que es simétrica ($G_B = G_B^T$) y también necesitamos que sea definida positiva:

$$\det(G_B) = 11\beta - 24 > 0 \Rightarrow \beta > \frac{24}{11};$$
$$\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \beta \end{pmatrix} = 2\beta - 4 > 0 \Rightarrow \beta > 2;$$
$$\det(2) = 2 > 0.$$

Concluimos que la aplicación $\cdot$ es un producto escalar si $\beta > \frac{24}{11}$.

(b) Calculamos un sistema generador de $W$:

$$W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\} = \{(\alpha-\beta,\beta,\alpha)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} = \langle (1,0,1),(-1,1,0)\rangle.$$

Como $v\cdot(1,0,1) = 2\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 - 2\cdot1\cdot1 + 3\cdot1\cdot0 + 1\cdot1 - 1\cdot1 + 6\cdot(-1)\cdot1 = -6 \neq 0$, deducimos que $v$ no es ortogonal a $W$.

## Solución 5.2.

(a) $\|v\| = \sqrt{(2,0,1)\cdot(2,0,1)} = \sqrt{13}$ ya que

$$(2,0,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(0,0,1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = \alpha+\beta \\ 0 = \alpha-\beta \\ 1 = \alpha \quad +\gamma \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1, \\ \beta = 1, \\ \gamma = 0, \end{array}\right. \Rightarrow v = [1,1,0]_B,$$

$$(2,0,1)\cdot(2,0,1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&0&5\\0&9&1\\5&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\9\\6\end{pmatrix} = 13.$$

(b) $\mathrm{d}(v,w) = \|v-w\| = \|(2,2,1)-(2,2,0)\| = \|(0,0,1)\| = \sqrt{(0,0,1)\cdot(0,0,1)} = \sqrt{4} = 2.$

## Solución 5.3.

(a) $p(x)\cdot q(x) = (x+x^2)\cdot(1+x) = 1\cdot0 + 1\cdot1 + 0\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot0 + 2\cdot0\cdot1 = 2.$

(b) Como $\|r(x)\| = \sqrt{(-x^2)\cdot(-x^2)} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = 1$, el vector $r(x)$ es unitario.

(c) $G_B = \begin{pmatrix} p(x)\cdot p(x) & p(x)\cdot q(x) & p(x)\cdot r(x) \\ q(x)\cdot p(x) & q(x)\cdot q(x) & q(x)\cdot r(x) \\ r(x)\cdot p(x) & r(x)\cdot q(x) & r(x)\cdot r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

## Solución 5.4.

(a) Como $b_1 = (1,2,0,-1)$ y $b_2 = (2,1,1,0)$ son linealmente independientes (porque tienen rango 2), el conjunto $B = \{b_1, b_2\}$ es una base de $T$. Utilizamos el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal $B' = \{w_1, w_2\}$ a partir de $B$.

$$w_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{(1,2,0,-1)}{\sqrt{(1,2,0,-1)\cdot(1,2,0,-1)}} = \frac{(1,2,0,-1)}{\sqrt{1+4+0+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}, 0, \frac{-1}{\sqrt6}\right).$$

$$u_2 = b_2 - Pr|_{\langle w_1\rangle}(b_2) = b_2 - (b_2\cdot w_1)w_1 = b_2 - \left[(2,1,1,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}, 0, \frac{-1}{\sqrt6}\right)\right] w_1 =$$
$$= b_2 - \left[\frac{2}{\sqrt6} + \frac{2}{\sqrt6} + 0 + 0\right] w_1 = (2,1,1,0) - \left(\frac46, \frac86, 0, \frac{-4}{6}\right) = \left(\frac43, \frac{-1}{3}, 1, \frac23\right);$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)}} = \frac{\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{4}{9}}} = \left(\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{18}}\right).$$

Una base ortonormal de $T$ es $B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{18}}\right)\right\}$.

(b) Como $(x^2-1)\cdot(x^2+2x+3) = 3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 0$, la base $B$ es ortogonal y una base ortonormal de $W$ será

$$B' = \left\{\frac{x^2-1}{\|x^2-1\|}, \frac{x^2+2x+3}{\|x^2+2x+3\|}\right\} = \left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{20}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{3}{\sqrt{20}}\right\}$$

ya que

$$\|x^2-1\| = \sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-1)} = \sqrt{3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)} = \sqrt{4} = 2,$$
$$\|x^2+2x+3\| = \sqrt{(x^2+2x+3)\cdot(x^2+2x+3)} = \sqrt{3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3} = \sqrt{20}.$$

(c) Como

$$S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b+c-2d=0, b-c+d=0, c+d=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & -2\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

una base de $S$ es $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Y como además

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1} = \sqrt{7},$$

entonces $B' = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{-2}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal de $S$.

Solución 5.5.

(a) $G_B = \begin{pmatrix} b_1\cdot b_1 & b_1\cdot b_2 & b_1\cdot b_3 \\ b_2\cdot b_1 & b_2\cdot b_2 & b_2\cdot b_3 \\ b_3\cdot b_1 & b_3\cdot b_2 & b_3\cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathrm{d}(b_1, b_3) = \sqrt{(b_1-b_3)\cdot(b_1-b_3)} = \sqrt{b_1\cdot b_1 - b_1\cdot b_3 - b_1\cdot b_1 + b_3\cdot b_3} = \sqrt{1+1+1+2} = \sqrt{5}$.
Como $\cos((b_3-b_1), b_2) = \frac{(b_3-b_1)\cdot b_2}{\|b_3-b_1\|\|b_2\|} = \frac{0}{\sqrt{5}\cdot 1} = 0$, entonces Ángulo$((b_3-b_1), b_2) = \frac{\pi}{2}$.

(c) Utilizamos el método de Gram-Schmidt para obtener la base ortonormal de $V$. Calculamos:

$$v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{1} = b_1.$$
$$u_2 = b_2 - Pr\big|_{\langle v_1\rangle}(b_2) = b_2 - (b_2\cdot v_1)v_1 = b_2 - (b_2\cdot b_1)v_1 = b_2 - 0 = b_2;$$
$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{b_2}{1} = b_2.$$
$$u_3 = b_3 - Pr\big|_{\langle v_1, v_2\rangle}(b_3) = b_3 - (b_3\cdot v_1)v_1 - (b_3\cdot v_2)v_2 = b_3 - (b_3\cdot b_1)b_1 - (b_3\cdot b_2)b_2 =$$
$$= b_3 - b_1 - 0 = b_3 - b_1;$$
$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{b_3-b_1}{\|b_3-b_1\|} = \frac{b_3-b_1}{\sqrt{5}}.$$

Entonces $B' = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{b_1, b_2, \frac{1}{\sqrt{5}}(b_3-b_1)\right\}$.

(d) Como $B'$ es ortonormal, $G_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Solución 5.6.

(a) Calculamos las coordenadas de los vectores de $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ con respecto a la base $B$:

$$e_1 = (1,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \beta_1(1,1,0) + \lambda_1(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1,0,0) = [0,0,1]_B,$$

$$e_2 = (0,1,0) = \alpha_2(1,1,1) + \beta_2(1,1,0) + \lambda_2(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow (0,1,0) = [0,1,-1]_B,$$

$$e_3 = (0,0,1) = \alpha_3(1,1,1) + \beta_3(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,1) = [1,-1,0]_B,$$

para poder utilizar la matriz $G_B$.

$$e_1 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3, \qquad e_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$e_1 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1, \qquad e_2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$e_2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2, \qquad e_3 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Concluimos que $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Como $(1,1,1) = [1,0,0]_B$ y $(0,1,0) = [0,1,-1]_B$, entonces

$$(1,1,1)\cdot(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1.$$

(c) Como $(1,1,1) = [1,1,1]_{B_c}$ y $(0,1,0) = [0,1,0]_{B_c}$, entonces

$$(1,1,1)\cdot(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} G_{B_c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1.$$

(d) Sí porque el valor del producto escalar entre dos vectores no varía si no cambia la definición del producto escalar.

