Matemáticas I

Presentaciones

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Marta Latorre Balado y Javier Martínez Martínez
Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos
BURJ Digital https://burjcdigital.urjc.es/

6 de septiembre de 2023

Universidad Rey Juan Carlos

Índice

Parte I. Cálculo en una variable

Tema 1. Números reales y complejos

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad
Rey Juan Carlos

Números complejos

Números complejos

- Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = a + b\,\mathbf{i} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}\,,$$

  siendo

  - a la **parte real** de z ($\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = a$),
  - b la **parte imaginaria** de z ($\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = b$),
  - $\mathbf{i}$ la **unidad imaginaria**: $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$.

- El conjunto de **todos** los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

Números complejos

- **Ejemplo.** Calcula la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos.

  1) $z = 2 + 3\,\mathbf{i}$

  2) $z = \pi - 2\,\mathbf{i}$

  3) $z = -\mathbf{i}$

  4) $z = 2$

  (Solución)

- En particular, si $x \in \mathbb{R}$ entonces, $x \in \mathbb{C}$.

- Dos números complejos son iguales si tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Operaciones con números complejos

- Sean $z = a + b\,\mathbf{i}$ y $w = c + d\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define
  - la **suma**: $z + w = (a + c) + (b + d)\,\mathbf{i}$,
  - el **producto**: $z\,w = (ac - bd) + (ad + cb)\,\mathbf{i}$.
- En particular, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}\,\mathbf{i} = -1$, es decir, $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$.
- **Ejemplo.** Realiza las siguientes operaciones.

1) $(1 + \mathbf{i}) + (3 - 5\,\mathbf{i})$

2) $(1 + \mathbf{i})\,(3 - 5\,\mathbf{i})$
(Solución)

Conjugado de $z \in \mathbb{C}$

- Sea $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define el **conjugado** de z como

$$\overline{z} = a - b\,\mathbf{i}\,.$$

- En particular, $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$.

- **Ejemplo.** Realiza las siguientes operaciones.

1) $1 + \mathbf{i} + \overline{3 - 5\,\mathbf{i}}$

2) $\dfrac{1 + 2\,\mathbf{i}}{2 - 3\,\mathbf{i}}$

(Solución)

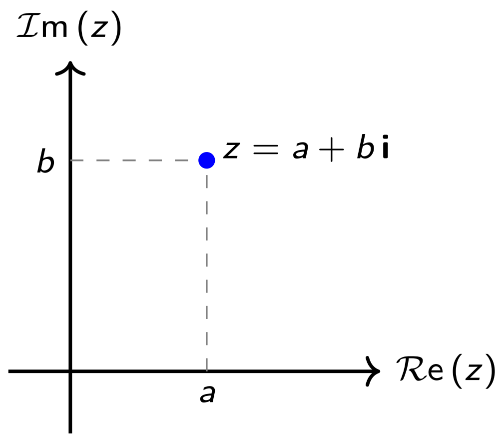
Módulo y argumento

Representación en el plano de $z \in \mathbb{C}$

- Si $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, podemos identificar

$$a + b\,\mathbf{i} \simeq (a, b) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 .$$

- Podemos representar $z \in \mathbb{C}$ en el plano complejo.

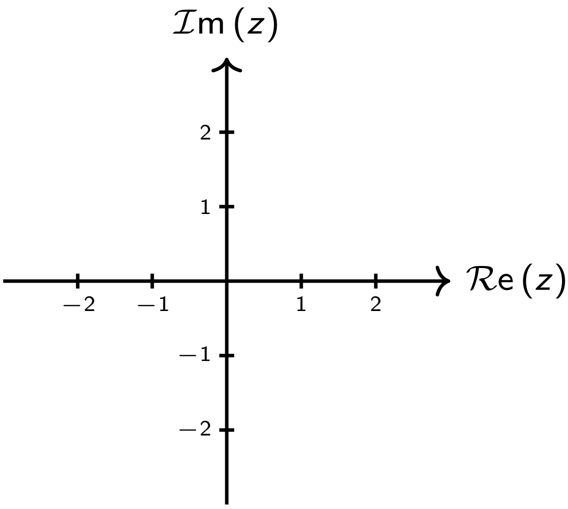


Representación en el plano de $z \in \mathbb{C}$

- **Ejemplo.** Representa en el plano complejo los siguientes números.

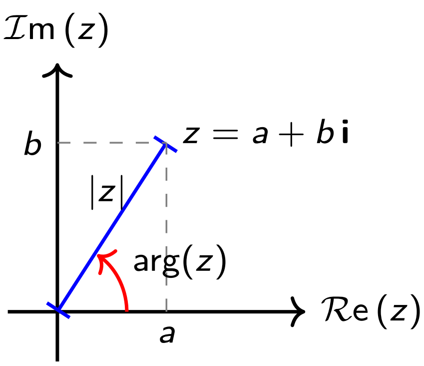
1) $z = 1 + 2\,\mathbf{i}$ **2)** $z = -\mathbf{i}$ **3)** $z = -2 + 2\,\mathbf{i}$ **4)** $z = 2$

(Solución)



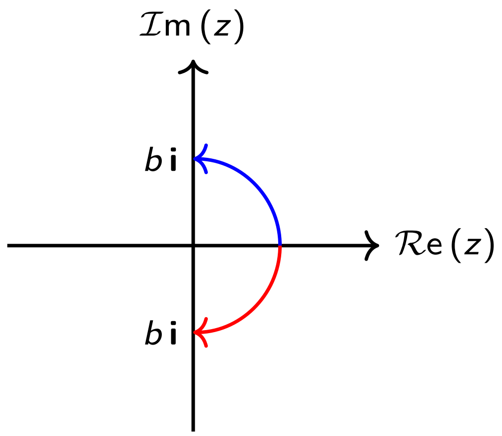
Módulo y argumento de $z \in \mathbb{C}$

- Sea $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define:
  - el **módulo** de z: $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$;
  - el **argumento** de z ($\arg(z)$) es el ángulo que forma el semieje positivo real con el vector que une el origen de coordenadas y el punto $z \in \mathbb{C}$.
- Si $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ se llama **argumento principal**: $\operatorname{Arg}(z)$.



Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

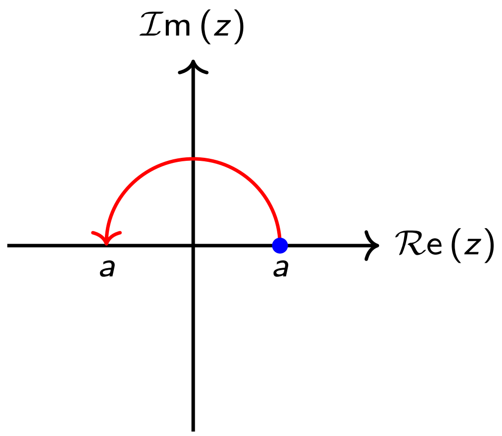
- Si $a = 0$



$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad b > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad b < 0\,. \end{cases}$$

Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

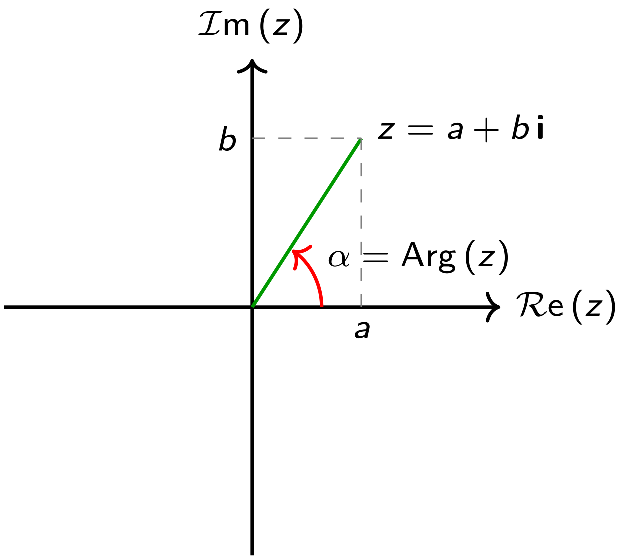
- Si $b = 0$



$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > 0\,, \\ \pi & \text{si} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a > 0$ y $b > 0$



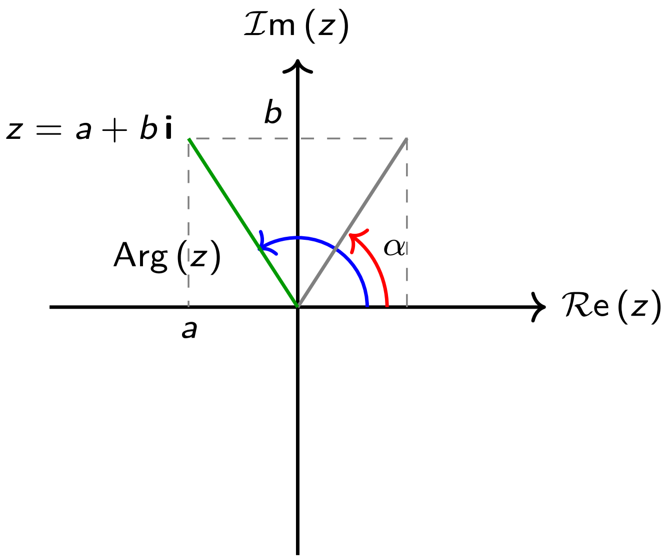
$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Primer cuadrante:

$\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha$

Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a < 0$ y $b > 0$



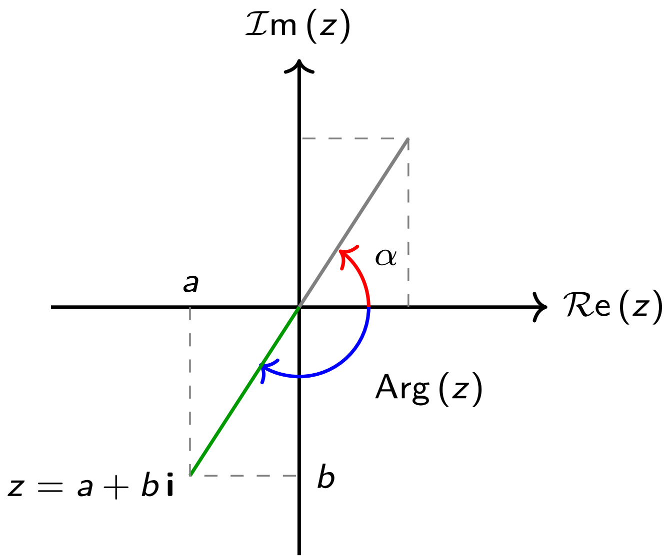
$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Segundo cuadrante:

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \pi - \alpha$$

Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a < 0$ y $b < 0$



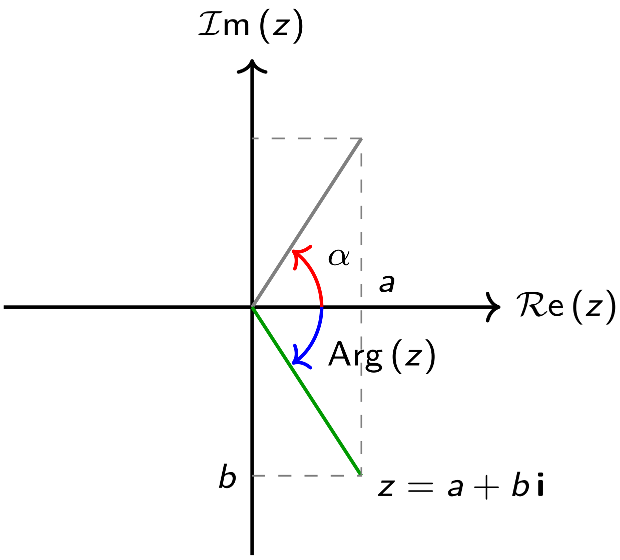
$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Tercer cuadrante:

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha - \pi$$

Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a > 0$ y $b < 0$



$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Cuarto cuadrante:

$\mathrm{Arg}\,(z) = -\alpha$

Módulo y argumento de $z \in \mathbb{C}$

- **Ejemplo.** Calcula el módulo y argumento de los siguientes números complejos.

  1) $z = 5 + 5\,\mathbf{i}$

  2) $z = 2\sqrt{3} - 2\,\mathbf{i}$

  3) $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathbf{i}$

  4) $z = -2 - 2\,\mathbf{i}$

  (Solución)

Formas de expresar un número complejo

- Sea $z \in \mathbb{C}$. Se puede expresar en $\begin{cases} \textbf{forma binómica}: \ z = a + b\,\mathbf{i} \\ \textbf{forma polar}: \ z = |z|_{\text{Arg}\,(z)} \end{cases}$

- Para pasar de forma polar a forma binómica se utiliza la forma **trigonométrica**:

$$z = |z|\left(\cos\left(\text{Arg}\,(z)\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\text{Arg}\,(z)\right)\right) .$$

- **Ejemplo.** Expresa en forma binómica los siguientes $z \in \mathbb{C}$.

1) $z = 2\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$

2) $z = 3_{\frac{3\pi}{4}}$

3) $z = 1_{\frac{\pi}{2}}$

4) $z = 7_0$

(Solución)

Operaciones en forma polar

- Si $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2} \in \mathbb{C}$, se puede calcular:
  - el **producto:** $z_1\, z_2 = (r_1\, r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$
  - el **cociente:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$ si $r_2 \neq 0$
- **Ejemplo.** Si $z_1 = 1_\pi$ y $z_2 = 2_{\frac{\pi}{2}}$, calcula:

1) $z_1\, z_2$ **2)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **3)** $z_1 + z_2$

(Solución)

Fórmula de DeMoivre

- Si $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ y $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$, entonces

$$z^n = r^n_{n\alpha} = r^n\left(\cos(n\,\alpha) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\,\alpha)\right) \quad \textbf{Fórmula de DeMoivre}$$

- **Ejemplo.** Comprueba que si $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$, entonces $z^3 \in \mathbb{R}$.

(Solución)

Teorema fundamental del álgebra

Teorema fundamental del álgebra

- **Teorema.** Si $p(x)$ es un polinomio (con coeficientes reales o complejos) de grado $n \in \mathbb{N}$, entonces $p(x)$ tiene n raíces complejas (no necesariamente distintas).

- **Ejemplos.** Calcula las raíces de los siguientes polinomios.

1) $x^2 - 1$

2) $x^2 - 4x + 4$

3) $x^2 + 1$
(Solución)

Cálculo de raíces n–ésimas

Cálculo de raíces n-ésimas

- Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $w \in \mathbb{C}$ es una **raíz *n*-ésima** de z si $w^n = z$.

- $z \in \mathbb{C}$ tiene n raíces n-ésimas.

- Para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = r$ y $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$, son

$$|w_k| = \sqrt[n]{r} \quad \text{y} \quad \arg(w_k) = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

- **Ejemplo.** Calcula las raíces cúbicas de $z = -2\,\mathbf{i}$.