## Solución 5.7.

(a) La matriz de Gram para la base canónica $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ será

$$G_{B_c} = \begin{pmatrix} (1,0,0)\cdot(1,0,0) & (1,0,0)\cdot(0,1,0) & (1,0,0)\cdot(0,0,1) \\ (1,0,0)\cdot(0,1,0) & (0,1,0)\cdot(0,1,0) & (0,1,0)\cdot(0,0,1) \\ (1,0,0)\cdot(0,0,1) & (0,1,0)\cdot(0,0,1) & (0,0,1)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Se tiene que

$$v \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 8,$$

de donde $\|v\| = \sqrt{v\cdot v} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

(c) Si llamamos $W = \langle(1,0,1)\rangle$, se tiene que $(x,y,z)$ es ortogonal a $(1,0,1)$ si $(x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0$. Empleando la matriz de Gram, esto es equivalente a

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0,$$

luego la ecuación implícita de $W^\perp$ es $4x + y + 4z = 0$ y entonces

$$W^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + y + 4z = 0\}.$$

Solución 5.8.

(a) Calculamos la matriz de Gram para $B_c = \{1, x, x^2\}$:

$$G_{B_c} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot x & 1\cdot x^2 \\ x\cdot 1 & x\cdot x & x\cdot x^2 \\ x^2\cdot 1 & x^2\cdot x & x^2\cdot x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix},$$

donde cada producto escalar se ha calculado en base a la definición dada. Por ejemplo,

$$x^2 \cdot x^2 = 0^2 \cdot 0^2 + 1^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2 = 17.$$

(b) Puesto que $x = [0,1,0]_{B_c}$, $x^2 = [0,0,1]_{B_c}$, entonces

$$\mathrm{d}(x, x^2) = \|x - x^2\| = \|(0,1,0) - (0,0,1)\| = \|(0,1,-1)\| = \sqrt{(0,1,-1)\cdot(0,1,-1)}.$$

Si calculamos el producto escalar empleando la matriz de Gram,

$$(0,1,-1)\cdot(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} G_{B_c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4.$$

Se concluye que $\mathrm{d}(x, x^2) = \sqrt{4} = 2$.

(c) Si tomamos coordenadas y denotamos $v_1 = 1 + x = [1,1,0]_{B_c}$, $v_2 = 1 - x = [1,-1,0]_{B_c}$, empleando la matriz de Gram podemos calcular

$$\|v_1\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 14,$$

de donde deducimos que $\|v_1\| = \sqrt{14}$, y también

$$\|v_2\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2,$$

luego $\|v_2\| = \sqrt{2}$.

Solución 5.9.

(a) Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y - z + 2t = 0, \end{cases}$$

se obtiene que

$$W = \{(-2\mu + 2\lambda, \mu - 2\lambda, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

de donde $\dim(W) = 2$ y una base de $W$ viene dada por $B = \{e_1, e_2\}$ siendo $e_1 = (-2,1,1,0)$ y $e_2 = (2,-2,0,1)$.

(b) A partir de $B$, construimos una nueva base ortogonal $B' = \{w_1, w_2\}$ mediante Gram-Schmidt. El primer vector se obtiene normalizando $e_1$:

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(-2,1,1,0)}{\sqrt{(-2,1,1,0)\cdot(-2,1,1,0)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1,0) = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right).$$

Para el segundo vector de la base ortonormal, calculamos

$$\begin{aligned} u_2 &= e_2 - Pr\big|_{\langle w_1\rangle}(e_2) = \\ &= (2,-2,0,1) - \left((2,-2,0,1)\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) = \\ &= (2,-2,0,1) + \sqrt{6}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) = (0,-1,1,1), \end{aligned}$$

que es perpendicular al primero y al normalizarlo obtenemos

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(0,-1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

La base ortogonal pedida es $B' = \left\{\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

(c) Finalmente, si $v = (1,0,0,0)$, como

$$v\cdot w_1 = \frac{-2}{\sqrt{6}}, \qquad v\cdot w_2 = 0,$$

se tiene que

$$Pr\big|_W = (v\cdot w_1)w_1 + (v\cdot w_2)w_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) + 0\left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 0\right).$$

Solución 5.10.

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) + (u-v)\cdot(u-v) \\ &= u\cdot u + 2(u\cdot v) + v\cdot v + u\cdot u - 2(u\cdot v) + v\cdot v \\ &= 2(u\cdot u) + 2(v\cdot v) = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Solución 5.11. Supongamos que $u, v$ satisfacen

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2.$$

Si expandimos ambos lados de la igualdad, vemos que

$$u\cdot u + v\cdot v = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v.$$

Despejando llegamos a $2u\cdot v = 0$, lo que implica que $u\cdot v = 0$ y entonces $u, v$ son ortogonales.

Solución 5.12. En primer lugar, tomamos una base de $W$, $B_W = \{w_1, w_2\}$, donde

$$w_1 = (-1,1,2,0), \qquad w_2 = (0,0,0,1),$$

y calculamos una base ortonormal, $B_W = \{e_1, e_2\}$, mediante el método de Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) \\ e_2 &= w_2 - (w_2\cdot e_1)e_1 = (0,0,0,1) - \left((0,0,0,1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) = \\ &= (0,0,0,1) - 0\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) = (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Observamos que el resultado es la base original normalizada, ya que era ortogonal de partida.

El vector de $W$ más cercano a $v = (1, 2, 3, 1)$ es su proyección sobre $W$:

$$\begin{aligned}
Pr\big|_W(v) &= (v \cdot e_1)e_1 + (v \cdot e_2)e_2 = \\
&= \left((1, 2, 3, 1) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) + ((1, 2, 3, 1) \cdot (0, 0, 0, 1))\,(0, 0, 0, 1) = \\
&= \frac{7}{\sqrt{6}}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) + 1(0, 0, 0, 1) = \left(\frac{-7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{3}, 1\right).
\end{aligned}$$

Solución 5.13. Sea $B_U = \{u_1, \dots, u_r\}$ una base de $U$ y $B_V = \{v_1, \dots, v_s\}$ una base de $V$. Si consideramos el subespacio suma $U + V$, el conjunto

$$S_{U+V} = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$$

es un sistema generador de $U + V$. Teniendo esto en cuenta:

- Si $w \in (U + V)^{\perp}$, $w$ es perpendicular a todos los vectores de $U + V$. En particular, es perpendicular al sistema de generadores dado, por lo que $w \cdot u_i = 0$ y $w \cdot v_i$. Como $B_U$ y $B_V$ son bases, se deduce entonces que $w$ es perpendicular a todo vector de $U$ y a todo vector de $V$, esto es , $w \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$.
- Si $w \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$, $w$ es perpendicular a la base de $U$ y a la base de $V$, luego es perpendicular al sistema de generadores $S_{U+V}$, lo que quiere decir que es perpendicular a cualquier vector de $U+V$ y, como consecuencia, $w \in (U + V)^{\perp}$.

## Solución 6.1.

(a) $\dfrac{(i+3)(2i-1)}{1-i} = \dfrac{2i^2-i+6i-3}{1-i} = \dfrac{-5+5i}{1-i}\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{-5-5i+5i-5i^2}{1^2+1^2} = \dfrac{0}{2} = 0.$

(b) $\dfrac{(1+i)\overline{2+2i}}{3+i} = \dfrac{(1+i)(2-2i)}{3+i} = \dfrac{2-2i+2i-4i^2}{3+i} = \dfrac{6}{3+i}\dfrac{3-i}{3-i} = \dfrac{18+6i}{3^2+1^2} = \dfrac{9}{5}+\dfrac{3}{5}i.$

(c) $2e^{\frac{\pi}{3}i}-(i+2) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)-(i+2) = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(i+2) = 1+\sqrt{3}i-(i+2) == -1+(\sqrt{3}-1)i.$

(d) $\dfrac{4_{\frac{\pi}{4}}}{2_{\frac{-\pi}{2}}} = \left(\dfrac{4}{2}\right)_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{3\pi}{4}} = 2_{\frac{-\pi}{4}} = 2\left(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}-\sqrt{2}i.$

## Solución 6.2.

(a) $e^{1+i} = e_1$.

(b) $2_{\frac{\pi}{5}}3_{\pi}1_{\frac{-\pi}{2}} = (2\cdot 3\cdot 1)_{\frac{\pi}{5}+\pi-\frac{\pi}{2}} = 6_{\frac{7\pi}{10}}$.