(Solución)

Exponencial compleja

Exponencial compleja

- Sea $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define la **exponencial compleja**

$$e^{z} = e^{a+b\,\mathbf{i}} = e^{a}\left(\cos(b) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(b)\right).$$

- Si $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ y $\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha$, se puede expresar en forma **exponencial** como $z = r\,e^{\alpha\,\mathbf{i}}$.

- **Ejemplo.** Expresa en forma binómica los siguientes números complejos.

  1) $e^{-\frac{\pi}{4}\mathbf{i}}$

  2) $e^{2\pi\mathbf{i}}$

  3) $e^{1+\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$

  4) $e^{\pi\mathbf{i}}\,e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}}$

  (Solución)

Soluciones

Pág. 4

1) $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = 2, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = 3.$

2) $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = \pi, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = -2.$

3) $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = 0, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = -1.$

4) $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = 2, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = 0.$

Pág. 5

1) $(1+\mathbf{i}) + (3 - 5\,\mathbf{i}) = (1+3) + (1-5)\,\mathbf{i} = 4 - 4\,\mathbf{i}.$

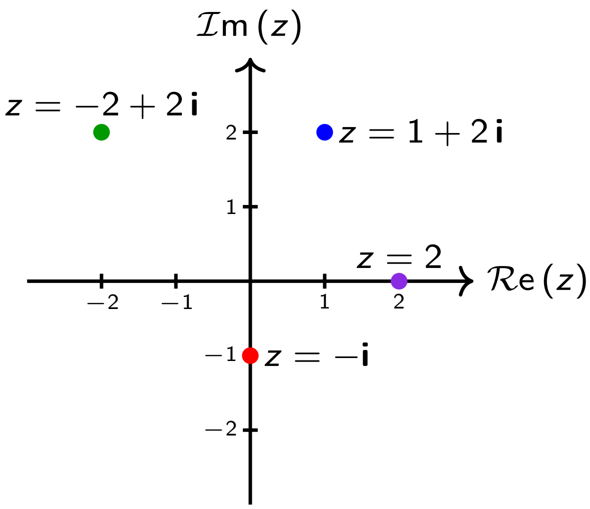
2) $(1+\mathbf{i})(3 - 5\,\mathbf{i}) = 1(3 - 5\,\mathbf{i}) + \mathbf{i}\,(3 - 5\,\mathbf{i}) = 3 - 5\,\mathbf{i} + 3\mathbf{i} + 5 = 8 - 2\,\mathbf{i}.$

Pág. 6

1) $(1+\mathbf{i}) + \overline{3 - 5\,\mathbf{i}} = (1+\mathbf{i}) + (3 + 5\,\mathbf{i}) = 4 + 6\,\mathbf{i}.$

2) $\frac{1+2\,\mathbf{i}}{2-3\,\mathbf{i}} = \frac{1+2\,\mathbf{i}}{2-3\,\mathbf{i}}\frac{2+3\,\mathbf{i}}{2+3\,\mathbf{i}} = \frac{2-3\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{i}+6}{4+9} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}\,\mathbf{i}.$

Pág. 9



Pág. 17

1) $|z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ y como z está en el primer cuadrante: $\operatorname{Arg}(z) = \alpha =$
$= \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

2) $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$ y como z está en el cuarto cuadrante: $\operatorname{Arg}(z) = -\alpha =$
$= -\arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

3) $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ y como z está en el segundo cuadrante $\text{Arg}\,(z) =$
$= \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$

4) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$ y como z está en el tercer cuadrante: $\text{Arg}\,(z) =$
$= \arctan\left(\frac{3}{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$

Pág. 18

1) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right) = 2 - 2\,\mathbf{i}.$

2) $z = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{i}.$

3) $z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1\,(0 + \mathbf{i}) = \mathbf{i}.$

4) $z = 7\,(\cos(0) + \mathbf{i}\,\text{sen}\,(0)) = 7(1 + 0\,\mathbf{i}) = 7.$

Pág. 19

1) $z_1\, z_2 = (1 \cdot 2)_{\pi + \frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{3\pi}{2}} = 2_{-\frac{\pi}{2}}.$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1}{2}\right)_{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}_{\frac{\pi}{2}}.$

3) $z_1 + z_2 = 1(\cos(\pi) + \mathbf{i}\,\text{sen}(\pi)) + 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 + 0\,\mathbf{i} + 0 + 2\,\mathbf{i} = -1 + 2\,\mathbf{i}.$

Pág. 20

Como $|z| = 2$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, utilizamos la fórmula de DeMoivre con $n = 3$:
$z^3 = (|z|^3)_{3\theta} = (2^3)_{3\frac{\pi}{3}} = 8_\pi = 8(\cos(\pi) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi)) = 8(-1 + 0\,\mathbf{i}) = -8 \in \mathbb{R}$.

Pág. 22

1) $x = 1$ y $x = -1$.

2) $x = 2$.

3) $x = \mathbf{i}$ y $x = -\mathbf{i}$.

Pág. 24

Como $r = |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$, las raíces cúbicas son
$w_0 = \sqrt[3]{r}_{\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{2}_{-\frac{\pi}{6}}$, $w_1 = \sqrt[3]{r}_{\frac{\theta+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}_{\frac{\pi}{2}}$ y $w_2 = \sqrt[3]{r}_{\frac{\theta+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}_{\frac{7\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}_{-\frac{5\pi}{6}}$.

Pág. 26

1) $e^{\frac{-\pi}{4}\mathbf{i}} = e^0\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}$.

2) $e^{2\pi\mathbf{i}} = e^0(\cos(2\pi) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(2\pi)) = 1(1 + 0\,\mathbf{i}) = 1$.

3) $e^{1+\frac{\pi}{2}\mathbf{i}} = e^1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e(0 + \mathbf{i}) = e\,\mathbf{i}$.

4) $e^{\pi\mathbf{i}}\,e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}} = e^{(\pi+\frac{\pi}{3})\mathbf{i}} = e^0\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{i}$.

Temas 2 y 3. Límites de funciones reales. Continuidad

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Conceptos básicos sobre funciones

Función

- Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Una **función** (real de variable real) $f : A \longrightarrow B$ es una regla o ley que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento de $b \in B$. Se denota $f(a) = b$.
- Decimos que el conjunto A es el **dominio** y el conjunto B el **codominio** de f.
- Es usual escribir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sin especificar el dominio ni el codominio.

Dominio e imagen

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - El **dominio** de f, denotado por $\mathrm{Dom}\,(f)$, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ para el que la función f está bien definida.
  - La **imagen** de f es $\mathrm{Im}\,(f) = \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists x \in \mathrm{Dom}\,(f) \text{ con } f(x) = y \,\right\}$
- **Ejemplo.** Calcula el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x}$

(Solución)

Límites de funciones

Límites

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;\text{ tal que si }\; x \in \mathrm{Dom}\,(f) \;\text{ y }\; 0 < |x - a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces } \; |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

- Al calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ observamos el comportamiento de f **cerca** de a, no en el punto a. Por lo tanto, los puntos cercanos a a deben pertenecer al $\mathrm{Dom}\,(f)$ pero puede que $a \notin \mathrm{Dom}\,(f)$.

- **Ejemplo.** Comprueba el valor del siguiente límite utilizando la definición.

1) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ con $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$
(Solución)

Cálculo de límites

- **Funciones elementales**

1) Polinomios.

$$\lim_{x \to a} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) = b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_n a^n$$

2) Exponenciales. $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$

3) Logaritmos. $\lim\limits_{x \to a} \log x = \log a$ si $a > 0$

4) Trigonométricas. $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ y $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

Cálculo de límites

- **Ejemplo.** Calcula los siguientes límites.

1) $\lim_{x \to 0} \cos x$

2) $\lim_{x \to 5} (x^2 + 2)$

3) $\lim_{x \to 1} \log x$

4) $\lim_{x \to -1} (\operatorname{sen}(x\pi) + x)$

(Solución)

Aritmética de límites

- **Proposición.**

  Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}\,.$$

  Entonces,

1) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L_1 + \beta L_2$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = L_1 L_2$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L_1|$

5) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$ si $L_1^{L_2} \neq 0^0$

6) Si $f(x) \leq g(x)$ cerca del punto $a \in \mathbb{R}$, entonces $L_1 \leq L_2$

Aritmética de límites

- **Ejemplo.** Calcula los siguientes límites.

1) $\lim_{x \to 1} (\cos(\pi x) - x \log x)$

2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2}{x + 1}$

3) $\lim_{x \to -1} |x - 5|$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$

(Solución)

Límites con valor $\pm\infty$

- Decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;\; \text{tal que si} \;\; x \in \mathrm{Dom}\,(f) \;\; \text{y} \;\; 0 < |x - a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces} \;\; f(x) > M\,.$$

- Decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;\; \text{tal que si} \;\; x \in \mathrm{Dom}\,(f) \;\; \text{y} \;\; 0 < |x - a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces} \;\; f(x) < -M\,.$$

Límites laterales

- **Límite por la derecha.** Decimos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \text{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| \leq \delta$$

$$\text{con } x > a, \ \text{ entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

- **Límite por la izquierda.** Decimos que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \text{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| \leq \delta$$

$$\text{con } x < a, \ \text{ entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

Límites laterales

- **Proposición.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces,
  - Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, entonces no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
  - Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si} \quad x \leq 4 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|}$

(Solución)

Criterio del Sándwich

- Decimos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está **acotada** por $M > 0$ si

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{para todo } x \in \operatorname{Dom}(f)\,.$$

- **Ejemplo.**

1) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ están acotadas en $\mathbb{R}$ por 1

2) $f(x) = x^2$ está acotada en $[-2, 1]$ por 4
(Solución)

Criterio del Sándwich

- **Teorema.** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g está acotada en un intervalo que contenga al punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

(Solución)

Criterio del Sándwich

- **Teorema.** Sean $f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un intervalo que contenga al punto $a \in \mathbb{R}$.

  Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = L$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, el siguiente límite.

  1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  (Solución)

Límites en el infinito

- Decimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ x > N\,,$$

$$\text{entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

- Decimos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ x < -N\,,$$

$$\text{entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

Límites en el infinito

- Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ es necesario que un intervalo de la forma $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]$ esté en el dominio de f.

- Se puede generalizar la definición para el caso $L=\pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

(Solución)

Cálculo de límites en el infinito

- **Funciones elementales**

1) Polinomios. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0\,, \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0\,, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ es par } \; \text{y} \;\; a_n > 0\,, \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ es par } \; \text{y} \;\; a_n < 0\,, \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ es impar } \; \text{y} \;\; a_n > 0\,, \\ +\infty & \text{si} \quad n \text{ es impar } \; \text{y} \;\; a_n < 0\,. \end{cases}$$

Cálculo de límites en el infinito

2) Exponenciales.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

3) Logaritmos.

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \log x \ \text{ no se puede calcular}\,.$$

4) Trigonométricas.

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos x\,.$$

Aritmética de límites en el infinito

- Se puede generalizar la aritmética de límites siempre que las operaciones tengan sentido.
- Si $a \in \mathbb{R}$, entonces:
  - Suma:
    - $a + \infty \ \rightarrow \ +\infty$
    - $a - \infty \ \rightarrow \ -\infty$
    - $+\infty + \infty \ \rightarrow \ +\infty$
    - $-\infty - \infty \ \rightarrow \ -\infty$
  - Exponencial:
    - $a^{+\infty} \ \rightarrow \ +\infty$ si $a > 1$
    - $a^{-\infty} \ \rightarrow \ 0$ si $a > 1$
    - $0^{a} \ \rightarrow \ 0$ si $a > 0$
  - Producto:
    - $a \cdot (+\infty) \ \rightarrow \ +\infty$ si $a > 0$
    - $a \cdot (+\infty) \ \rightarrow \ -\infty$ si $a < 0$
    - $a \cdot (-\infty) \ \rightarrow \ -\infty$ si $a > 0$
    - $a \cdot (-\infty) \ \rightarrow \ +\infty$ si $a < 0$
    - $(+\infty) \cdot (+\infty) \ \rightarrow \ +\infty$
    - $(-\infty) \cdot (-\infty) \ \rightarrow \ +\infty$
    - $(+\infty) \cdot (-\infty) \ \rightarrow \ -\infty$
  - Cociente:
    - $\dfrac{a}{\pm\infty} \ \rightarrow \ 0$

Cálculo de límites

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - \log(x^2))$

2) $\lim_{x \to \infty} (x - 1) \log x$

3) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 + e^{-x}}{x}$

(Solución)

Composición de funciones

- **Proposición.**

  Si $\lim_{x \to a} f(x) = F$ y $\lim_{x \to F} g(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = L$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  1) $\lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x}}$

  2) $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$

  (Solución)

Indeterminaciones

Indeterminaciones

- **Indeterminación**: expresión que no tiene un valor fijo.
- Se escribe entre corchetes: [ ].
- Algunas indeterminaciones son:
  - $[\infty - \infty]$
  - $\left[\dfrac{k}{0}\right]$ con $k \neq 0$
  - $\left[\dfrac{0}{0}\right]$
  - $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$
  - $[0 \cdot \infty]$
  - $\left[1^{\pm\infty}\right]$
  - $\left[0^0\right]$
  - $\left[\infty^0\right]$

Indeterminación $\left[\frac{k}{0}\right]$ con $k \neq 0$

- Estudio de los límites laterales para determinar el signo: $\pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2+x}$

  2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

  (Solución)

Indeterminación $[\infty - \infty]$

- El límite es $\pm\infty$ y el signo lo determina el término de mayor orden.

- Comportamiento cerca de ∞:

$$\log x \;<<\; x^n \;<<\; a^x \qquad \text{con } a > 1\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^3} - x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x - 5^x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x - x^5)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - \log(x^4))$

(Solución)

Indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

- Factorizar y simplificar.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

(Solución)

Indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Se divide el numerador y el denominador por el término de mayor orden del denominador.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^7}{3+x^2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+5}}{x-4}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{1-\sqrt{7x^2+4x}}$

(Solución)

Indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Caso particular: cociente de polinomios.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{-3x+7}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-8}{x^2+3x+1}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{3x^2+x-12}$

(Solución)

Indeterminación $[\,0\cdot\infty\,]$

- Se convierte en una indeterminación de tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{-7}{\log(x^2)}\right)$

(Solución)

Indeterminación $[1^{\infty}]$

- Se utiliza el límite del número e:

$$\lim_{x \to a} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \infty \,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$

2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

(Solución)

Más indeterminaciones

- $[1^{\infty}]$, $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{0}\right]$
- Se resuelven tomando logaritmos y aplicando la regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital

- **Regla de L'Hôpital.**

  Sea $x_0 \in (a,b)$ y sean f, g dos funciones derivables en $(a,b) \setminus \{ x_0 \}$.

  Si $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a,b) \setminus \{ x_0 \}$ y

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0\,, \\ \pm\infty\,, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

  entonces $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$

- Se puede extender el resultado si $x \to \pm\infty$ o si $L = \pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$ **2)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

  (Solución)

Ejercicios

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) + x^2 + 1}{\log(x^2+1) - e^x}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2}$$

4) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{3e^{2x}}{7e^{2x} + e^x}$$

5) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - \sqrt{2x^6 + x^5}}$$

6) $$\lim_{x\to 0} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

7) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x-1}}$$

8) $$\lim_{x\to 0} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$$

9) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(Solución)

Continuidad

Continuidad

- Decimos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;\text{ tal que si }\; x \in \mathrm{Dom}\,(f) \;\text{ y }\; |x-a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces } \; |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon\,.$$

- Si $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ es un punto aislado del $\mathrm{Dom}\,(f)$, entonces f siempre es continua en a.

- Si $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ no es un punto aislado del $\mathrm{Dom}\,(f)$, entonces f es continua en a si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Continuidad

- Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **no** es continua en $a \in \mathbb{R}$ si
  - $a \notin \text{Dom}\,(f)$;
  - existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero tiene distinto valor que $f(a)$;
  - no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

- En caso de que $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
  - f no es continua en a;
  - f es continua en b si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Continuidad

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados.

1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (-5, 2]\,, \\ 10 & \text{si} \quad x = 7\,, \end{cases}$ en $x = 7$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ x + 2 & \text{si} \quad x > 2\,, \end{cases}$ en $x = 2$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 2$

(Solución)

Continuidad

- **Funciones elementales.**

  1) Los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

  2) La función exponencial e^x es continua en $\mathbb{R}$.

  3) La función logaritmo $\log x$ es continua si $x > 0$.

  4) Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$.

Propiedades de las funciones continuas

- **Proposición.**

  Sean f, g dos funciones continuas en $a \in \mathrm{Dom}\,(f) \cap \mathrm{Dom}\,(g)$.

  1) $\alpha f + \beta g$ es continua en $a \in \mathbb{R}$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  2) $f\,g$ es continua en $a \in \mathbb{R}$.

  3) $\dfrac{f}{g}$ es continua en $a \in \mathbb{R}$ si $g(a) \neq 0$.

  4) $|f|$ es continua en $a \in \mathbb{R}$.

  5) f^g es continua en $a \in \mathbb{R}$.

Composición de funciones

- **Proposición.**

  Sean $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ y g es continua en $f(a) \in \mathrm{Dom}\,(g)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a.

- **Ejemplo.** Las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \dfrac{x-3}{e^x+2}$

2) $f(x) = e^{x^2+1}$

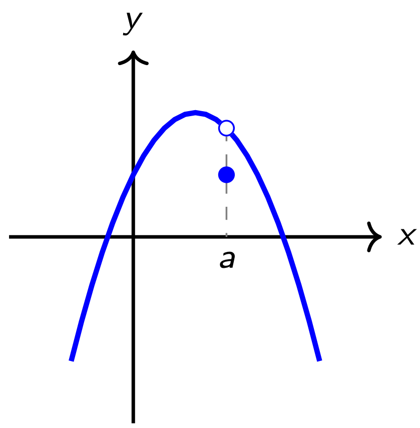
3) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

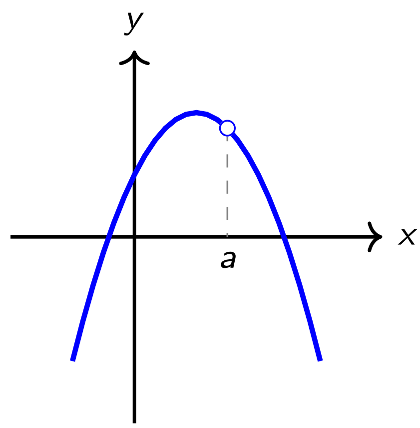
(Solución)

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad **evitable** en $a \in \mathbb{R}$
  - si $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ y existe $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ pero $L \neq f(a)$;
  - si $a \notin \mathrm{Dom}\,(f)$ pero existe $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.





Discontinuidad evitable

- **Ejemplo.** Clasifica la discontinuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

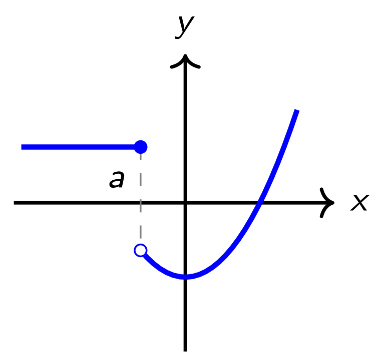
1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ en $x = 2$

2) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 10 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases}$ en $x = 0$

(Solución)

Discontinuidad de salto finito

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de **salto finito** en $a \in \mathbb{R}$ si existen los límites laterales y son finitos, pero no coinciden.



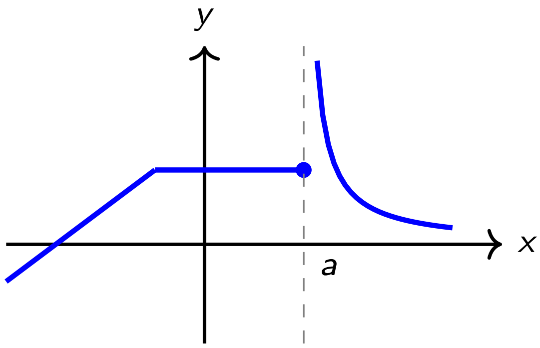
- **Ejemplo.** Clasifica la discontinuidad de la siguiente función en el punto indicado.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0\,, \\ \cos x & \text{si} \quad x > 0\,, \end{cases}$ en $x = 0$

(Solución)

Discontinuidad de salto infinito

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de **salto infinito** en $a \in \mathbb{R}$ si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$.



- **Ejemplo.** Clasifica la discontinuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x > 1\,, \\ 3 & \text{si} \quad x \leq 1\,, \end{cases} \qquad \text{en} \qquad x = 1$

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3 - x^2 - 2x} \qquad \text{en} \qquad x = 0$

(Solución)

Estudio de la continuidad de una función

Estudio de la continuidad de una función

- **Ejemplo.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 2] \\ 2x+1 & \text{si} \quad x \in (2, +\infty) \end{cases}$

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$

3) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

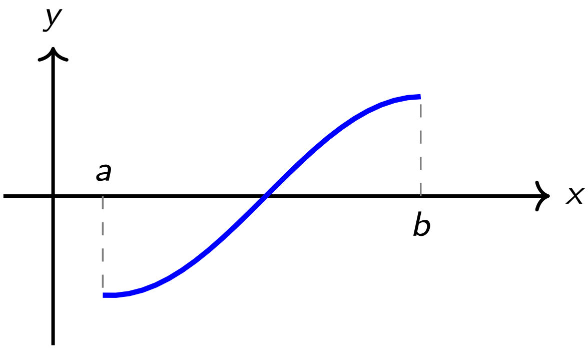
4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(Solución)

Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano

- **Teorema de Bolzano.** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.



- **Ejemplo.** Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[1, 2]$.

(Solución)

Soluciones

Pág. 4

1) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}, \;\; \text{Im}\,(f) = [0, +\infty).$

2) $\text{Dom}\,(f) = [0, +\infty), \;\; \text{Im}\,(f) = [0, +\infty).$

Pág. 6

Sea $\varepsilon > 0$ y tomamos $\delta = 2\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - 1| \leq \delta$. Entonces,

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x+3}{2} - 2\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2} \leq \frac{\delta}{2} = \varepsilon\,.$$

Pág. 8

1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 5} (x^2 + 2) = 5^2 + 2 = 27.$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \log x = \log 1 = 0.$

4) $\lim\limits_{x\to -1} (\text{sen}(x\pi) + x) = \text{sen}(-\pi) - 1 = 0 - 1 = -1.$

Pág. 10

1) $\lim\limits_{x\to 1} (\cos(\pi x) - x \log x) = \cos\pi - \log 1 = -1 + 0 = -1.$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$.

3) $\lim\limits_{x \to -1} |x-5| = |-1-5| = 6$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$.

Pág. 13

1) Como f tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 4$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x}{2} = 2$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (x^2 - 7) = 16 - 7 = 9$. Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

2) Como f tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{-x} = +\infty$. Al coincidir los límites laterales, deducimos que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Pág. 14

1) $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$.

2) Como $-2 \leq x \leq 1$, entonces $0 \leq x^2 \leq 4$ y $|f(x)| \leq 4$.

Pág. 15

1) No existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ por el Criterio del Sándwich: $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$.

Pág. 16

1) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ porque $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ y además $\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ y $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.

Pág. 18

1) $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$.

2) $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$.

Pág. 22

1) $\lim_{x\to -\infty} (x^3 - \log(x^2)) = -\infty - \infty = -\infty$.

2) $\lim_{x\to \infty} (x-1)\log x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} = [\frac{1+0}{+\infty}] = 0.$

Pág. 23

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = [e^{\frac{-1}{-\infty}}] = e^0 = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}} = [e^{\frac{-1}{0}}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty$. Como los límites laterales no coinciden, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$.

Pág. 26

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x\,(x+1)} = [\frac{-1}{0}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x\,(x+1)} = = [\frac{-1}{0^-\cdot 1}] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x\,(x+1)} = [\frac{-1}{0^+\cdot 1}] = -\infty$. Al no coincidir los límites laterales, el límite no existe.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = [\frac{3}{0}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{(x-1)^2} = [\frac{3}{0^+}] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)^2} = [\frac{3}{0^+}] = +\infty$. Como los límites laterales son iguales, deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty$.

Pág. 27

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3}-x)=[+\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}=+\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x-5^x)=[+\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}-5^x=-\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x-x^5)=[+\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty.$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-\log(x^4))=[+\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$

Pág. 28

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-x}=[\frac{0}{0}]=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x}=3.$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=[\frac{0}{0}]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\,(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\,(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{1-x})=2.$

Pág. 29

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{2}{1+1}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^7}{3+x^2}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{\frac{3}{x^2}+1}=[\frac{+\infty}{0+1}]=+\infty.$

3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+5}}{x-4} = [\frac{+\infty}{-\infty}] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{1-\sqrt{7x^2+4x}} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}-1}{\frac{1}{x}-\sqrt{7+\frac{4}{x}}} = \frac{-1}{-\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$

Pág. 30

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{-3x+7} = [\frac{+\infty}{-\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-3}x^2 = +\infty.$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-8}{x^2+3x+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1}x^0 = 2.$

3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{3x^2+x-12} = [\frac{-\infty}{+\infty}] = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{3}\frac{1}{x} = 0.$

Pág. 31

1) $\lim_{x\to\infty} (x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{x+7}{\sqrt{4x^2+3}} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{7}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$

2) $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = [+\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = 0$ porque "gana" el término de mayor orden: e^x.

3) $\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{-7}{\log(x^2)}\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2}{\log(x^2)} = [\frac{\infty}{\infty}] = -\infty$ porque "gana" el término de mayor orden: x^2.

Pág. 32

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 1} \left(1+\frac{x}{2x-1}-1\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \left(1+\frac{1-x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$

$$= \lim_{x\to 1} \left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{1-x}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{1-x}}\right)^{\frac{2x-1}{1-x}\frac{1-x}{2x-1}\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{-1}{2x-1}} = e^{-1}.$$

Pág. 34

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'H}}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = [\frac{0}{0}] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'H}}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$

Pág. 35

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x + x^2 + 1}{\log(x^2+1) - e^x} = \frac{1}{\log 1 - e^0} = \frac{1}{-1} = -1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2}{\operatorname{sen}^2 x} = [\frac{2}{0^+}] = +\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{4}.$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3e^{2x}}{7e^{2x}+e^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{7+\frac{1}{e^x}} = \frac{3}{7}.$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}} = [\frac{+\infty}{-\infty}] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{\frac{7}{x}-\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{-\sqrt{2}}.$

6) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cos(\frac{1}{x}) = 0$ por el teorema del Sándwich ya que $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ y $|\cos(\frac{1}{x})| \leq 1.$

7) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}(x+1) = 0 \cdot 2 = 0.$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}} = [\frac{1+2^{\frac{1}{0}}}{1+3^{\frac{1}{0}}}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}} = [\frac{1+2^{+\infty}}{1+3^{+\infty}}] =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\frac{1}{3})^{\frac{1}{x}}+(\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}}{(\frac{1}{3})^{\frac{1}{x}}+1} = [\frac{0+0}{0+1}] = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$ Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}.$

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x-\cos x} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x-\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} = -\sqrt{2}.$

Pág. 39

1) f es continua en $x = 7$ por ser un punto aislado de $\mathrm{Dom}\,(f)$.

2) Para comprobar que f es continua en $x = 2$ tenemos que calcular los límites laterales: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$. Como los límites laterales coinciden, $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ y f es continua en $x = 2$ porque $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$.

3) f no es continua en $x = 2$ porque $2 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$.

Pág. 42

1) f es continua en $\mathbb{R}$ por ser cociente de dos funciones continuas (polinomio y exponencial+constante)con el denominador no nulo.

2) f es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de dos funciones continuas: la exponencial $g(x) = e^x$ y el polinomio $h(x) = x^2 + 1$ ($f(x) = (g \circ h)(x)$).

3) f es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de dos funciones continuas: $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ($f = g \circ h$). Además, $h(x)$ es continua por ser cociente de dos polinomios con el denominador no nulo.

Pág. 45

1) Como $2 \notin \text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{\,2\,\}$, calculamos $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = [\frac{0}{0}] =$
$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 2x + 4) = 4 \in \mathbb{R}$, deducimos que f tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

2) Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x - 2) = -2 \neq 10 = f(0)$, deducimos que f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

Pág. 46

1) Como f tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^1} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$. Al no coincidir los límites laterales pero ser los dos números reales, deducimos que f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

Pág. 47

1) Al tener f dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

2) Calculamos: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{x^3 - x^2 - 2x} = [\frac{1}{0}]$ y para resolver la indeterminación calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x^3-x^2-2x} = [\frac{1}{0}] = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x(x-2)(x+1)} = [\frac{1}{0^- \cdot (-2) \cdot 1}] = +\infty$. Como un límite lateral no es finito, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

Pág. 49

1) f es continua en $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$ porque los polinomios son funciones continuas. Como f está definida de dos maneras distintas alrededor de $x = 2$, necesitamos calcular los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5$. Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y por lo tanto f no es continua en $x = 2$. La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

2) f es continua en $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}$ por estar definida como composición de funciones continuas (la exponencial y un cociente de polinomios con denominador no nulo).

3) f es continua si $x \neq 0$ por estar definida como composición de funciones continuas (la exponencial y un cociente de polinomios con denominador no nulo). Calculamos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = [e^{\frac{1}{0}}]$. Para resolver la indeterminación, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty$.