(c) $i^7 = i^4i^2i = 1\cdot(-1)\cdot i = -i = 1_{\frac{-\pi}{2}}$, donde hemos utilizado que $|i| = \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1$ y $\operatorname{Arg}(-i) = \frac{-\pi}{2}$ (porque $-i$ está situado en la parte negativa del eje vertical).

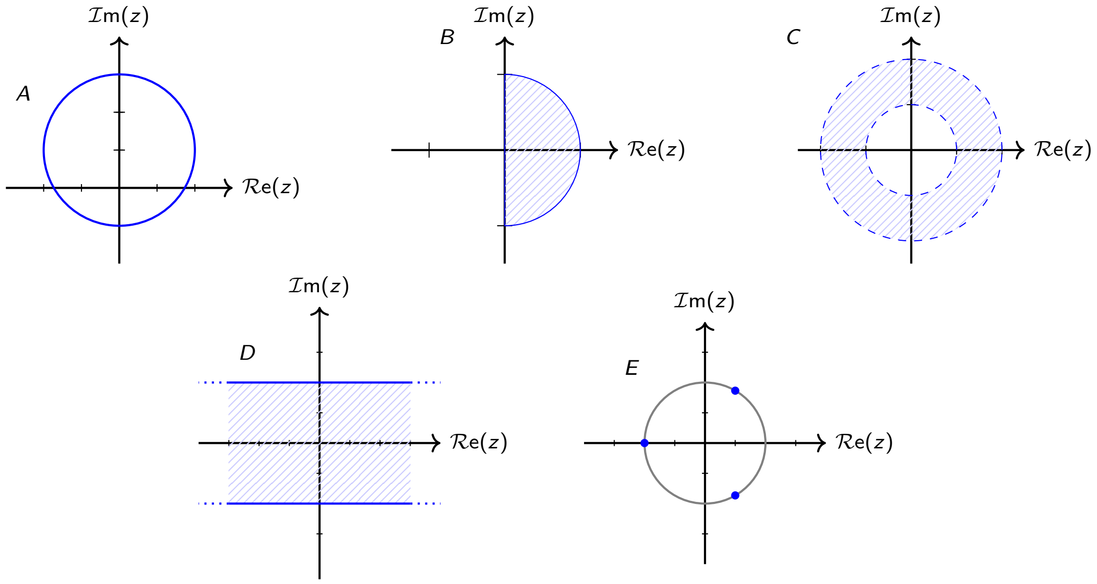
## Solución 6.3.

Como $z^4 = e^{\pi i}$, tenemos que calcular todas las raíces cuartas de $w = e^{\pi i}$.

- Calculamos el módulo y argumento de $w = e^{0+\pi i} = e^0(\cos\pi + i\sin\pi) = -1+0i = -1$: $|w| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi$ (porque $w$ está en la parte negativa del eje horizontal).
- Calculamos las raíces cuartas de $w$ con la fórmula $v_k = \sqrt[4]{|w|}_{\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{4}}$ para $k = 0,1,2,3$:

$$v_0 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\pi}{4}} = 1_{\frac{\pi}{4}}, \qquad v_1 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\pi+2\pi}{4}} = 1_{\frac{3\pi}{4}},$$
$$v_2 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\pi+4\pi}{4}} = 1_{\frac{5\pi}{4}} = 1_{\frac{-3\pi}{4}}, \qquad v_3 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\pi+6\pi}{4}} = 1_{\frac{7\pi}{4}} = 1_{\frac{-\pi}{4}}.$$

## Solución 6.4.




donde hemos calculado las raíces cúbicas de $w = -8$:

- Módulo y argumento: $|w| = \sqrt{(-8)^2+0^2} = 8$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi$ (porque $w$ está en la parte negativa del eje horizontal).
- Raíces cúbicas de $w$: $z_k = \sqrt[3]{|w|}_{\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{3}}$ para $k = 0,1,2$:

$$z_0 = \sqrt[3]{8}_{\frac{\pi}{3}} = 2_{\frac{\pi}{3}}, \qquad z_1 = \sqrt[3]{8}_{\frac{\pi+2\pi}{3}} = 2_{\pi}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{8}_{\frac{\pi+4\pi}{3}} = 2_{\frac{5\pi}{3}} = 1_{\frac{-\pi}{3}}.$$

Solución 6.5.

(a) Como $z^3 = -1 + i$, calculamos las raíces cúbicas de $w = -1 + i$.

- Módulo y argumento: $|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (porque $w$ está en el segundo cuadrante).
- Raíces cúbicas de $w$: $z_k = \sqrt[3]{|w|}_{\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{3}}$ para $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi}{4}}, \qquad z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{11\pi}{12}},$$
$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{19\pi}{12}} = 1_{\frac{-5\pi}{12}}.$$

(b) Hacemos el cambio de variable $t = z + 1$ y resolvemos $t^4 = 16$ calculando las raíces cuartas de $w = 16$:

- Módulo y argumento: $|w| = \sqrt{16^2 + 0^2} = 16$ y $\operatorname{Arg}(w) = 0$ (porque $w$ está en la parte positiva del eje horizontal).
- Raíces cuartas de $w$: $t_k = \sqrt[4]{|w|}_{\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{4}}$ para $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
t_0 &= \sqrt[4]{16}_{\frac{0}{4}} = 2_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2,\\
t_1 &= \sqrt[4]{16}_{\frac{0+2\pi}{4}} = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i,\\
t_2 &= \sqrt[4]{16}_{\frac{0+4\pi}{4}} = 2_{\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi = -2,\\
t_3 &= \sqrt[4]{16}_{\frac{0+6\pi}{4}} = 2_{\frac{3\pi}{2}} = 2_{\frac{-\pi}{2}} = 2(\cos(\frac{-\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{2})) = -2.
\end{aligned}$$

Deshacemos el cambio de variable $z_k = t_k - 1$:

$$z_0 = t_0 - 1 = 1, \qquad z_1 = t_1 - 1 = -1 + 2i, \qquad z_2 = t_2 - 1 = -3, \qquad z_3 = t_3 - 1 = -1 - 2i.$$

Solución 6.6. Si escribimos $z = a + bi$, tendremos por un lado

$$|z + 1| = |a + bi + 1| = |(a + 1) + bi| = \sqrt{(a + 1)^2 + b^2},$$

y por otro,

$$|z - i| = |a + bi - i| = |a + (b - 1)i| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}.$$

Ambas expresiones son iguales si, y sólo si,

$$(a + 1)^2 + b^2 = a^2 + (b - 1)^2,$$

que desarrollando ambos lados, es equivalente a

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1.$$

Simplificando, se llega a la condición $a = -b$. Por tanto, los números complejos solución de la ecuación dada son de la forma

$$z = a - ai, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Se trata de una recta en el plano complejo, múltiplos reales del número complejo $1 - i$.

Solución 6.7.

(a) En primer lugar, $\frac{-1}{i} = i$. Como $i^4 = 1$, deducimos que

$$\left(\frac{1}{-i}\right)^{100} = i^{100} = \left(i^4\right)^{25} = 1^{25} = 1.$$

En forma polar, $1_0$.

(b) En forma polar, $1 - i = \sqrt{2}_{\frac{-\pi}{2}}$ y entonces

$$\left(\sqrt{2}_{\frac{-\pi}{2}}\right)^{50} = 2^{25}{}_{\frac{-50\pi}{2}} = 2^{25}{}_{-25\pi} = 2^{25}{}_{\pi}.$$

En forma binómica, $2^{25}{}_{\pi} = 2^{25}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{25}$.

(c) Las formas polares de $2+2i$ y $2-2i$ son $\sqrt{8}_{\frac{\pi}{4}}$ y $\sqrt{8}_{-\frac{\pi}{4}}$ (son conjugados). Por tanto, en forma polar, se tiene que

$$\left(\sqrt{8}_{\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = {8^{10}}_{\frac{20\pi}{4}} = {8^{10}}_{5\pi} = {8^{10}}_{\pi} \qquad \text{y} \qquad \left(\sqrt{8}_{\frac{-\pi}{4}}\right)^{40} = {8^{20}}_{\frac{-20\pi}{4}} = {8^{20}}_{-5\pi} = {8^{20}}_{\pi}.$$

Y por lo tanto,

$$\frac{{8^{10}}_{\pi}}{{8^{20}}_{\pi}} = \left(\frac{1}{8^{10}}\right)_0 = {8^{-10}}_0.$$

En forma binómica, ${8^{-10}}_0 = 8^{-10}(\cos 0 + i \sin 0) = 8^{-10}$ (es un número real).