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y f no puede ser continua en $x = 0$. La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

4) f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por estar definida como un cociente de funciones continuas (el valor absoluto de un polinomio es continuo) con denominador no nulo. Calculamos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x+1|}{x} = [\frac{1}{0}]$. Para resolver la indeterminación calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x+1|}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x+1|}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty$. Como los límites laterales no coinciden, no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y f no puede ser continua en $x = 0$. La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

Pág. 51

Definimos la función $f(x) = x^2 - 2$, que es continua en el intervalo $[1, 2]$ por ser un polinomio. Además, como $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$, se cumple que $f(1)f(2) < 0$, por lo tanto, utilizando el teorema de Bolzano deducimos que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, existe un número real en el intervalo $(1, 2)$ que es solución de la ecuación $c^2 - 2 = 0$.

Temas 4 y 5. Derivación de funciones. Aplicaciones de la derivada

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

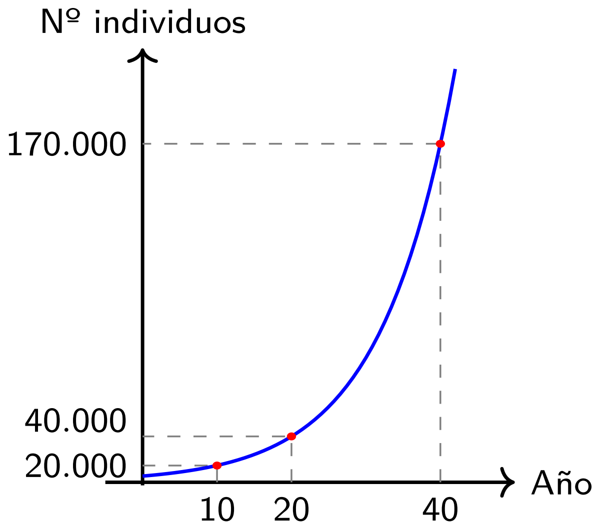
Universidad Rey Juan Carlos

Derivada

La derivada

- **Ejemplo.** Conocemos los siguientes datos de una determinada población:

Año	Nº individuos
10	20.000
20	40.000
40	170.000



- Queremos conocer cuánto ha crecido la población en un tiempo t.

La derivada

- ¿Cuánto ha variado la población en el tiempo $t = 10$?
  - Utilizamos los datos de los años 10 y 20:

$$\text{Variación} \ = \frac{40.000 - 20.000}{20 - 10} = 2.000 \text{ individuos/año}\,.$$

  - Utilizamos los datos de los años 10 y 40:

$$\text{Variación} \ = \frac{170.000 - 20.000}{40 - 10} = 5.000 \text{ individuos/año}\,.$$

- Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo, mejor será el valor obtenido:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Derivada

- Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **derivable** en $x_0 \in (a, b)$ si existe
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}\,.$$

- En ese caso, el valor de la derivada de f en el punto x_0 es
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

- Existen otras formas de denotar la derivada de f en x_0:
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x)\Big|_{x=x_0}\,.$$

Derivada

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado.

1) $f'(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x - 2$

2) $f'(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

3) $f'(0)$ con $f(x) = |x|$

4) $f'(0)$ con $f(x) = \sqrt[3]{x}$

5) $f'(0)$ con $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(Solución)

Derivada de funciones elementales

Función	Derivada
$f(x) = C$, constante	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propiedades

- **Proposición.**

  Sean $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in (a,b)$. Entonces,

  1) $\alpha f + \beta g$ es derivable en $x_0 \in (a,b)$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y

  $$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\,.$$

  2) fg es derivable en $x_0 \in (a,b)$ y

  $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\,.$$

  3) $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$ y

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

Propiedades

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

1) $f(x) = x^2 - 6x + \cos x$

2) $f(x) = x^3 e^x$

3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

(Solución)

Propiedades

- **Regla de la cadena.**

  Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a,b)$ y sea $g\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $f(x_0) \in (c,d)$. Entonces, $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

  1) $f(x) = \log(x^4 + 4x + 4)$

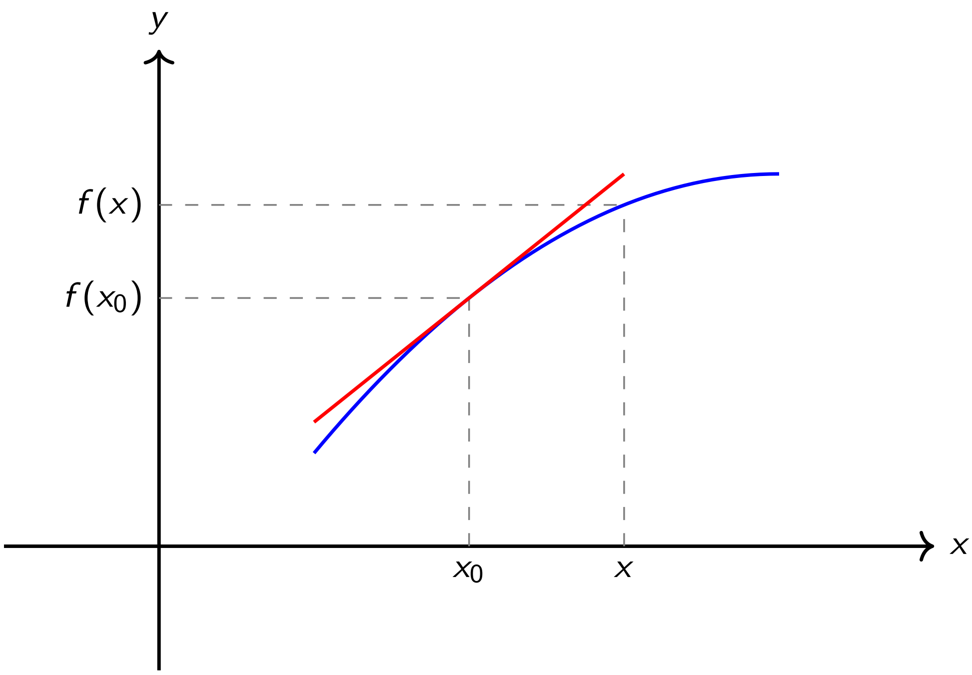
  2) $f(x) = \operatorname{sen}^3(2x+5)$

  (Solución)

Derivada de funciones elementales

Función	Derivada
$f(x) = C$, constante	$f'(x) = 0$
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n\,(u(x))^{n-1}u'(x)$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
$f(x) = \log(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \operatorname{sen}(u(x))$	$f'(x) = u'(x)\cos(u(x))$
$f(x) = \cos(u(x))$	$f'(x) = -u'(x)\operatorname{sen}(u(x))$
$f(x) = \tan(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = (1+\tan^2(u(x)))\,u'(x)$
$f(x) = \operatorname{arcsen}(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$f(x) = \arccos(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$f(x) = \arctan(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

Representación gráfica



Ecuación de la recta tangente

- Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a,b)$. La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $x_0 \in (a,b)$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 - \operatorname{sen}(\pi\, x)$ en $x = 1$. *(Solución)*

- **Ejemplo.** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que

$$(f \circ g)(x) = x^2\,, \quad g(3) = 1 \text{ y } g'(3) = 7\,.$$

  Calcula, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$. *(Solución)*

Derivada de la función inversa

- **Teorema.** Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow (c,d)$ una función continua y biyectiva. Si f es derivable en $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y además

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

- **Ejemplo.** Utiliza el teorema de la función inversa para calcular las siguientes derivadas.

1) Derivada de $g(y) = \log y$ sabiendo que $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$

2) Derivada de $g(y) = \operatorname{arcsen} y$ sabiendo que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f'(x) = \cos x$
(Solución)

Relación entre continuidad y derivabilidad

- **Teorema.** Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es derivable en $x_0 \in (a, b)$, entonces f es continua en $x_0 \in (a, b)$.

- El recíproco no es cierto.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes funciones son continuas y/o derivables en el punto indicado.

  1) $f(x) = |x|$ en $x = 0$

  2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

  (Solución)

Regla de L'Hôpital

- **Regla de L'Hôpital.**

  Sea $x_0 \in (a, b)$ y sean f, g dos funciones derivables en $(a, b) \setminus \{ x_0 \}$.

  Si $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b) \setminus \{ x_0 \}$ y

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0\,, \\ \pm\infty\,, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

  entonces $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$

- Se puede extender el resultado si $x \to \pm\infty$ o si $L = \pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$ **2)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

  (Solución)

Estudio de la derivabilidad de una función

Estudio de la derivabilidad de una función

- Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - Si $x_0 \in (a, b)$, calculamos $f'(x_0)$ con las reglas de derivación.
  - Si $x_0 = a$ o $x_0 = b$, calculamos $f'(x_0)$ con la definición:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}\,.$$

Estudio de la derivabilidad de una función

- Si queremos utilizar las "derivadas laterales":

- **Teorema.** Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\begin{cases} f \text{ continua en } (a,b)\,, \\ f \text{ derivable en } (a,b) \setminus \{\, x_0 \,\}\,, \end{cases}$

  se cumple:

  1) si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = L$;

  2) si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$, entonces f **no** es derivable en x_0;

  3) si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$, entonces f **no** es derivable en x_0.

Estudio de la derivabilidad de una función

- **Ejemplo.** Estudia derivabilidad de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$

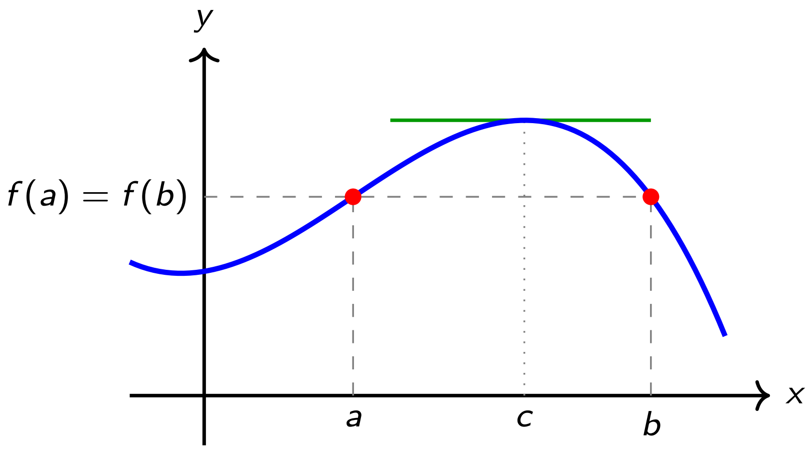
2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$

(Solución)

Teorema de Rolle

Teorema de Rolle

- **Teorema de Rolle.** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.



- **Ejemplo.** Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real. *(Solución)*

Derivadas de orden superior

Derivadas de orden superior

- Si $f(x)$ es derivable, $f'(x)$ es la derivada primera de $f(x)$.
- Si $f'(x)$ es derivable, $f''(x)$ es la derivada segunda de $f(x)$.
- Si $f''(x)$ es derivable, $f'''(x)$ es la derivada tercera de $f(x)$.
- ...
- Si $f(x)$ es derivable n veces, $f^{(n)}(x)$ es la derivada n-ésima de $f(x)$.
- **Ejemplo.** Calcula la derivada tercera de las siguientes funciones.

  1) $f(x) = e^x$ **2)** $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

  (Solución)

Desarrollo de Taylor

Desarrollo de Taylor

- Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $n + 1$ veces derivable. Se define el **polinomio de Taylor** de orden (o grado) n centrado en el punto $x_0 \in (a, b)$ como

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

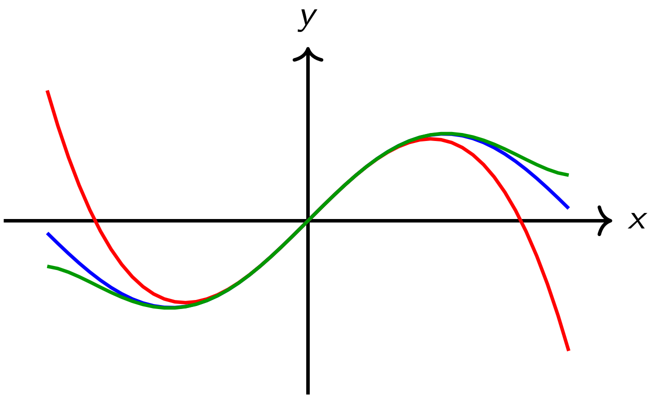
- Se define el **resto de Taylor** como

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

  para cierto valor ξ entre x_0 y x.

- Se cumple $f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$.

Desarrollo de Taylor



$f(x) = \text{sen}(x)$

$P_{3,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$

$P_{5,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

Desarrollo de Taylor

- **Ejemplo.**

1) Calcula el polinomio de Taylor de $f(x) = \log x$ centrado en $x = 1$ de grado 3.

2) Aproxima el valor del número e con un error menor de 10^{-2} utilizando un polinomio de Taylor.

3) Calcula el polinomio de Taylor de $f(x) = \cos(2x)$ centrado en el origen y de orden 3. Utiliza ese polinomio para obtener una aproximación a $\cos 1$ y acota dicho error.

(Solución)

Desarrollo de Taylor

- **Proposición.** Sea $P_{n,x_0}(x; f)$ el polinomio de Taylor de orden n centrado de x_0 de f. Se cumple:

  1) $P_{n,x_0}(x; \alpha f) = \alpha P_{n,x_0}(x; f)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

  2) $P_{n,x_0}(x; f + g) = P_{n,x_0}(x; f) + P_{n,x_0}(x; g)$

  3) $P_{n,x_0}(x; fg) = P_{n,x_0}(x; f) \cdot P_{n,x_0}(x; g)$ truncado hasta grado n.

  4) $P_{nm,x_0}(x; f(x^m)) = P_{n,x_0}(x^m; f)$.

Desarrollo de Taylor

- **Ejemplo.** Sean $f_1(x) = e^{-x^2}$ y $f_2(x) = \cos x$. Sabiendo que

$$P_{3,0}(x; f_1) = 1 - x^2 \quad \text{y} \quad P_{3,0}(x; f_2) = 1 - \frac{x^2}{2}\,,$$

calcula

1) $P_{3,0}(x, g)$ siendo $g(x) = e^{-x^2} \cos x$

2) $P_{6,0}(x, h)$ siendo $h(x) = \cos x^2$

(Solución)

Monotonía y extremos

Monotonía

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - f es **creciente** en $(a, b) \subseteq \mathrm{Dom}\,(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) \leq f(y)$.
  - f es **estrictamente creciente** en $(a, b) \subseteq \mathrm{Dom}\,(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) < f(y)$.
  - f es **decreciente** en $(a, b) \subseteq \mathrm{Dom}\,(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) \geq f(y)$.
  - f es **estrictamente decreciente** en $(a, b) \subseteq \mathrm{Dom}\,(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) > f(y)$.
- **Ejemplo.** Estudia la monotonía de la siguiente función.

1) $f(x) = x - 7$ *(Solución)*

Monotonía

- **Teorema.** Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable.

  1) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a, b).

  2) Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).

  3) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).

  4) Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

- **Ejemplo.** Estudia la monotonía de las siguientes funciones.

  1) $f(x) = e^{-x}$ **2)** $f(x) = x^2$

  (Solución)

Extremos locales

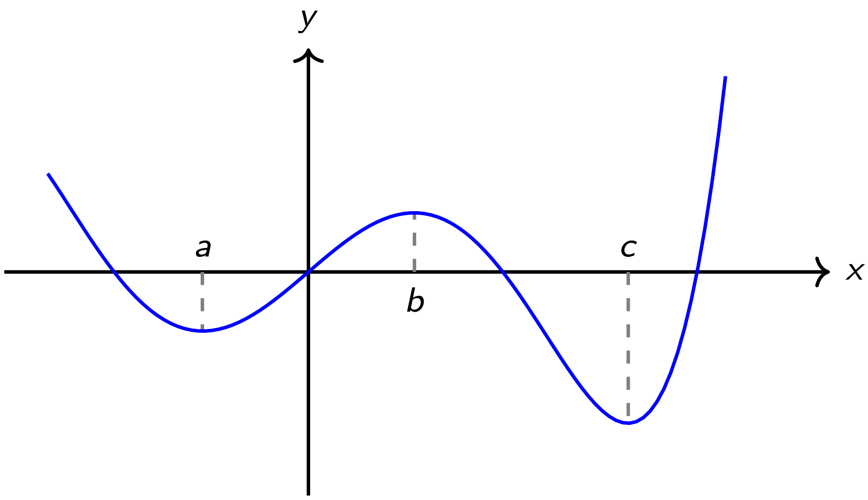
- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - f tiene un **máximo local o relativo** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
  - f tiene un **mínimo local o relativo** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
  - f tiene un **extremo local o relativo** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si x_0 es máximo o mínimo local.
- Todos los puntos de la función constante $f(x) = C$ son máximos y mínimos relativos.
- **Ejemplo.**

  1) La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo local en $x = 0$ *(Solución)*

Extremos absolutos

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
    - f tiene un **máximo absoluto** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$.
    - f tiene un **mínimo absoluto** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$.
    - f tiene un **extremo absoluto** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si x_0 es máximo o mínimo absoluto.
- Todo extremo absoluto es extremo relativo, pero un extremo relativo puede no ser extremo absoluto.
- **Ejemplo.**

1) La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ *(Solución)*



- Extremos relativos $\begin{cases} f \text{ tiene un mínimo local en } x = a \text{ y en } x = c \\ f \text{ tiene un máximo local en } x = b \end{cases}$

- Extremos absolutos $\begin{cases} f \text{ tiene un mínimo absoluto en } x = c \\ f \text{ no tiene ningún máximo absoluto} \end{cases}$

Extremos

- **Teorema.** Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Si f tiene un extremo relativo en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.
- El recíproco no es cierto.
- **Ejemplo.**

  1) $f(x) = x^4 - 4x^3$ cumple

  - $f'(0) = 0$,
  - $x = 0$ no es extremo local.

  (Solución)

Punto crítico

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $a \in \text{Dom}\,(f)$ es un **punto crítico** de f si existe $f'(a) = 0$ o si no existe $f'(a)$.

- Un punto crítico puede ser o no extremo relativo.

- **Teorema.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $a \in \text{Dom}\,(f)$ un punto crítico de f. Se cumple:

  1) Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a.

  2) Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

- **Ejemplo.** Estudia la monotonía y extremos de la siguiente función.

  1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ en $[0, +\infty)$ *(Solución)*

Soluciones

Pág. 6

1) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(3x-2)-(3a-2)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{3(x-a)}{x-a} = 3.$

2) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} (x+a) = 2a.$

3) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = [\frac{0}{0}]$. Resolvemos la indeterminación calculando los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1$. Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ y por lo tanto f no es derivable en $x = 0$.

4) Como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ no es un número real, deducimos que f no es derivable en $x = 0$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$. Como este límite no existe, deducimos que f no es derivable en $x = 0$.

Pág. 9

1) $f'(x) = 2x - 6 - \operatorname{sen} x$.

2) $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$.

3) $f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x(x^2+1) - 2x \cos x}{(x^2+1)^2}$.

Pág. 10

1) $f'(x) = \frac{4x^3+4}{x^4+4x+4}$.

2) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(2x+5)\cos(2x+5)2$.

Pág. 13

Calculamos $f'(x) = 6x - \pi\cos(\pi x)$ y como $f'(1) = 6 - \pi\cos\pi = 6 + \pi$ y $f(1) = 3 - \operatorname{sen}\pi = 3$, la ecuación de la recta tangente es $y - 3 = (6+\pi)(x-1)$, es decir, $y = (6-\pi)x + \pi - 3$.

Pág. 13

Sabemos que $f(1) = f(g(3)) = 3^2 = 9$ y como $2x = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, entonces $6 = 2 \cdot 3 = f'(g(3))g'(3) = f'(1) \cdot 7 \;\Rightarrow\; f'(1) = \frac{6}{7}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - 9 = \frac{6}{7}(x-1)$, es decir, $7y - 6x = 57$.

Pág. 14

1) La inversa de $f(x) = e^x$ es $g(y) = \log y$. Entonces $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$.

2) La inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $g(y) = \operatorname{arcsen} y$. Entonces $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Pág. 15

1)
- ◦ f es continua en $x = 0$ por ser el valor absoluto de un polinomio.
- ◦ f no es derivable en $x = 1$ (probado en Pág. 6, apartado (3)).

2)
- ◦ f no es continua en $x = 1$ porque no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ al no coincidir los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x = 3$.
- ◦ f no es derivable en $x = 1$ porque no es continua en dicho punto.

Pág. 16

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = [\frac{0}{0}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$

Pág. 20

1) f es derivable si $x \neq 0$ por ser composición de funciones derivables (exponencial y cociente de polinomio con denominador no nulo). Además,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0\,, \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Por otro lado, $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pero como f tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, tenemos que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}-0}{x-0} = [\tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0^-} \frac{1/x}{e^{-1/x}} = [\tfrac{-\infty}{+\infty}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-1/x^2}{1/x^2\, e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0^-} -e^{1/x} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}-0}{x-0} = [\tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x}} = [\tfrac{-\infty}{+\infty}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/x^2\, e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0\,.$$

Como los límites laterales coinciden, existe $f'(0) = 0$.

2) f es derivable si $x \neq 0$ por ser producto y composición de funciones derivables (polinomio, coseno y un cociente de polinomios con denominador no nulo). Además, $f'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$.

Por otro lado, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$ por el criterio del sándwich ($\lim_{x\to 0} x = 0$ y $\left|\cos(\frac{1}{x})\right| \leq 1$). Concluimos que f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

Pág. 22

- *Existencia de solución.* Definimos $f(x) = x^3 + x - 1$, que es continua en el intervalo $[0, 1]$ y además cumple $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ con $f(c) = 0$, es decir, $c^3 + c - 1 = 0$.
- *Unicidad de solución.* Razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que existen dos soluciones distintas: c y d. Es decir, $f(c) = f(d) = 0$ con $c \neq d$ (por ejemplo, $c < d$). Como f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d). Además, como $f(c) = f(d)$, el teorema de Rolle indica que existe $e \in (c, d)$ con $f'(e) = 0$. Pero esto no es posible ya que $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Por lo tanto, la solución es única.

Pág. 24

1) $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$.

2) $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x - 4 \;\Rightarrow\; f'''(x) = 6$.

Pág. 28

1) Calculamos $f(x) = \log x \Rightarrow f(1) = \log 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$ y $f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$. Entonces:

$$P_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3\,.$$

2) Utilizaremos la función $f(x) = e^x$ para aproximar el valor $f(1) = e$ utilizando un polinomio de Taylor centrado en $x = 0$ y calculamos y acotamos el término del error.

Como $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el término del error es

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,, \qquad \text{con } \xi \text{ entre } 0 \text{ y } x\,.$$

Evaluamos en el punto $x = 1$ (para aproximar e y no e^x) y acotamos:

$$|R_{n,0}(1)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}1^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{e}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{3}{(n+1)!}\right| = \frac{3}{(n+1)!}\,.$$

Queremos averiguar el valor $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-2} \;\Leftrightarrow\; 300 < (n+1)!$. Probamos con distintos valores de n:

$$\begin{array}{ll} n=1 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 2! = 2\,, & n=4 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 5! = 120\,, \\ n=2 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 3! = 6\,, & n=5 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 6! = 720\,. \\ n=3 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 4! = 24\,, & \end{array}$$

Por lo tanto, el error cometido al aproximar e con $P_{5,0}(1)$ es menor que 10^{-2} siendo $P_{5,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$ y $P_{5,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$.

3) Calculamos $f(x) = \cos(2x) \Rightarrow f(0) = 1$, $f'(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x) \Rightarrow f'(0) = 0$, $f''(x) = -4\cos(2x) \Rightarrow f''(0) = -4$, $f'''(x) = 8\,\mathrm{sen}(2x) \Rightarrow f'''(0) = 0$. Entonces:

$$P_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - 2x^2$$

y $\cos 1 \approx P_{3,0}(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Además, como $f^{(iv)}(x)) = 16\cos(2x)$, entonces acotamos el error (para cierto $c \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\left|R_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{f^{(iv)}(c)}{4!}\frac{1}{2^4}\right| = \frac{2^4|\cos(2c)|}{3 \cdot 2^3}\frac{1}{2^4} \le \frac{1}{24}.$$

Pág. 30

1) Como $P_{3,0}(x, f_1) \cdot P_{3,0}(x, f_2) = (1 - x^2)(1 - \frac{x^2}{2}) = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{2}$, entonces $P_{3,0}(x, g) = 1 - \frac{3x^2}{2}$.

2) $P_{6,0}(x, h) = P_{3,0}(x^2, f_2) = 1 - \frac{x^4}{2}$.

Pág. 32

1) f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ ya que si $x < y$, entonces $f(x) = x-7 < y-7 = f(y)$.

Pág. 33

1) Como f es derivable en $\mathbb{R}$, calculamos $f'(x) = -e^{-x} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f es decreciente en $\mathbb{R}$.

2) Como f es derivable en $\mathbb{R}$, calculamos $f'(x) = 2x$:

- Si $x > 0$, entonces $f'(x) = 2x > 0$. Por lo tanto f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.
- Si $x < 0$, entonces $f'(x) = 2x < 0$. Por lo tanto f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.

Pág. 34

1) Cierto ya que $f(0) = 0 \leq x^2 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pág. 35

1) Cierto ya que $f(0) = 0 \leq x^2 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

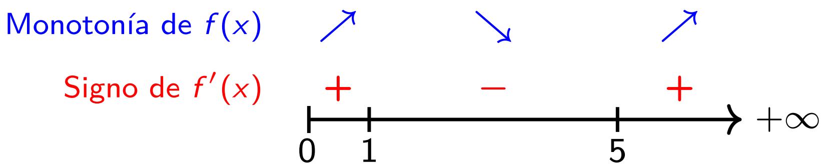
Pág. 37

1) Cierto porque $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ y entonces $f'(0) = 0$. Además, $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 3$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \leq 3$; entonces f es decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$ y concluimos que $x = 0$ no es extremo local.

Pág. 38

1) Como f es un polinomio, está definida en $[0, +\infty)$ y es infinitas veces derivable.

- Calculamos los puntos críticos: Como $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$, entonces $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0\,, \\ x = 1\,, \\ x = 5 \end{cases}$
- Estudiamos la monotonía: Como $f'(x)$ es continua, solo puede cambiar de signo en los puntos críticos.



Deducimos que f es creciente en $(0,1) \cap (5,+\infty)$ y decreciente en $(1,5)$.

- Extremos locales: f tiene mínimos locales en $x = 0$ y $x = 5$ y un máximo local en $x = 1$.
- Extremos absolutos.
  - Candidatos a mínimo absoluto: $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad f(0) = 0\,, \\ x = 5 & \Rightarrow \quad f(5) = -25\,. \end{cases}$ Como $f(5) < f(0)$, el mínimo absoluto se alcanza en $x = 5$.
  - Candidatos a máximo absoluto: $\begin{cases} x = 1 & \Rightarrow \quad f(1) = 7\,, \\ x \to +\infty & \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,. \end{cases}$

    Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f no tiene máximo absoluto.

Tema 6. Cálculo Integral

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Primitivas

Primitivas

- Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **primitiva** de f si F es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

- **Ejemplo.** Calcula una primitiva de las siguientes funciones.

  1) $f(x) = e^x$ **2)** $g(x) = 2x$ **3)** $h(x) = \cos x$

  (Solución)

- La primitiva de una función no es única.

- Denotamos por $\displaystyle\int f(x)\,dx$ el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Primitivas

- Toda función continua tiene primitiva, aunque no siempre se puede calcular explícitamente.

- **Ejemplo.**

  1) $f(x) = e^{x^2}$ no tiene una primitiva que se pueda expresar como combinación de funciones elementales.

- La variable de integración se puede cambiar por cualquier otro símbolo:

$$\int f(x)\,dx = \int f(y)\,dy = \int f(t)\,dt = \int f(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Integrales inmediatas

Integrales inmediatas

Función	Primitiva
$f(x) = x^n$	$\int f(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\int f(x)\,dx = \log\lvert x\rvert + C$
$f(x) = e^x$	$\int f(x)\,dx = e^x + C$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\int f(x)\,dx = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$\int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int f(x)\,dx = \tan x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\int f(x)\,dx = \arctan x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int f(x)\,dx = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$

Integrales inmediatas

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\displaystyle\int e^x \, dx$

2) $\displaystyle\int x^5 \, dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx$

4) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+7} \, dx$

(Solución)

Integrales inmediatas

Función	Primitiva
$f(x) = u'(x)(u(x))^n$	$\int f(x)\,dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\int f(x)\,dx = \log\lvert u(x)\rvert + C$
$f(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$	$\int f(x)\,dx = e^{u(x)} + C$
$f(x) = u'(x)\,\mathrm{sen}(u(x))$	$\int f(x)\,dx = -\cos(u(x)) + C$
$f(x) = u'(x)\cos(u(x))$	$\int f(x)\,dx = \mathrm{sen}(u(x)) + C$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\int f(x)\,dx = \tan(u(x)) + C$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\int f(x)\,dx = \arctan(u(x)) + C$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\int f(x)\,dx = \mathrm{arcsen}(u(x)) + C = -\arccos(u(x)) + C$

Integrales inmediatas

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $$\int 3e^{3x}\,dx$$

2) $$\int (x-3)^5\,dx$$

3) $$\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx$$

(Solución)

Propiedades

- **Proposición.**

  Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces,

1) $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Cálculo de primitivas

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\displaystyle\int (4x^2 - 1)\, x\, dx$

2) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 + x - 2}{3x}\, dx$

4) $\displaystyle\int \frac{2}{4 + 5x^2}\, dx$

5) $\displaystyle\int (e^{3x} - e^x)\, dx$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3 - 4x^2}}\, dx$

7) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}}\, dx$

9) $\displaystyle\int \tan x\, dx$

10) $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$

(Solución)

Métodos de integración

Métodos de integración

Cambio de variable

Cambio de variable

- Se deduce de la regla de la cadena. Si F es una primitiva de f se cumple:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = F(g(t)) + C = \int (F \circ g)'(t)\,dt$$

$$= \int F'(g(t))g'(t)\,dt = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

- Una vez resuelta la integral hay que **deshacer** el cambio de variable.