Solución 6.8. Para resolver la ecuación $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$, hacemos el cambio de variable $z = x^3$ y obtenemos la ecuación de grado dos

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

que tiene como solución:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm i,$$

es decir, tiene dos raíces complejas: $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - i$.

Si tratamos de deshacer el cambio de variable original, debemos resolver la ecuación

$$x^3 = 1 + i,$$

lo que equivale a hallar las raíces cúbicas de $1+i$, cuya expresión en polares es $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$. Empleando la fórmula $x_k = \sqrt[3]{|1+i|}_{\frac{\mathrm{Arg}(1+i)+2k\pi}{3}}$ para $k = 0, 1, 2$, las raíces cúbicas son:

$$x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{\pi}{4}}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi}{12}}, \qquad x_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{3\pi}{4}}, \qquad x_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{17\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{-7\pi}{12}}.$$

La ecuación $x^3 = 1 - i$ se resuelve de modo similar, teniendo en cuenta que en polares $1-i$ tiene expresión $\sqrt{2}_{\frac{-\pi}{4}}$. Las soluciones son:

$$x_4 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{-\pi}{4}}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi}{12}}, \qquad x_5 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{7\pi}{12}}, \qquad x_6 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\frac{-\pi}{4}+4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{5\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi}{4}}.$$

Solución 6.9. Despejando, se obtiene que

$$z(i+1) = (z-2)(1-i) \quad \Rightarrow \quad z(i+1) = z(1-i) + (-2+2i),$$

y agrupando y despejando de nuevo $z$ llegamos a

$$z(i+1) - z(1-i) = -2 + 2i \quad \Rightarrow \quad 2iz = -2 + 2i \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-2+2i}{2i} = \frac{-1+i}{i} = 1 + i.$$

Por tanto, el número complejo pedido es $z^2 + i = (1+i)^2 - i = 1 + 2i + i^2 - i = i$, cuya forma polar es $1_{\frac{\pi}{2}}$.

Solución 6.10. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales, es decir, $a_i \in \mathbb{R}$. Si $z$ es raíz de $p(x)$, esto quiere decir que $p(z) = 0$, y por tanto

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Si conjugamos ambos lados de la ecuación y aplicamos las propiedades de la conjugación de números complejos respecto a la suma y al producto, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z}^{\,n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z}^{\,n-1} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = \\ &= a_n \overline{z}^{\,n} + a_{n-1}\overline{z}^{\,n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = p(\overline{z}), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado también que $\overline{a_i} = a_i$ por ser los coeficientes números reales.

## Solución 7.1.

(a) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x-a)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x-a)^2}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x-a}{(x-a)^2(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$

$= \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \left[\dfrac{1}{0^+\cdot 2\sqrt{a}}\right] = +\infty.$

(b) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x-a}}{x-a} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{\frac{1}{2}-1} = \lim\limits_{x\to a^+} \sqrt{x-a} = \sqrt{a^+-a} = \sqrt{0^+} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x-a}{\sqrt{x-a}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{1-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^+-a}} = \dfrac{1}{\sqrt{0^+}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty.$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+a}-ax\right) = \left[+\infty-\infty\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+a}-ax\right)\left(\sqrt{x^2+a}+ax\right)}{\sqrt{x^2+a}+ax} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+a-a^2x^2}{\sqrt{x^2+a}+ax} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-a^2)x^2+a}{\sqrt{x^2+a}+ax}.$

Si $a\neq 1$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+a}-ax\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-a^2)x^2+a}{\sqrt{x^2+a}+ax} = \left[\dfrac{\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-a^2)x^2+a}{\sqrt{x^2+a}+ax} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-a^2)x+\frac{a}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x^2}}+a} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a\in[0,1), \\ -\infty & \text{si } a\in(1,+\infty). \end{cases}$

Si $a=1$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \left[\dfrac{1}{+\infty}\right] = 0.$

## Solución 7.2.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ por el Criterio del Sándwich ya que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq 1$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{1/x}+5^{-1/x}}{3^{1/x}+4^{-1/x}} = \left[\dfrac{2^{1/0}+5^{-1/0}}{3^{1/0}+4^{-1/0}}\right] \quad\Rightarrow\quad$ calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{1/x}+5^{-1/x}}{3^{1/x}+4^{-1/x}} = \left[\frac{2^{1/0^+}+5^{1/0^-}}{3^{1/0^+}+4^{1/0^-}}\right] = \left[\frac{2^{+\infty}+5^{-\infty}}{3^{+\infty}+4^{-\infty}}\right] = \left[\frac{+\infty+0}{+\infty+0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}+15^{-1/x}}{1+12^{-1/x}} = \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/0^+}+15^{1/0^-}}{1+12^{1/0^-}}\right] = \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}+15^{-\infty}}{1+12^{-\infty}}\right] = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^{1/x}+5^{-1/x}}{3^{1/x}+4^{-1/x}} = \left[\frac{2^{1/0^-}+5^{1/0^+}}{3^{1/0^-}+4^{1/0^+}}\right] = \left[\frac{2^{-\infty}+5^{+\infty}}{3^{-\infty}+4^{+\infty}}\right] = \left[\frac{0+\infty}{0+\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{8^{1/x}+\left(\frac{5}{4}\right)^{-1/x}}{12^{1/x}+1} = \left[\frac{8^{1/0^-}+\left(\frac{5}{4}\right)^{1/0^+}}{12^{1/0^-}+1}\right] = \left[\frac{8^{-\infty}+\left(\frac{5}{4}\right)^{+\infty}}{12^{-\infty}+1}\right] = \frac{0+\infty}{0+1} = +\infty.$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} (3x^2+1)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1^{\frac{1}{0^+}}\right] = \left[1^{+\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{3x^2}}\right)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^{\frac{3x^2}{x^2}} = e^3.$

## Solución 7.3.

(a) La función es continua en todo su dominio ($\mathrm{Dom}(f) = [-1,1]$) porque es una raíz cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en $[-1,1]$).

(b) La función $g$ es continua en $(-1,1)$ por estar definida como la raíz cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en $(-1,1)$) y también es continua en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ por ser constante.

La función es continua en $x=-1$ si $f(-1)=\lim_{x\to-1} f(x)$. Calculamos $f(-1)=\sqrt{1-(-1)^2}=0$ y

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} 0=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-(-1)^2}=0,$$

es decir, $f(-1)=0=\lim_{x\to-1} f(x)$ y deducimos que $f$ es continua en $x=-1$.

La función es continua en $x=1$ si $f(1)=\lim_{x\to1} f(x)$. Calculamos $f(1)=\sqrt{1-1^2}=0$ y

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-1^2}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} 0=0,$$

es decir, $f(1)=0=\lim_{x\to1} f(x)$ y deducimos que $f$ es continua en $x=1$.

(c) La función $g$ es continua en $(-1,1)$ por estar definida como la raíz cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en $(-1,1)$) y también es continua en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ por ser un polinomio.
La función es continua en $x=-1$ si $f(-1)=\lim_{x\to-1} f(x)$. Calculamos $f(-1)=\sqrt{1-(-1)^2}=0$ y

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} (x-1)=-2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-(-1)^2}=0.$$

Como los límites laterales no coinciden, deducimos que no existe $\lim_{x\to-1} f(x)$ y, por lo tanto, $f$ no es continua en $x=-1$. Además, como $\lim_{x\to-1^\pm} f(x)\in\mathbb{R}$, deducimos que $f$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=-1$.
La función es continua en $x=1$ si $f(1)=\lim_{x\to1} f(x)$. Calculamos $f(1)=\sqrt{1-1^2}=0$ y

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-1^2}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} (x-1)=1-1=0,$$

es decir, $f(1)=0=\lim_{x\to1} f(x)$ y deducimos que $f$ es continua en $x=1$.