Cambio de variable

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $$\int \frac{1}{x \log x}\, dx$$

2) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$$

3) $$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x + 5}\, dx$$

4) $$\int x\sqrt{1-x}\, dx$$

5) $$\int x^3\sqrt{2+7x^2}\, dx$$

(Solución)

Métodos de integración

Integración por partes

Integración por partes

- Se deduce de la fórmula de la derivada de un producto:

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' \, dx = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx \, .$$

- Usualmente escribimos $\displaystyle\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$.

- En general, es útil para integrar productos de funciones del tipo:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Derivar} \\ \downarrow \\ \text{Integrar} \end{array} \right]$$

Arco
Logaritmos
Polinomios
Exponenciales
Senos y cosenos

Integración por partes

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\displaystyle\int x\, e^x\, dx$

2) $\displaystyle\int \log x\, dx$

3) $\displaystyle\int x \cos x\, dx$

4) $\displaystyle\int x^3 \cos(x^2)\, dx$

5) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$

(Solución)

Integración por partes

- **Ejemplo.** Integrales cíclicas

1) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

(Solución)

- Otra manera de resolver $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$: usando la trigonometría

Métodos de integración

Descomposición en fracciones simples

Descomposición en fracciones simples

- $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios

1. Si grado$(P(x)) \geq$ grado$(Q(x))$, se dividen los polinomios utilizando el algoritmo de la división.

2. Si grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$, se comprueba si la primitiva es un logaritmo y si no es así, se factoriza el denominador.

3. Descomposición en fracciones simples. A cada uno de los factores del denominador le asignamos una fracción.

Descomposición en fracciones simples

Factor	Fracción	Integral
$(x-a)$	$\dfrac{A}{x-a}$	Logaritmo
$(x-b)^n$	$\dfrac{B_1}{x-b}+\dfrac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\dfrac{B_n}{(x-b)^n}$	Logaritmo + Potencias
$c\,x^2+d\,x+e$	$\dfrac{M\,x+N}{c\,x^2+d\,x+e}$	Logaritmo + Arcotangente

Descomposición en fracciones simples

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $$\int \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\, dx$$

4) $$\int \frac{x+2}{x^2 + x - 2}\, dx$$

2) $$\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\, dx$$

5) $$\int \frac{1}{x(1 + 2x^2)}\, dx$$

3) $$\int \frac{x^4}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}\, dx$$

6) $$\int \frac{1}{(x^2 - 1)(x - 1)}\, dx$$

(Solución)

Métodos de integración

Integrales trigonométricas

Integrales trigonométricas

- Seno de la suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

- Coseno de la suma y diferencia de ángulos

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

- Seno y coseno del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Integrales trigonométricas

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos x\,dx$

2) $\displaystyle\int \cos x\cos(3x)dx$

3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$

4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx$

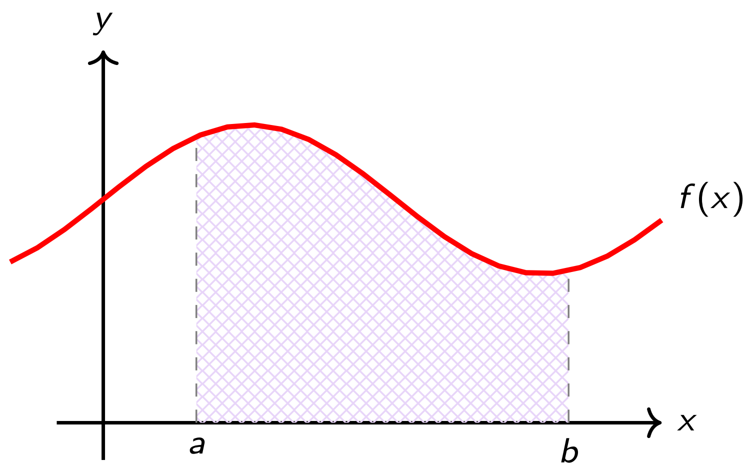
5) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(Solución)

Integral definida

Integral definida

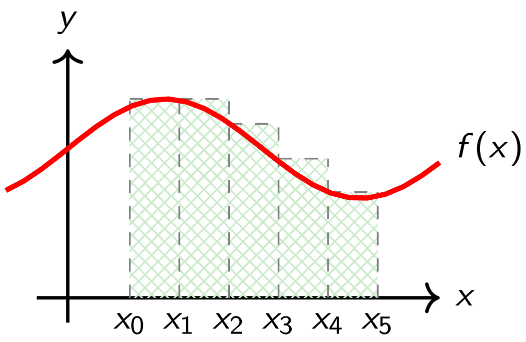
- Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vamos a calcular el área comprendida entre la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$.



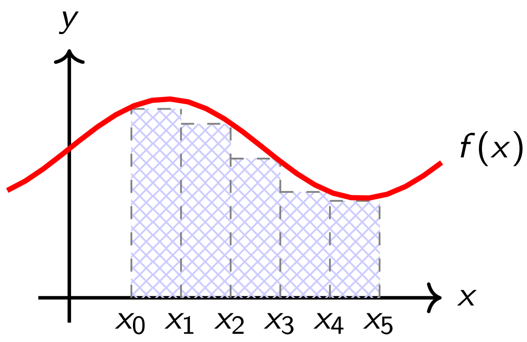
Integral definida

- Para calcular el área, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de extremos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,.$$



Aproximación del área por exceso



Aproximación del área por defecto

y calculamos el máximo y mínimo:

$$M_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\,,$$
$$m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

- Entonces, podemos aproximar el valor del área (por exceso y por defecto) calculando el área de los rectángulos:

$$\text{Área (por exceso)} = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})\,,$$
$$\text{Área (por defecto)} = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = C > 0$ constante.

Integral definida

- **Regla de Barrow.** Si $F:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una primitiva de $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}=F(b)-F(a)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\displaystyle\int_0^\pi -\operatorname{sen} x\,dx$ *(Solución)*

Integral definida

- **Propiedades.** Sean $f, g\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces,

1) $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ si } a < c < b.$$

Integral definida

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\displaystyle\int_{-2}^{4}(x-1)(x+2)\,dx$

2) $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$

4) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx \quad \text{con} \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

(Solución)

Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del cálculo

- **Teorema.** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es derivable para todo $x \in (a, b)$ y además,

$$F'(x) = f(x)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de la siguiente función.

1) $F(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt$

(Solución)

Teorema fundamental del cálculo

- **Teorema (general)** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y g y h son dos funciones derivables en x y tales que $g(x), h(x) \in [a, b]$, entonces la función

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$$

es derivable para todo $x \in (a, b)$ y además,

$$F'(x) = f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x)\,.$$

Teorema fundamental del cálculo

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{3t^2 - 1}{\log t}\, dt$

2) $F(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{x+1} t^2 \cos(2t)\, dt$

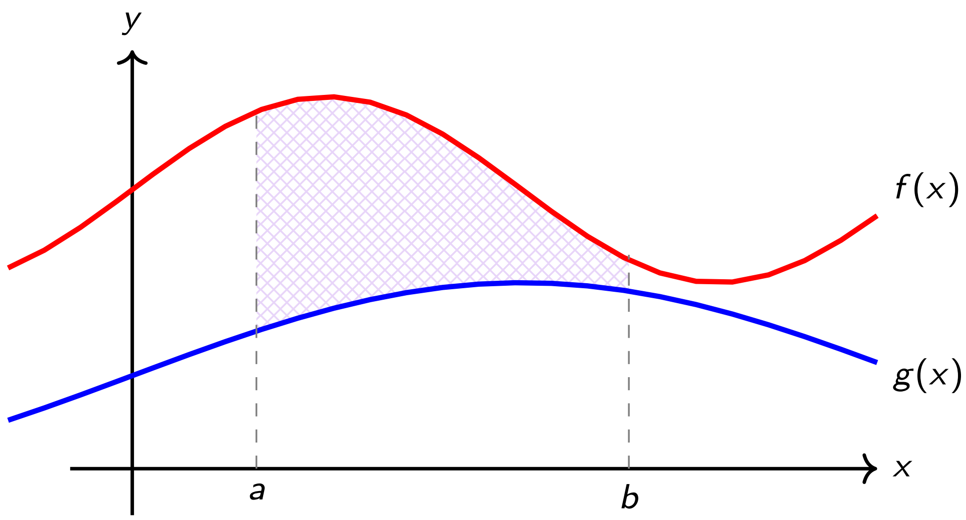
(Solución)

Cálculo de áreas

Cálculo de áreas

- El **área** encerrada entre las gráficas de dos funciones continuas $f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$\text{área} \;=\; \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\,.$$



Cálculo de áreas

- área $\neq \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \right|$.

- **Ejemplo.** Calcula:

  1) área encerrada entre la gráfica de

$$f(x) = x$$

$$g(x) = 0$$

  entre $x = -1$ y $x = 2$

(Solución)

Cálculo de áreas

- **Ejemplo.** Calcula el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones.

1) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x$

2) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$

3) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$

4) $y = e^x$, $y = 2$ y $x = 0$

(Solución)

Soluciones

Pág. 3

1) $F(x) = e^x$.

2) $G(x) = x^2$.

3) $H(x) = \operatorname{sen} x$.

Pág. 7

1) $\int e^x \, dx = e^x + C$.

2) $\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C$.

3) $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$.

4) $\int \frac{2x}{x^2+7} \, dx = \log(x^2 + 7) + C$.

Pág. 9

1) $\int 3e^{3x} \, dx = e^{3x} + C$.

2) $\int (x-3)^5 \, dx = \frac{(x-3)^6}{6} + C$.

3) $$\int \frac{4x^3}{x^4+1} \, dx = \log|x^4 + 1| + C.$$

Pág. 11

1) $\int (4x^2-1)\,x\,dx = \frac{1}{8}\int 8x(4x^2-1)^2\,dx = \frac{(4x^2-1)^3}{3} + C.$

2) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int (x\,x^{1/2})^{1/2}\,dx = \int x^{3/4}\,dx = \frac{x^{3/4+1}}{3/4+1} + C = \frac{4}{7}x^{7/4} + C.$

3) $\int \frac{x^4-3x^3+x-2}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + \frac{1}{3}\int dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\log|x| + C.$

4) $\int \frac{2}{4+5x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{1+(\frac{\sqrt{5}}{2}x)^2}\,dx = \frac{2}{4}\frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}/2}{1+(\frac{\sqrt{5}}{2}x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2}x) + C.$

5) $\int (e^{3x}-e^x)\,dx = \int e^{3x}\,dx - \int e^x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} - e^x + C.$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{2}{\sqrt{2}}x) + C.$

7) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \log|\operatorname{sen} x| + C.$

8) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int x(1-x^2)^{-1/2}\,dx =$

$= \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \operatorname{arcsen} x - \sqrt{x} + C.$

Pág. 15

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C \underset{\uparrow}{=} \log|\log|x|| + C.$

CV: $\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = dt$ — Deshacer el CV

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\arctan(t) + C \underset{\uparrow}{=} 2\arctan(\sqrt{x}) + C.$

CV: $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$ — Deshacer el CV

3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 5}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt = \int \frac{1}{1+(t+2)^2}\,dt = \arctan(t+2) + C \underset{\uparrow}{=}$

CV: $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$ — Deshacer el CV

$= \arctan(\operatorname{sen} x + 2) + C.$

4) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int 2t(1-t^2)t\,dt = -2\int (t^2 - t^4)\,dt = -2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C \underset{\uparrow}{=}$

CV: $\sqrt{1-x} = t$, $1-x = t^2 \Rightarrow -dx = 2t\,dt$ — Deshacer el CV

$\displaystyle = -2\left(\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - \frac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right) + C.$

5) $\displaystyle\int x^3\sqrt{2+7x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{t^2-2}{7}\,t\,\frac{t}{7}\,dt = \frac{1}{49}\int (t^4 - 2t^2)\,dt = \frac{1}{49}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right) + C \underset{\uparrow}{=}$

CV: $\sqrt{2+7x^2} = t$, $2+7x^2 = t^2 \Rightarrow 14x\,dx = 2t\,dt$ — Deshacer el CV

$\displaystyle = \frac{1}{49}\left(\frac{1}{5}(2+7x^2)^{5/2} - \frac{2}{3}(2+7x^2)^{3/2}\right) + C.$

Pág. 18

1) $\displaystyle\int x\, e^x\, dx \underset{\uparrow}{=} x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C.$

$$\begin{array}{lll} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=e^x\, dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int e^x\, dx=e^x \end{array}$$

2) $\displaystyle\int \log x\, dx \underset{\uparrow}{=} x \log x - \int x\, \tfrac{1}{x}\, dx = x\log x - \int dx = x \log x - x + C.$

$$\begin{array}{lll} u=\log x & \Rightarrow & du=\frac{1}{x}\, dx \\ dv=dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int dx=x \end{array}$$

3) $\displaystyle\int x \cos x\, dx \underset{\uparrow}{=} x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$

$$\begin{array}{lll} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\cos x\, dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int \cos x\, dx=\operatorname{sen} x \end{array}$$

4) $\displaystyle\int x^3 \cos(x^2)\, dx \underset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(x^2) - \int 2x\, \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(x^2) + \tfrac{1}{2}\cos(x^2) + C.$

$$\begin{array}{lll} u=x^2 & \Rightarrow & du=2x\, dx \\ dv=x\cos(x^2)\, dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int x\cos(x^2)\, dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2) \end{array}$$

5) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{2})\, dx \underset{\uparrow}{=} x \operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{2}) - \int \tfrac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2/4}}\, dx = x \operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{2}) - \tfrac{1}{2}\int x(1-\tfrac{x^2}{4})^{-1/2}\, dx =$

$$\begin{array}{lll} u=\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2}) & \Rightarrow & du=\frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}}\, dx \\ dv=dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int dx=x \end{array}$$

$= x \operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{2}) + 2\sqrt{1-x^2/4} + C.$

Pág. 19

1) $$\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx \underset{\substack{u=\operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; du=\cos x\, dx \\ dv=e^x\, dx \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int e^x\, dx=e^x}}{\underset{\uparrow}{=}} \operatorname{sen} x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx \underset{\substack{u=\cos x \;\Rightarrow\; du=-\operatorname{sen} x\, dx \\ dv=e^x\, dx \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int e^x\, dx=e^x}}{\underset{\uparrow}{=}} \operatorname{sen} x\, e^x - \left(\cos x\, e^x - \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx\right) =$$

$$= (\operatorname{sen} x - \cos x)\, e^x + \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)\, e^x + C.$$

2) $$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx \underset{\substack{u=\operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; du=\cos x\, dx \\ dv=\operatorname{sen} x\, dx \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int \operatorname{sen} x\, dx=-\cos x}}{\underset{\uparrow}{=}} -\operatorname{sen} x \cos x - \int -\cos x \cos x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C.$$

Pág. 23

1) $\int \frac{1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \frac{1}{x\,(x-2)(x-3)}\,dx \underset{\uparrow}{=}$

$$\frac{1}{x\,(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$1{=}A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x{=}0 & \Rightarrow & 1{=}6A & \Rightarrow & A{=}{}^1\!/_6 \\ x{=}2 & \Rightarrow & 1{=}-2B & \Rightarrow & B{=}-{}^1\!/_2 \\ x{=}3 & \Rightarrow & 1{=}3C & \Rightarrow & C{=}{}^1\!/_3 \end{cases}$$

$$= \int [\frac{1/6}{x} + \frac{-1/2}{x-2} + \frac{1/3}{x-3}]\,dx = \frac{1}{6}\log|x| - \frac{1}{2}\log|x-2| + \frac{1}{3}\log|x-3| + C.$$

2) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx) =$

$= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$ porque

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{3/4+(x+1/2)^2}\,dx = \frac{1}{3/4}\int \frac{1}{1+\frac{(x+1/2)^2}{3/4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2})^2}\,dx =$$

$$x^2{+}x{+}1{=}a{+}(bx{+}c)^2{=}a{+}b^2x^2{+}2bc\,x{+}c^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Coef. } x^2: & 1{=}b^2 & \Rightarrow & b{=}1\,, \\ \text{Coef. } x: & 1{=}2bc & \Rightarrow & c{=}{}^1\!/_2\,, \\ \text{T. indep.}: & 1{=}a{+}c^2 & \Rightarrow & a{=}{}^3\!/_4\,. \end{cases}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+(2x/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})^2}\,dx = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{1+(2x/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})^2}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}).$$

3) $\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{División}}}{=} \int [x+2+\frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x+3}]\,dx = \frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{6x^2+7x+6}{(x-3)(x^2+x+1)}\,dx \quad \underset{\uparrow}{=}$

$$\frac{6x^2+7x+6}{(x-3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$6x^2+7x+6=A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-3) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \;\Rightarrow\; 81=13A \;\Rightarrow\; A={}^{81}/_{13} \\ x=0 \;\Rightarrow\; 6=A-3N \;\Rightarrow\; N={}^{1}/_{13} \\ x=-1 \;\Rightarrow\; 5=A+4M-4N \;\Rightarrow\; M=-{}^{3}/_{13} \end{cases}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{13}\int [\frac{81}{x-3} + \frac{-3x+1}{x^2+x+1}]\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{81}{13}\log|x-3| + \frac{1}{13}\int \frac{-3x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{81}{13}\log|x-3| - \frac{3}{2}\frac{1}{13}[\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{-{}^{2}/_{3}-1}{x^2+x+1}\,dx] =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{81}{13}\log|x-3| - \frac{3}{26}\log|x^2+x+1| - \frac{3}{26}\int \frac{-{}^{5}/_{3}}{{}^{3}/_{4}+(x+{}^{1}/_{2})^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{81}{13}\log|x-3| - \frac{3}{26}\log|x^2+x+1| + \frac{5}{26}\frac{4}{3}\int \frac{1}{1+({}^{2x}/_{\sqrt{3}}+{}^{1}/_{\sqrt{3}})^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{81}{13}\log|x-3| - \frac{3}{26}\log|x^2+x+1| + \frac{5}{13}\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{{}^{2}/_{\sqrt{3}}}{1+({}^{2x}/_{\sqrt{3}}+{}^{1}/_{\sqrt{3}})^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{81}{13}\log|x-3| - \frac{3}{26}\log|x^2+x+1| + \frac{5}{13}\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C.$$

4) $\int \frac{x+2}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{x+2}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1| + C.$

5) $\int \frac{1}{x(1+2x^2)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-2x}{1+2x^2}\right]\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log|1+2x^2| + C.$

$$\frac{1}{x(1+2x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{1+2x^2}$$

$$1 = A(1+2x^2) + (Mx+N)x \Rightarrow \begin{cases} \text{T. indep.:} \Rightarrow & 1=A \quad \Rightarrow \; A=1 \\ \text{Coef.}x\text{:} \Rightarrow & 0=N \quad \Rightarrow \; N=0 \\ \text{Coef.}x^2 \Rightarrow & 0=2A+M \quad \Rightarrow \; M=-2 \end{cases}$$

6) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \left[\frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{x+1}\right]dx =$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow & 1=4C \quad \Rightarrow \; C=1/4 \\ x=1 \Rightarrow & 1=2B \quad \Rightarrow \; B=1/2 \\ x=0 \Rightarrow & 1=-A+B+C \quad \Rightarrow \; A=-1/4 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log|x+1| + C.$$

Pág. 26

1) $\int \text{sen}(2x)\cos x\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int(\text{sen}(2x+x)+\text{sen}(2x-x))\,dx = \frac{1}{6}\int 3\,\text{sen}(3x)\,dx+\frac{1}{2}\int \text{sen}\,x\,dx =$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a\\ \text{sen}(a-b)=\text{sen}\,a\cos b-\text{sen}\,b\cos a\end{array}\right\}\Rightarrow \text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)=2\,\text{sen}\,a\cos b$$

$= \frac{-1}{6}\cos(3x) + \frac{1}{2}\cos x + C.$

2) $\int \cos x\cos(3x)dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int(\cos(x+3x)+\cos(x-3x))\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos(4x)+\cos(-2x))\,dx =$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

$= \frac{1}{8}\int 4\cos(4x)\,dx - \frac{1}{4}\int -2\cos(-2x)\,dx = \frac{1}{8}\text{sen}(4x) - \frac{1}{4}\text{sen}(-2x) + C.$

3) $\int \text{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = \int \text{sen}\,x(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,dx = \int \text{sen}\,x\cos^2 x\,dx - \int \text{sen}\,x\cos^4 x\,dx =$

$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

4) $\int \text{sen}^4 x\cos^5 x\,dx = \int \text{sen}^4 x\cos x(1-\text{sen}^2 x)^2\,dx = \int \text{sen}^4 x\cos x(1-2\,\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x)\,dx =$

$= \int \text{sen}^4 x\cos x\,dx - 2\int \text{sen}^6 x\cos x\,dx + \int \text{sen}^8 x\cos x\,dx = \frac{\text{sen}^5 x}{5} - \frac{2\,\text{sen}^7 x}{7} + \frac{\text{sen}^9 x}{9} + C.$

5) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + C.$

Pág. 31

1) $\int_0^{\pi} -\operatorname{sen} x\, dx = [\cos x]_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$

Pág. 33

1) $\int_{-2}^{4} (x-1)(x+2)\, dx = \int_{-2}^{4} (x^2+x-2)\, dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x]_{-2}^{4} =$

$= (\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 8) - (\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 4) = 18.$

2) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_0^2 2\sqrt{1-(x/2)^2}\, dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, 2\cos t\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$

CV: $\frac{x}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{1}{2}\, dx = \cos t\, dt$

$x=0 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(0/2) = 0$

$x=2 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(2/2) = \pi/2$

$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = 2[t + \frac{\operatorname{sen}^2(2t)}{2}]_0^{\pi/2} = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \pi}{2}) = \pi.$

3) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx \underset{\uparrow}{=} [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\, dx = -\pi\cos\pi + 0 + [\operatorname{sen} x]_0^{\pi} =$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$

$= -(-\pi) + \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = \pi.$

4) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 + [2x - \frac{x^2}{2}]_1^2 =$
$= (\frac{1}{3} - 0) + (4-2) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{6}$.

Pág. 35

1) Utilizando el teorema fundamental del cálculo: $F'(x) = e^{x^2}$.

Pág. 37

1) Utilizando el teorema fundamental del cálculo: $F'(x) = \frac{3x^2-1}{\log x}$.

2) Utilizando el teorema fundamental del cálculo:
$F'(x) = (x+1)^2 \cos(2(x+1)) - (x^2)^2 \cos(-2x^2) \cdot (-2x) =$
$= (x+1)^2 \cos(2(x+1)) + 2x^5 \cos(-2x^2))$.

Pág. 40

1) área $= \int_{-1}^2 |f(x) - 0|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx = [-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0 + [\frac{x^2}{2}]_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

Pág. 41

1) **1º** Puntos de corte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2\,, \\ 1\,. \end{cases}$

2º Como f y g son continuas y $f(0) = 0$ y $g(0) = 2$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (-2, 1)$.

3º área$= \int_{-2}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx =$
$= [2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{1} = (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - 2 + \frac{8}{3}) = \frac{9}{2} > 0.$

2) **1º** Puntos de corte:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0\,, \\ 1\,. \end{cases}$

2º Como f y g son continuas y $f(1/4) = \frac{1}{16}$ y $g(1/4) = \frac{1}{2}$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (0, 1)$.

3º área $= \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx =$
$= [\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}]_{0}^{1} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - 0 = \frac{1}{3} > 0.$

3) **1º** Puntos de corte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow x = \pi/4$, si $x \in (0, \pi/2)$.

2º Hemos de estudiar lo que ocurre en dos intervalos: $(0, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi/2)$.

- Como f y g son continuas y $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (0, \pi/4)$.
- Como f y g son continuas y $f(\pi/2) = 1$ y $g(\pi/2) = 0$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (\pi/4, \pi/2)$.

3º área $= \int_0^{\pi/2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^{\pi/4} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (f(x) - g(x))\, dx =$

$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx =$

$= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/2} =$

$= (\operatorname{sen} \pi/4 + \cos \pi/4) - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) + (-\cos \pi/2 - \operatorname{sen} \pi/2) - (-\cos \pi/4 - \operatorname{sen} \pi/4) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2(\sqrt{2} - 1) > 0.$

4) **1º** Puntos de corte: $e^x = 2 \iff x = \log 2.$

2º Como las dos funciones son continuas y $e^0 = 1 < 2$, deducimos que $e^x \leq 2$ si $x \in (0, \log 2)$.

3º área $= \int_0^{\log 2} |2 - e^x|\, dx = [2x - e^x]_0^{\log 2} = 2\log 2 - 2 - (0 - 1) = 2\log 2 - 1 > 0.$

Parte II. Álgebra lineal

Tema 7. Matrices y sistemas de ecuaciones

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Matrices

Matrices

- Una **matriz** de dimensión (orden o tamaño) $m \times n$ es una *tabla* ordenada de mn elementos.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}\,.$$

- La matriz A tiene m **filas** y n **columnas**.
- a_{ij} denota el **elemento** (o entrada) situado en la fila i y columna j.
- Dos matrices son **iguales** si son del mismo tamaño y todos sus elementos son iguales.
- Si $m = 1$ decimos que A es una matriz **fila** y si $n = 1$ decimos que A es una matriz **columna**.

Matrices

- Si $m = n$ decimos que la matriz es **cuadrada**: $A \in \mathcal{M}_n$.
- Si A es cuadrada y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, decimos que la matriz es **diagonal**.
- Llamamos matriz **identidad** $I_n \in \mathcal{M}_n$ a la matriz diagonal con $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n \,.$$

- La matriz **nula** $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tiene todos sus elementos iguales a cero.
- Decimos que $A \in \mathcal{M}_n$ es **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ y A es **triangular superior** $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Operaciones con matrices

- **Suma de matrices.** Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define la suma de matrices como
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}\,.$$
- **Producto de una matriz por un escalar.** Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como
$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}\,.$$
- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  calcula:

  1) $A + B$ **2)** $A + C$ **3)** $2B$

  (Solución)

Operaciones con matrices

- **Producto de matrices.** Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$, se define el producto de matrices como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k} \quad \text{con} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y para todo $j = 1, 2, \ldots, k$.

- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

1) AB
(Solución)

Propiedades de las operaciones con matrices

- La suma de matrices es **asociativa**: si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces

$$(A+B)+C = A+(B+C)\,.$$

- La suma de matrices es **conmutativa**: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces

$$A+B = B+A\,.$$

- El producto de matrices es **asociativo**: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$ y $C \in \mathcal{M}_{k\times s}$, entonces

$$(AB)C = A(BC)\,.$$

- El producto de matrices es **distributivo** con respecto a la suma: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times k}$, entonces

$$(A+B)C = AC+BC\,.$$

Propiedades de las operaciones con matrices

- El producto de matrices **NO** es conmutativo.
- **Ejemplo.**

1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA.

2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula AC y CA.

(Solución)

Propiedades de las operaciones con matrices

- No se puede trabajar con matrices del mismo modo que trabajamos con números reales.
- **Ejemplo.** Comprueba las siguientes igualdades.

  1) $AB = 0$ pero $A \neq 0$ y $B \neq 0$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  2) $AB = AC$ pero $B \neq C$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

  3) $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Solución)

Propiedades de las operaciones con matrices

- **Ejemplo.** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y sea I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas.

  1) $(A + I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

  2) $(A - I_n)^2 = A^2 - 2A + I_n$.

  3) $(A + I_n)(A - I_n) = A^2 - I_n$.
  (Solución)

Matriz traspuesta

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos matriz **traspuesta** de A y se denota por A^T o A^t, a la matriz obtenida al colocar las filas de A en las columnas de A^T.
- $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}$.
- **Propiedades de la matriz traspuesta**
  1) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $(A^T)^T = A$.
  2) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$.
  3) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
  4) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$, entonces $(AB)^T = B^T A^T$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n$, decimos que es **simétrica** si $A = A^T$ y decimos que es **antisimétrica** si $A = -A^T$.

Matriz invertible (solo para matrices cuadradas)

- Decimos que una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ es **invertible** si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$AB = I_n \qquad \text{y} \qquad BA = I_n\,.$$

- En ese caso, decimos que B es la **inversa** de A y se denota por $A^{-1} = B$.

- Si existe la inversa, es única.

- **Propiedades de la matriz inversa**

  1) Si $A, B \in \mathcal{M}_n$, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  2) Si $A \in \mathcal{M}_n$, entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Determinante (solo para matrices cuadradas)

- Sea $A \in \mathcal{M}_2$, se define el **determinante** de A como

$$|A| = \det(\mathrm{A}) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}\,.$$

- Sea $A \in \mathcal{M}_3$, se puede usar la **regla de Sarrus**:

$$\det(\mathrm{A}) = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \mathrm{aei} + \mathrm{bfg} + \mathrm{dhc} - \mathrm{ceg} - \mathrm{bdi} - \mathrm{fha}\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula:

1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Solución)

Determinante (solo para matrices cuadradas)

- Si $A \in \mathcal{M}_n$, se calcula el **determinante** de A utilizando los determinantes de submatrices de tamaño inferior.
- Necesitamos las siguientes definiciones:
  - Llamamos **menor complementario** de a_{ij} y lo denotamos por α_{ij} al determinante de la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar la fila i y al columna j de la matriz A.
  - Llamamos **adjunto** de a_{ij} al valor $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.
- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, calcula $A_{3\,1}$.