Solución 7.4. Para que $f$ sea continua en $x=2$ necesitamos que $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)=\frac{2\alpha}{0+4}=\frac{\alpha}{2}$. Calculamos los límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2^-} f(x)&=\lim_{x\to2^-}\frac{\alpha x}{|x-2|+4}=\frac{\alpha 2}{|2-2|+4}=\frac{\alpha}{2},\\ \lim_{x\to2^+} f(x)&=\lim_{x\to2^+}(x-2)\sin\left(\tfrac{\pi x}{x-2}\right)=0,\end{aligned}$$

donde hemos aplicado el Criterio del Sándwich (porque $\lim_{x\to2}(x-2)=0$ y $\left|\sin\left(\frac{\pi x}{x-2}\right)\right|\leq 1$). Deducimos que $f$ es continua en $x=2$ si $\frac{\alpha}{2}=0$, es decir, si $\alpha=0$.

Para que $f$ sea continua en $x=10$ necesitamos que $\lim_{x\to10} f(x)=f(10)=8\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=8\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$. Calculamos los límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to10^-} f(x)&=\lim_{x\to10^-}(x-2)\sin\left(\tfrac{\pi x}{x-2}\right)=8\sin\left(\tfrac{10\pi}{8}\right)=4\sqrt{2},\\ \lim_{x\to10^+} f(x)&=\lim_{x\to10^+}\frac{h(x-10)-10}{10^x+10}=\frac{h(0)-10}{10^{10}+10}=\frac{\beta-10}{10^{10}+10}.\end{aligned}$$

Deducimos que $f$ es continua en $x=10$ si $\frac{\beta-10}{10^{10}+10}=4\sqrt{2}$, es decir, si $\beta=10+4\sqrt{2}(10^{10}-10)$.

Solución 7.5. Definimos la función $f(x)=2x-3-\sin x$, que es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0,\pi]$. Además, como $f(0)=0-3-\sin 0=-3<0$ y $f(\pi)=2\pi-3-\sin\pi=2\pi-3>0$, por el teorema de Bolzano deducimos que existe $\xi\in(0,\pi)$ tal que $f(\xi)=0$, es decir, $\sin\xi=2\xi-3$.

Solución 7.6.

(a) $f(0)=\sqrt{0^2+4}=2 \quad$ y $\quad f(2)=\dfrac{2+6}{2^2-4\cdot2+3}=\dfrac{8}{-1}=-8.$

(b) Si $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+4} = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$No hay solución.

Si $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x+6}{x^2-4x+3} = 0 \Rightarrow x+6 = 0 \Rightarrow x = -6 \notin (0, +\infty) \Rightarrow$No hay solución.

(c) Para poder utilizar el Teorema de Bolzano la función $f$ tiene que ser continua en el intervalo $[0, 2]$, pero esto no es cierto porque en $x = 1$ la función tiene una discontinuidad de salto infinito ya que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+6}{(x-1)(x-3)} = \left[\frac{7}{0^+ \cdot (-2)}\right] = -\infty.$$

Solución 7.7. Definimos la función $g(x) = f(x) - x$, que es continua en el intervalo $[0, 1]$.

Si $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$, entonces $g(0) = f(0) - 0 > 0$ y $g(1) = f(1) - 1 < 0$ y por el teorema de Bolzano deducimos que existe $\xi \in (0, 1) \subset [0, 1]$ tal que $g(\xi) = 0$, es decir, $f(\xi) = \xi$.

Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, la solución de la ecuación sería $x = 0$ o $x = 1$, respectivamente.

Solución 7.8. Si definimos la función

$$f(x) = x^2 - \cos x + x \sin x,$$

$f(x)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma y producto de funciones continuas. Es fácil verificar además que $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, por lo que el Teorema de Bolzano permite afirmar que existe $x_1 \in (0, \pi)$ tal que $f(x_1) = 0$, esto es, una solución real a la ecuación dada.

Por otro lado, tomando ahora $x = -\pi$, $f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, así que también podemos aplicar de nuevo el teorema de Bolzano al intervalo $[-\pi, 0]$ y afirmar que existe un segundo valor $x_2 \in (-\pi, 0)$ tal que $f(x_2) = 0$, lo que proporciona una segunda solución real.

Solución 7.9. Consideramos la función

$$f(x) = x^6 - 6x - 1,$$

que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, ya que es una función polinómica. Además, $f(x)$ cumple que $f(0) = -1 < 0$, $f(-1) = 6 > 0$ y $f(2) = 2^6 - 12 - 1 = 51 > 0$, luego podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 2]$ para garantizar que existen dos puntos donde $f$ se anula, $x_1$ y $x_2$, pertenecientes a los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 2)$, respectivamente. Los puntos $x_1$ y $x_2$ proporcionan dos soluciones reales de la ecuación dada.

Vamos ahora a comprobar que no existen más soluciones reales: si analizamos el signo de $f'(x)$,

$$f'(x) = 6x^5 - 6 = 6(x^5 - 1),$$

se tiene que $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. Una función así tiene como máximo dos raíces reales: dado que es estrictamente monótona en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$, sólo puede tener una raíz cada uno de los intervalos (también se puede comprobar utilizando el Teorema de Rolle).

Solución 7.10.

(a) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) = \left[\infty - \infty\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1) + \log x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1+x\log x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\log x + 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) $$\lim_{x\to 0} (1 + x\sin x)^{2/x^2} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x\sin x}}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}\right]^{\frac{2x\sin x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{(1+x\sin x - 1)\frac{2}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}(x\sin x)\frac{2}{x^2}}.$$

Calculamos el límite del exponente utilizando que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} = 2.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} (1 + x\sin x)^{2/x^2} = e^2$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt[3]{x-a}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}(x-a)^{1-1/3}=\lim_{x\to a}(x-a)^{2/3}=(a-a)^{2/3}=0.$

(d) Si empleamos la identidad $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (similar a la habitualmente utilizada $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$), y la aplicamos con $x^{1/3}$ y $a^{1/3}$ como términos, se obtiene que

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^{1/3}-a^{1/3}}=\lim_{x\to a}\frac{(x^{1/3}-a^{1/3})(x^{2/3}+x^{1/3}a^{1/3}+a^{2/3})}{x^{1/3}-a^{1/3}}=$$
$$=\lim_{x\to a}(x^{2/3}+x^{1/3}a^{1/3}+a^{2/3})=3a^{2/3}.$$

Solución 7.11. Como la función $f(x)$ es una función racional (cociente de dos polinomios), para que sea continua en todo $\mathbb{R}$ será necesario que $x^2-2ax+5a\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, ya que en caso contrario existirá un $x_0\in\mathbb{R}$ en el que el denominador se anule. En ese caso, la función no estará definida en $x_0$ y no tendrá sentido entonces hablar de su continuidad en ese punto (y no podremos ni mucho menos decir que es continua en todo $\mathbb{R}$).

Si calculamos las raíces de $x^2-2ax+5a$, se tiene que

$$x=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-20a}}{2}=\frac{2a\pm\sqrt{4a(a-5)}}{2}.$$

La función no tendrá raíces reales siempre que $4a(a-5)<0$, lo que sucede solamente si, y sólo si, $a\in(0,5)$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ si $a\in(0,5)$.

Solución 7.12. Para que la función sea continua en $0$ deberá suceder que

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

y dado que $f(0)=c$, el único valor de $c$ que hará continua la función sera el valor del límite, que debe existir y ser único. Calculando el valor del límite en $x=0$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0}x\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x}{\cos x}=1$$

Se deduce que $c=1$ es el único valor de $c$ que hace la función continua (en el resto de casos posee una discontinuidad de tipo evitable).

Solución 7.13. Si calculamos el límite de $f(x)$ por la izquierda, vemos que

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{4+\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}=0,$$

puesto que $0\leq\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$, de donde se deduce que

$$\frac{x^2}{5}\leq\frac{x^2}{4+\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\leq\frac{x^2}{4},$$

y como $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{5}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{4}=0$, se tiene que el límite lateral por la izquierda es cero.

Si analizamos el límite por la derecha, y recordamos que $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{1/x}+2^{1/x}}{4^{1/x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{3}{4})^{1/x}+(\frac{2}{4})^{1/x}}{1}=\frac{0+0}{1}=0,$$

de donde se deduce que existe $\lim_{x\to 0}f(x)$ para cualquier valor de $c\in\mathbb{R}$, y su valor es $0$. El único valor que hace a $f(x)$ continua es $c=0$, ya que de este modo $\lim_{x\to 0}f(x)=c=0$.

Solución 8.1.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{1/x}}=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0.$$

Solución 8.2. Como $0=f(2)=4a+2b$ y $f'(2)=4a+b$ (ya que $f'(x)=2ax+b$), al sustituir en la ecuación de la recta tangente $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y-0=(4a+b)(x-2)$ deducimos que $4a+b=1$ y resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{r}4a+2b=0,\\ 4a+b=1,\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}a=1,\\ b=-3.\end{array}\right.$$

Solución 8.3.

(a) Existencia de solución.

La función $f(x)=xe^{x^2-1}+\lambda x$ es continua en $[-\alpha,\alpha]$ y además, como $f(-\alpha)=-\alpha e^{\alpha^2-1}-\alpha\lambda$ y $f'(\alpha)=\alpha e^{\alpha^2-1}+\alpha\lambda$, es decir, $f(-\alpha)f(\alpha)=-\alpha^2(e^{\alpha^2-1}+\lambda)^2<0$. Por lo tanto, el teorema de Bolzano prueba que existe $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ tal que $f(\xi)=0$.

(b) Unicidad de solución.

Suponemos, por reducción al absurdo, que existen $\xi_1<\xi_2$ con $\xi_1,\xi_2\in[-\alpha,\alpha]$ tales que $f(\xi_1)=f(\xi_2)$. Como $f$ es continua en $[\xi_1,\xi_2]$ y derivable en $(\xi_1,\xi_2)$, deducimos que existe $z\in(\xi_1,\xi_2)$ tal que $f'(z)=0$. Es decir, $0=f'(z)=e^{z^2-1}+2z^2e^{z^2-1}+\lambda$ pero esto es imposible porque $(1+2z^2)e^{z^2-1}+\lambda>0$ y concluimos que la solución es única.

Solución 8.4.

(a) $f(-4)=\sqrt[3]{(1-4)^2}=\sqrt[3]{9}$ y $f(2)=\sqrt[3]{(1+2)^2}=\sqrt[3]{9}$.

(b) Calculamos $f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ y si $f'(x)=0$, entonces $2=0$ y deducimos que la ecuación no tiene solución.

(c) No se contradice el Teorema de Rolle porque la función $f(x)$ no es derivable en $x=-1\in(-4,2)$:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(1+x)^{2/3}-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(1+x)^{1/3}}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$$

Solución 8.5. Definimos la función $f(x)=e^x\sin(2x)$ y calcularemos el polinomio de Taylor $P_{2,0}(x)$:

$$\begin{array}{ll} f(x)=e^x\sin(2x) & f(0)=0,\\ f'(x)=e^x(\sin(2x)+2\cos(2x)) & f'(0)=2,\\ f''(x)=e^x(-3\sin(2x)+4\cos(2x)) & f''(0)=4.\end{array}$$

Entonces, el polinomio de Taylor queda:

$$P_{2,0}(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+f''(0)\frac{(x-0)^2}{2}=0+2x+\frac{4x^2}{2}=2x+2x^2=2x(1+x).$$

Una aproximación a $e^{0,1}\sin(0{,}2)$ es $f(0{,}1)\approx P_{2,0}(0{,}1)=2\cdot 0{,}1\cdot(1+0{,}1)=0{,}22$.

Acotamos el error cometido sabiendo que $\xi\in(0,0{,}1)$:

$$\begin{aligned}\left|R_{2,0}(0{,}1)\right|&=\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(0{,}1-0)^3\right|=\frac{0{,}1^3}{6}\left|e^{\xi}(-11\sin(2\xi)-2\cos(2\xi))\right|\le\\ &\le\tfrac{0{,}1^3}{6}e^{\xi}(11|\sin(2\xi)|+2|\cos(2\xi)|)\le\tfrac{0{,}1^3}{6}e^{\xi}(11+2)\le\tfrac{13}{6}0{,}1^3e\le 3\tfrac{13}{6}0{,}1^3=\tfrac{13}{2}0{,}001=\\ &=0{,}0065.\end{aligned}$$

Solución 8.6.

(a) $\mathrm{Dom}(f)=(0,2)\cup(2,+\infty)$.

(b) Puntos de corte con los ejes: no hay punto de corte con el eje de ordenadas porque $0\notin\mathrm{Dom}(f)$ y tampoco hay punto de corte con el eje de abscisas porque la ecuación $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}(x-2)}=0\Rightarrow e^x=0$ no tiene solución.

(c) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}(x-2)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2)+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}e^x}{3x-2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}e^x + 2\sqrt{x}e^x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}}{3}e^x = \left[\frac{0+\infty}{3}\cdot(+\infty)\right] = +\infty.$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$ porque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$ y tampoco en $-\infty$ porque el dominio está acotado por la izquierda.

(d) Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}(x-2)} = \left[\frac{1}{0^+\cdot(-2)}\right] = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^x}{\sqrt{x}(x-2)} = \left[\frac{e^2}{\sqrt{2}\cdot 0^-}\right] = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}(x-2)} = \left[\frac{e^2}{\sqrt{2}\cdot 0^+}\right] = +\infty.$$

Las rectas $x=0$ y $x=2$ son asíntotas verticales de $f$.

(e) Monotonía: calculamos la derivada de $f$.

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{x}(x-2) - e^x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2)+\sqrt{x}\right)}{x(x-2)^2} = e^x\frac{2x(x-2)-(x-2)-2x}{2\sqrt{x}x(x-2)^2} = e^x\frac{2x^2-7x+2}{2\sqrt{x}x(x-2)^2}.$$

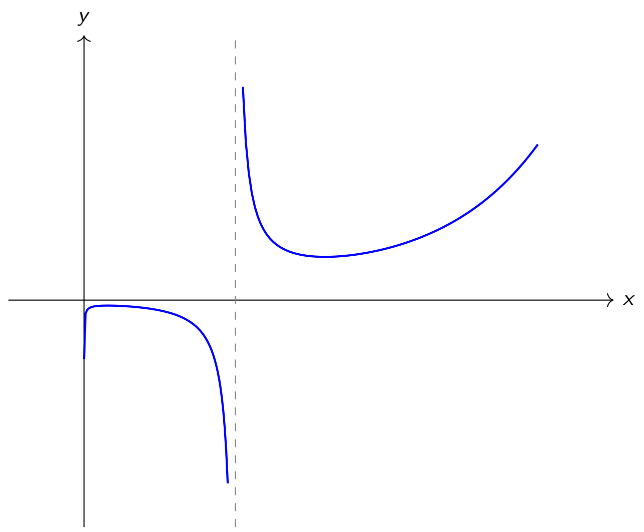
Si $f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2-7x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7-\sqrt{33}}{4} < \frac{7}{4} < 2, \\ x_2 = \frac{7+\sqrt{33}}{4} > \frac{7+\sqrt{25}}{4} > 2. \end{cases}$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

- Si $x \in (0, x_1)$: $f'(x) > 0$ y la función es creciente.
- Si $x \in (x_1, 2)\cup(2, x_2)$: $f'(x) < 0$ y la función es decreciente.
- Si $x \in (x_2, +\infty)$: $f'(x) > 0$ y la función es creciente.

(f) Extremos relativos: de la monotonía deducimos que $f$ tiene un máximo local en $x = x_1$ y un mínimo local en $x = x_2$.

(g) Representación gráfica:




Solución 8.7. Si tomamos el polinomio de grado $n$ en el origen de la función exponencial $f(x) = e^x$,

$$P_{n,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

una aproximación del número pedido, $\sqrt[3]{e^2} = f\left(\frac{2}{3}\right)$, será $P_{n,0}\left(\frac{2}{3}\right)$:

$$P_{n,0} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{2^n}{n! \cdot 3^n}.$$

Dado que para el error cometido sabemos que $\xi \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, tomando la fórmula del error buscamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|R_{n,0}\left(\tfrac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\left(\tfrac{2}{3} - 0\right)^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\xi} 2^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}\right| \leq 10^{-2}.$$

Dado que $e^{\xi} < e^1 = e < 3$, se tendrá que

$$\left|R_{n,0}\left(\tfrac{2}{3}\right)\right| < \left|\frac{3 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}\right| = \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!3^n}\right|.$$

Tomando $n = 4$, se obtiene que

$$\frac{2^5}{5!3^4} = \frac{4}{1215} \approx 0,003292 < 10^{-2},$$

siendo $n = 4$ el primer entero para el que se cumple el error es menor que $10^{-2}$ (para $n = 3$ se obtiene $\frac{2}{81} \approx 0,0247$). Por tanto, sustituyendo en el polinomio de Taylor de grado 4, la aproximación que cumple lo pedido es

$$\sqrt[3]{e^2} \approx 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{81} + \frac{2}{243}.$$

Solución 8.8. Si calculamos las derivadas de la función secante, vemos que:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x,$$
$$f''(x) = \sec^3 x + \sec x \tan^2 x,$$

y como $\sec(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, deducimos que $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ y $f''(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Por tanto, el polinomio de Taylor en $\frac{\pi}{4}$ vendrá dado por

$$P_{2,\frac{\pi}{4}}(x) = f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + f''\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}(x - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{3}{\sqrt{2}}(x - \tfrac{\pi}{4})^2.$$

Solución 8.9.

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

(b) Puntos de corte con los ejes: no hay punto de corte con el eje de ordenadas porque $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ y tampoco hay punto de corte con el eje de abscisas porque la ecuación $\dfrac{x}{\log x} = 0 \Rightarrow x = 0$ tiene como única solución $x = 0$, que no pertenece al dominio.

(c) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x = +\infty,$$

luego no hay asíntota horizontal en $+\infty$ y tampoco en $-\infty$ porque el dominio está acotado por la izquierda.

(d) Asíntota oblicua:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log x} = 0,$$

luego tampoco hay asíntota oblicua en $+\infty$.

(e) Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\log x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\log x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de $f$.

(f) Monotonía: calculamos $f'(x) = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2}$.

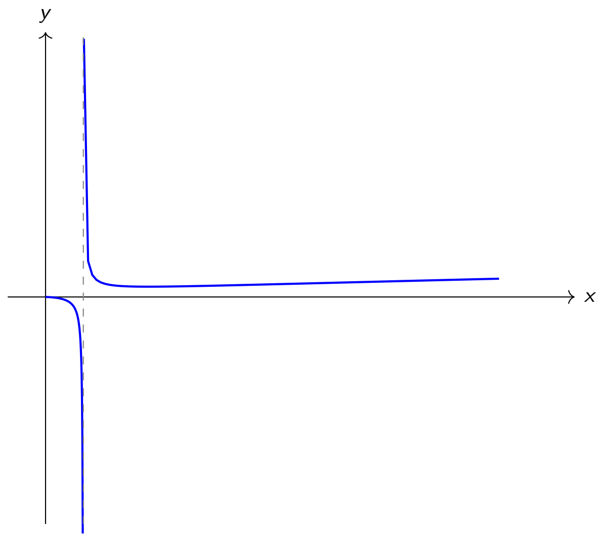
Si $f'(x) = 0 \Rightarrow \log x - 1 = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = e$, por lo que la función, que es continua y derivable en su dominio por ser cociente de funciones derivables, tiene un único punto crítico.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

- Si $x \in (0,1) \cup (1,e)$: $f'(x) < 0$ y la función es decreciente.
- Si $x \in (e, +\infty)$: $f'(x) > 0$ y la función es creciente.

(g) Extremos relativos: de la monotonía deducimos que $f$ tiene un mínimo local en $x = e$.

Representación gráfica:




Solución 8.10. Aplicando la definición de valor absoluto, se tendrá que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad 1 - |x| > 0, \\ -1 + |x| & \text{si} \quad 1 - |x| \leq 0, \end{cases}$$

Puesto que $1 - |x| > 0$ si y sólo si $-1 < x < 1$, podemos expandir la función anterior y considerar la expresión alternativa

$$f(x) = \begin{cases} -1 + |x| & \text{si} \quad x \leq -1, \\ 1 - |x| & \text{si} \quad -1 < x < 1, \\ -1 + |x| & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Finalmente, analizando $|x|$ en cada uno de los intervalos dados, llegamos a la siguiente última expresión de $f(x)$ como función a trozos, que no involucra valores absolutos:

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si} \quad x \leq -1, \\ 1 + x & \text{si} \quad -1 < x \leq 0, \\ 1 - x & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ -1 + x & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Teniendo esto en cuenta:

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) Puntos de corte con los ejes: se tiene que $|1 - |x|| = 0$ si y sólo si $1 - |x| = 0$, lo que sucede si y sólo si $|x| = 1$, esto es, la función corta al eje de abscisas cuando $x = \pm 1$ (puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$). En cuanto al eje de ordenadas, se tiene que $f(0) = 1$, luego corta a dicho eje en el $(0, 1)$.

(c) Continuidad: la función valor absoluto $g(x) = |x|$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, y la función $f(x)$ dada es composición y suma de funciones continuas, luego es continua en todo $\mathbb{R}$.

(d) Derivabilidad: analizando la descripción de $f(x)$ como función a trozos, es una función lineal en cada uno de ellos, luego es derivable en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ (coincide con una función lineal, por tanto derivable, en un entorno abierto). En esos intervalos, se tiene que

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<-1,\\ 1 & \text{si} \quad -1<x<0,\\ -1 & \text{si} \quad 0<x<1,\\ 1 & \text{si} \quad x>1.\end{cases}$$

Dado que

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^-} -1\neq 1=\lim_{x\to -1^+} 1=\lim_{x\to -1^+} f'(x),$$

la función no es derivable en $x=-1$. Un cálculo análogo prueba que tampoco es derivable en $x=0$ ni en $x=1$.

(e) Monotonía: analizando el signo de la derivada, vemos que ésta no se anula nunca y que:

- Si $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$, la función es decreciente.
- Si $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$, la función es creciente.

La función presenta tres puntos críticos, $x=-1, x=0, x=1$: se tiene que $x=\pm 1$ son mínimos relativos (y de hecho absolutos, puesto que $f(1)=f(-1)=0$ y la función es siempre mayor o igual a cero) y $x=0$ es máximo relativo (no absoluto).

Solución 8.11. La distancia entre el punto $P_0:=(0,2)$ y un punto genérico $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ viene dada por la función distancia

$$d(x,y)=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}.$$

Si exigimos ahora que el punto pertenezca a la parábola $y=x^2$, obtenemos sustituyendo en la función de arriba una función distancia de una variable

$$d(x):=d(x,x^2)=\sqrt{x^2+(x^2-2)^2},$$

de la que buscamos hallar los mínimos absolutos. La función $x^2+(x^2-2)^2$ es estrictamente positiva, luego es derivable por ser composición de funciones derivables (la función raíz cuadrada lo es en $\mathbb{R}^+$). Si calculamos la derivada obtenemos:

$$d'(x)=\frac{2x+2(x^2-2)2x}{2\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}}=\frac{2x(1+2(x^2-2))}{2\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}}=\frac{x(1+2(x^2-2))}{\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}},$$

y deducimos que los puntos críticos, es decir, la solución de $d'(x)=0$, son $x=0$ y aquellos tales que

$$1+2(x^2-2)=0,$$

esto es, $x^2=\frac{3}{2}$, de donde $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Analizando el signo de $d'(x)$, vemos que la función $d(x)$ es decreciente en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$.

Por tanto $x=0$ es un máximo relativo y $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ son ambos mínimos relativos (y de hecho absolutos). Por tanto, los puntos de la parábola donde la distancia al punto $(0,2)$ se minimiza son

$$P_1=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}\right),\qquad P_2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}\right).$$

Solución 9.1. Utilizamos la fórmula de integración por partes con

$$\begin{cases} u = \arcsin x & \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \\ dv = dx & \Rightarrow \quad v = \displaystyle\int dv = \int dx = x, \end{cases}$$

para resolver la integral:

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-1/2}\,dx =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Solución 9.2. Utilizamos el cambio de variable $x-2=t^2$ con $dx = 2t\,dt$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{(t^2+2)^2}{t}2t\,dt = 2\int (t^4+4t^2+4)\,dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{8t^3}{3} + 8t + K =$$
$$= \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{8}{3}(x-2)^{3/2} + 8(x-2)^{1/2} + K.$$

Solución 9.3. Utilizamos la fórmula de integración por partes con

$$\begin{cases} u = e^{2x} & \Rightarrow \quad du = 2e^{2x}\,dx, \\ dv = \sin x\,dx & \Rightarrow \quad v = \displaystyle\int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x, \end{cases}$$

para resolver la integral:

$$I = \int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x - \int -2e^{2x}\cos x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx =$$
$$= -e^{2x}\cos x + 2\left[e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\,dx\right] = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx =$$
$$= e^{2x}(2\sin x - \cos x) - 4I,$$

donde hemos vuelto a utilizar la fórmula de integración por partes con

$$\begin{cases} u = e^{2x} & \Rightarrow \quad du = 2e^{2x}\,dx, \\ dv = \cos x\,dx & \Rightarrow \quad v = \displaystyle\int dv = \int \cos x\,dx = \sin x. \end{cases}$$

Hemos obtenido

$$I = e^{2x}(2\sin x - \cos x) - 4I \Rightarrow 5I = e^{2x}(2\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + K.$$

Solución 9.4.

(a) Utilizamos el cambio de variable $x = \sin t$ con $dx = \cos t\,dt$ y $\begin{cases} \text{si } x = 0 \to t = \arcsin 0 = 0, \\ \text{si } x = 1 \to t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ entonces

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\Big[\sin(2t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x-3)\,dx + \int_1^2 (3x^2-4x)\,dx = \Big[x^2-3x\Big]_0^1 + \Big[x^3-2x^2\Big]_1^2 =$
$= (1-3) - 0 + (8-8) - (1-2) = -1.$

Solución 9.5. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, resolvemos la división:

$$\frac{3x^5-4x^3+5x^2-10x+6}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = 3x+6+\frac{2x^3-2x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x^5-4x^3+5x^2-10x+6}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = \int (3x+6)\,dx + \int \frac{2x^3-2x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = \\
&= \frac{3x^2}{2}+6x+\int \frac{2x^3-2x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = \frac{3x^2}{2}+6x+\int \frac{2x^3-2x^2-2}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \\
&= \frac{3x^2}{2}+6x+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx+\int \frac{2}{x-1}\,dx-\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \\
&= \frac{3x^2}{2}+6x+\arctan x+2\log|x+1|+\frac{1}{x-1}+C,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2x^3-2x^2-2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)^2} = \frac{(Mx+N)(x-1)^2+A(x^2+1)(x-1)+B(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2},$$

es decir,

$$2x^3-2x^2-2 = M(x^3-2x^2+x)+N(x^2-2x+1)+A(x^3-x^2+x-1)+B(x^2+1),$$

y el sistema obtenido al igualar coeficientes es:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Coef. } x^3: & 2 = M+A \\
\text{Coef. } x^2: & -2 = -2M+N-A+B \\
\text{Coef. } x: & 0 = M-2N+A \\
\text{Térm. indep.}: & -2 = N-A+B
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
M=0, \\ N=1, \\ A=2, \\ B=-1.
\end{array}\right.$$

Solución 9.6. Si realizamos una descomposición en fracciones simples, dado que el denominador factoriza como $x^3+2x^2+3x+6=(x+2)(x^2+3)$, obtenemos que:

$$\frac{-4}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2+3} = \frac{A(x^2+3)+(Mx+N)(x+2)}{(x+2)(x^2+3)},$$

de donde igualando numeradores y operando conseguimos la expresión

$$-4 = (A+M)x^2+(2M+N)x+(3A+2N),$$

y al igualar coeficientes es llegamos al sistema

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Coef. } x^2: & 0 = A+M \\
\text{Coef. } x: & 0 = 2M+N \\
\text{Térm. indep.}: & -4 = 3A+2N
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
A=-4/7, \\ M=4/7, \\ N=-8/7.
\end{array}\right.$$

Se sigue que

$$\int \frac{-4}{x^3+2x^2+3x+6}\,dx = -\frac{4}{7}\int \frac{1}{x+2}\,dx+\frac{1}{7}\int \frac{4x-8}{x^2+3}\,dx = -\frac{4}{7}\int \frac{1}{x+2}\,dx+\frac{4}{7}\int \frac{x}{x^2+3}\,dx-\frac{8}{7}\int \frac{1}{x^2+3}\,dx.$$

Las dos primeras integrales son inmediatas:

$$-\frac{4}{7}\int \frac{1}{x+2}\,dx = -\frac{4}{7}\log|x+2| \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{7}\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{2}{7}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{2}{7}\log|x^2+3|.$$

La última es una integral de tipo arcotangente, puesto que

$$-\frac{8}{7}\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = -\frac{8}{7}\int \frac{1}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)}\,dx = -\frac{8}{21}\sqrt{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = -\frac{8\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

Concluimos que

$$\int \frac{-4}{x^3+2x^2+3x+6}\,dx = -\frac{4}{7}\log|x+2|+\frac{2}{7}\log|x^2+3|-\frac{8\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K.$$

Solución 9.7. Si tomamos el cambio de variable $t = \sqrt{x}$, con $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ (y por tanto $2t\,dt = dx$), la integral se convierte en

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 2te^t\,dt.$$

Resolviendo ahora por partes, con $\begin{cases} u = 2t & \Rightarrow \quad du = 2\,dt, \\ dv = e^t\,dt & \Rightarrow \quad v = \displaystyle\int e^t\,dt = e^t, \end{cases}$ se llega a

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 2te^t\,dt = 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + K = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + K = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + K.$$

Solución 9.8. La integral pedida es la integral de la función secante, para la que existen varios métodos de cálculo empleando identidades trigonométricas. Uno de los más sencillos es el siguiente: si multiplicamos numerador y denominador por $\cos x$ y utilizamos que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, se obtiene:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx.$$

Utilizando ahora el cambio de variable $t = \sin x$, con $dt = \cos x\,dx$, llegamos a

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt,$$

que se trata de una integral racional. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+B(1+t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{(B-A)t+(A+B)}{(1-t)(1+t)},$$

e igualando coeficientes se obtiene

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coef. } t: & 0 = B - A \\ \text{Térm. indep.}: & 1 = A + B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1/2, \\ B = 1/2. \end{array}\right.$$

En consecuencia

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1/2}{1+t}\,dt + \int \frac{1/2}{1-t}\,dt = \tfrac{1}{2}\left(\log|1+t| - \log|1-t|\right) + K =$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + K = \tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + K.$$

Solución 9.9. Calculamos primero la integral indefinida. Si escogemos el cambio de variable $t = \sqrt{x}$, con $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ (y por tanto $2t\,dt = dx$) se tiene que

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t}2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$
$$= 2\left(t - \log|1+t|\right) + K = 2\left(\sqrt{x} - \log|1+\sqrt{x}|\right) + K.$$

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[2\left(\sqrt{x} - \log|1+\sqrt{x}|\right)\right]_0^1 = 2(1-\log 2) - 2(0-0) = 2 - 2\log 2 = 2 - \log 4.$$

Solución 9.10. Calculamos en primer lugar la integral indefinida. El denominador sugiere emplear el cambio de variable $x = 2\sin t$, de donde $dx = 2\cos t\,dt$.

Aplicando dicho cambio,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t\,dt = \int \frac{8\sin^2 t\cos t}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}\,dt = \int \frac{8\sin^2 t\cos t}{2\cos t}\,dt = \int 4\sin^2 t\,dt.$$

La integral de $\sin^2 t$ se resuelve utilizando identidades trigonométricas del ángulo doble: puesto que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ y $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$, se obtiene restando ambas ecuaciones que

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2},$$

y por tanto

$$\int 4\sin^2 t\,dt = 4\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = 2\int (1-\cos(2t))\;dt = 2\left(t - \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right) + K = 2t - \sin(2t) + K.$$

Para resolver la integral indefinida no es necesario deshacer el cambio de variable ya que basta ver que la función $2\sin t$ es biyectiva en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ y que si $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, entonces $x = 2\sin t \in (0, 2)$. Por ello,

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \Big[2t - \sin(2t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - \sin\pi) - (0 - \sin 0) = \pi.$$