(Solución)

Determinante (solo para matrices cuadradas)

- Desarrollo por adjuntos de la **fila** i (para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\det(\mathsf{A}) = \mathsf{a}_{i1}\mathsf{A}_{i1} + \mathsf{a}_{i2}\mathsf{A}_{i2} + \cdots + \mathsf{a}_{in}\mathsf{A}_{in}\,.$$

- Desarrollo por adjuntos de la **columna** j (para cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$):

$$\det(\mathsf{A}) = \mathsf{a}_{1j}\mathsf{A}_{1j} + \mathsf{a}_{2j}\mathsf{A}_{2j} + \cdots + \mathsf{a}_{nj}\mathsf{A}_{nj}\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ desarrollando por adjuntos de la primera columna. *(Solución)*

Propiedades del determinante

- Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$.

1) $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.

2) $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3) El determinante de A cambia de signo al intercambiar dos filas (o columnas).

4) El determinante de A no cambia al sumar a una fila (o columna) un múltiplo de otra.

5) $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B})$.

6) Si A es invertible, $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

7) Si A es diagonal, triangular inferior o superior, $\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{11} \cdot \mathrm{a}_{22} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{nn}}$.

Determinante (solo para matrices cuadradas)

- **Teorema.** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada. Entonces,

$$A \text{ es invertible} \quad \text{si y solo si} \quad \det(A) \neq 0.$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal

- Llamamos **ecuación lineal** de n incógnitas a una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde

  - $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los **coeficientes**,
  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las **incógnitas**,
  - b es el **término independiente**.

- **Ejemplo.**

1) $\log(x_1) + e^{x_2} + x_3^4 - \operatorname{sen}(x_4) + \dfrac{1}{x_5} + \sqrt{x_6} = 8$ no es una ecuación lineal.

2) $\log(2)x + \sqrt{5}\,y + 7 = e^5$ sí es una ecuación lineal.

Ecuación lineal

- Llamamos **solución** de la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ a un conjunto de valores

$$\begin{cases} x_1 = c_1\,, \\ x_2 = c_2\,, \\ \quad\vdots \\ x_n = c_n\,, \end{cases}$$

  que verifican la ecuación, es decir, se cumple

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b\,.$$

- La solución de una ecuación lineal no es necesariamente única.

- **Ejemplo.** Calcula una solución de la ecuación $x + y = 0$. *(Solución)*

Sistema de ecuaciones lineales

- Llamamos **sistema de ecuaciones lineales** de m ecuaciones y n incógnitas a una expresión de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

donde

  - a_{ij} con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ son los **coeficientes**,
  - x_j con $j = 1, 2, \ldots, n$ son las **incógnitas**,
  - b_i con $i = 1, 2, \ldots, m$ son los **términos independientes**.

Sistema de ecuaciones lineales

- Llamamos **solución** del sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de valores

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \,, \\ x_2 = c_2 \,, \\ \quad \vdots \\ x_n = c_n \,, \end{cases}$$

que verifican **todas** las ecuaciones del sistema.

Discusión de un sistema

- Según el tipo de solución, un sistema lineal puede ser:
  - **compatible determinado**, si existe una única solución del sistema;
  - **compatible indeterminado**, si existe más de una solución del sistema;
  - **incompatible**, si no existe ninguna solución del sistema.

- **Ejemplo.** Discute los siguientes sistemas lineales.

1) $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{array} \right.$ **2)** $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$ **3)** $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$

(Solución)

Resolución de un sistema lineal

Método de Gauss

Sistemas equivalentes

- Un método para resolver sistemas de ecuaciones consiste en reemplazar el sistema original por otro más sencillo con las mismas soluciones.

- **Ejemplo.** Los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

tienen la misma solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Sistemas equivalentes

- Decimos que dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

- **Teorema.** Un sistema lineal es equivalente a cualquiera obtenido al realizar sobre él alguna de las siguientes operaciones elementales:

  1) intercambiar el orden de dos ecuaciones del sistema;

  2) multiplicar una ecuación por un escalar no nulo;

  3) sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

Método de Gauss

- **Ejemplo.** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

(Solución)

Forma matricial de un sistema lineal

Forma matricial de un sistema lineal

El **sistema de ecuaciones lineales** de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

se puede expresar de forma matricial como $AX = B$ siendo

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ la matriz de **coeficientes**,

Forma matricial de un sistema lineal

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ la matriz de **incógnitas**,
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ la matriz de **términos independientes**.
- La matriz $(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$ es la **matriz ampliada** del sistema.

Método de Gauss

- **Método de Gauss:** es un método de resolución de sistemas $AX = B$ que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada equivalente.

- **Teorema.** El sistema lineal $AX = B$ es equivalente a cualquiera obtenido al realizar sobre la **matriz ampliada** $(A|B)$ cualquiera de las siguientes operaciones elementales:

  1) intercambiar dos filas de la matriz;

  2) multiplicar una fila por un escalar no nulo;

  3) sumar a una fila un múltiplo de otra.

Método de Gauss

- Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es **escalonada** si se cumplen las siguientes condiciones:

  1) las filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz;

  2) debajo del primer elemento no nulo de cada fila (llamado **pivote**) solo hay ceros;

  3) el pivote de una fila está situado más a la derecha que el pivote de las filas superiores.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes matrices son escalonadas.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Solución)

Teorema de Rouché–Frobenius

- El **rango** de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$, es el número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente.

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leq \text{mín}\{\,\mathrm{m},\mathrm{n}\,\}$.

- **Teorema de Rouché–Frobenius.** Si $AX = B$ es un sistema lineal con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, se cumple:
  - si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{n}$, entonces el sistema es compatible determinado;
  - si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) < \mathrm{n}$, entonces el sistema es compatible indeterminado;
  - si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \neq \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B})$, entonces el sistema es incompatible.

Ejemplos

- **Ejemplo.** Discute los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.

1)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & - & z & + & t & = & -1 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & + & 4t & = & -6 \\ 4x & + & 2y & - & 4z & + & 6t & = & -10 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & + & 5t & = & -7 \end{array}\right.$$

2)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & - & 3z & = & 2 \\ -4x & + & \alpha y & + & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

3)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ -x & - & 4y & + & 3z & = & -2 \\ -2x & - & 2y & & & = & \beta \end{array}\right.$$

(Solución)

Cálculo de la matriz inversa

Método de Gauss–Jordan

Método de Gauss–Jordan

- **Método de Gauss:** es un método de resolución de sistemas $AX = B$ que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada equivalente.

- **Método de Gauss–Jordan:** es un método de resolución de sistemas $AX = B$ que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada reducida equivalente.

Método de Gauss–Jordan

- Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es **escalonada reducida** si se cumplen las siguientes condiciones:

  1) es escalonada;

  2) todos los pivotes son 1;

  3) todos los pivotes tienen encima y debajo 0.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes matrices son escalonadas reducidas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Solución)

Cálculo de la matriz inversa

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, se puede obtener A^{-1} realizando transformaciones elementales:
$$\left(A \mid I_n\right) \longrightarrow \left(I_n \mid A^{-1}\right) .$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss–Jordan.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(Solución)

Cálculo de la matriz inversa

- Si A es una matriz invertible, entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado y además se cumple:

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B\,.$$

- Si A es una matriz invertible, entonces el sistema $AX = 0$ es compatible determinado y la única solución es $X = 0$.

Soluciones

Soluciones

Pág. 5

1) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2) No se puede calcular porque las matrices son de distinto tamaño: $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}$.

3) $2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Pág. 6

1) $AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{pmatrix}$.

Pág. 8

1) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

2) $AC = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ y CA no se puede calcular porque las matrices no tienen el tamaño adecuado: $C \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

Soluciones

Pág. 9

1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$.

3) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Pág. 10

1) $(A+I_n)^2 = (A+I_n)(A+I_n) = AA + AI_n + I_nA + I_nI_n = A^2 + 2A + I_n$.

2) $(A-I_n)^2 = (A-I_n)(A-I_n) = AA - AI_n - I_nA + I_nI_n = A^2 - 2A + I_n$.

3) $(A+I_n)(A-I_n) = AA - AI_n + I_nA - I_nI_n = A^2 - I_n$.

Soluciones

Pág. 13

1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$

2) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 4 - 6 - 0 - 1 + 4 = 1.$

Pág. 14

1) $\alpha_{3,1} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 15 = -3$ y $A_{3,1} = (-1)^4(-3) = -3.$

Pág. 15

1) $\det(A) = 1 \cdot (-1)^2 \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$= (-1 + 36 - 6) + (12 - 2 + 2) = 41.$

Soluciones

Pág. 20

1) $x = -\pi$, $y = \pi$.

Pág. 23

1) Es un sistema compatible indeterminado porque $\left\{\begin{array}{l} x = 2\,, \\ y = -2\,, \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{l} x = -5\,, \\ y = 5\,, \end{array}\right.$ son dos soluciones.

2) Es un sistema incompatible porque la expresión $x + y$ no puede tener dos valores distintos.

3) Es un sistema compatible determinado porque la única solución es $x = y = \frac{1}{2}$.

Pág. 27

1)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1}}{\sim} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & y & - & 11z & = & -27 \end{array}\right. \underset{E_3 \to 2E_3 - 3E_2}{\sim}$$
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & & - & z & = & -3 \end{array}\right. \longrightarrow \text{SCD:} \left\{\begin{array}{l} x = 1\,, \\ y = 2\,, \\ z = 3\,. \end{array}\right.$$

Soluciones

2) $\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -x - 2y - z &= 3 \end{aligned}\right. \underset{E_2 \to E_2 + E_1}{\sim} \left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 0 &= 3 \end{aligned}\right. \longrightarrow$ SI

3) $\left\{\begin{aligned} x + \ \ y + 2z &= \ \ 3 \\ x - \ \ y + \ \ z &= -1 \\ 2y + \ \ z &= \ \ 4 \end{aligned}\right. \underset{E_2 \to E_2 - E_1}{\sim} \left\{\begin{aligned} x + \ \ y + 2z &= \ \ 3 \\ -2y - \ \ z &= -4 \\ 2y + \ \ z &= \ \ 4 \end{aligned}\right. \underset{E_3 \to E_3 + E_2}{\sim}$

$\left\{\begin{aligned} x + \ \ y + 2z &= \ \ 3 \\ -2y - \ \ z &= -4 \\ 0 &= \ \ 0 \end{aligned}\right. \longrightarrow$ SCI: $\left\{\begin{aligned} &x = 3\alpha - 5\,, \\ &y = \alpha\,, \\ &z = 4 - 2\alpha\,, \end{aligned}\right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pág. 32

A) Sí es escalonada.

B) No es escalonada porque el pivote de la segunda fila está más hacia la izquierda que el pivote de la primera fila.

C) Sí es escalonada.

D) Sí es escalonada.

E) Sí es escalonada.

Soluciones

Pág. 34

1) $\left(A \,\middle|\, B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -4 & 6 & -10 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -7 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 & 6 & -10 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -7 \end{array}\right)$

$\underset{\substack{F_3 \to F_3 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 \to F_3 + 2F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Como rg (A|B) = rg (A) = 2 < 4 = nº incógnitas, es SCI y con solución:

$$\begin{cases} x = -\alpha/2 - \beta - 2\,, \\ y = \alpha - \beta - 1\,, \\ z = \alpha\,, \\ t = \beta\,, \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Soluciones

2) $\left(A\,\middle|\,B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -4 & \alpha & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$

- Si $\alpha = 2$: la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$ y como $\operatorname{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 3 =$

  $=$ nº incógnitas, es SCD con solución $\begin{cases} x = 2/3\,, \\ y = 4/3\,, \\ z = 2/3\,. \end{cases}$

- Si $\alpha \neq 2$:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - \frac{\alpha-2}{3} F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha+4}{\alpha-2} & \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha-2} \end{array}\right)$

  - Si $\alpha = -4$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{array}\right)$ y como $\operatorname{rg}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 \neq 2 = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$,

    es SI.

Soluciones

- Si $\alpha \neq -4$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha+4}{\alpha-2} & \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha-2} \end{array}\right)$ y como $\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(A) =$ $= 3 =$ nº de incógnitas, es SCD con solución: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{4}{3}, \\ z = \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha+4}. \end{array}\right.$.

3) $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & \beta \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow -F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ \alpha & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & \beta \end{array}\right)$

$$\underset{\substack{F_2 \to F_2 - \alpha F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2-4\alpha & -3+3\alpha & -3-2\alpha \\ 0 & 6 & -6 & 4+\beta \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow \frac{1}{6}F_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 2-4\alpha & -3+3\alpha & -3-2\alpha \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + (4\alpha-2)F_2}{\sim}$$

Soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & -3-2\alpha+\frac{2\alpha-1}{3}(4+\beta) \end{array}\right)$$

- Si $\alpha=-1$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -5-\beta \end{array}\right)$.
  - Si $\beta=-5$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y como $\mathrm{rg}\,(A|B)=\mathrm{rg}\,(A)=2<3=$ $=$ nº incógnitas, es SCI con solución: $\begin{cases} x=\frac{2}{3}\,, \\ y=\frac{4}{3}\,, \\ z=\frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha+4}\,. \end{cases}$.
  - Si $\beta\neq-5$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -5-\beta \end{array}\right)$ y como $\mathrm{rg}\,(A|B)=3\neq2=\mathrm{rg}\,(A)$ es SI.

Soluciones

- Si $\alpha \neq -1$ la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & -3-2\alpha+\frac{2\alpha-1}{3}(4+\beta) \end{array}\right)$ y como

  $\text{rg}\,(A|B) = 3 = \text{rg}\,(A) =$ nº incógnitas, es SCD con solución: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{4}{3}, \\ z = \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha+4}. \end{array}\right.$.

Pág. 37

A) Sí es escalonada reducida.

B) Sí es escalonada reducida.

C) No es escalonada reducida porque el pivote de la segunda fila no es 1.

D) Sí es escalonada reducida.

Soluciones

Pág. 38

1) $\left(A \,\middle|\, I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow -F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2 - 3F_1}{\sim}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left(I_2 \,\middle|\, A^{-1}\right).$

2) $\left(B \,\middle|\, I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$

Como en la primera submatriz no podremos tener nunca la identidad porque hay menos pivotes que filas, B no es invertible.

Soluciones

3) $\left(C \mid I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1}}{\sim}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to 5F_1 - 2F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -5 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to 2F_1 + 5F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1/20,\ F_2 \to F_2/2,\ F_3 \to -F_3/5}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/20 & 1/20 & 3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right) = \left(I_3 \mid C^{-1}\right).$$

Tema 8. Espacios vectoriales

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Espacio vectorial

Espacio vectorial

- Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales y V es un conjunto no vacío, decimos que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}$-espacio vectorial) si

1) En V hay definida una operación interna, llamada **suma** y denotada por $+$, que verifica las siguientes propiedades:

a) Asociatividad: $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todo $u, v, w \in V$.

b) Conmutatividad: $u+v = v+u$ para todo $u, v \in V$.

c) Existencia del elemento neutro: existe $0 \in V$ tal que $v+0 = v$ para todo $v \in V$.

d) Existencia del elemento opuesto: para cada $u \in V$ existe $w \in V$ tal que $u+w = 0$. Se denota por $w = -u$.

Espacio vectorial

2) En V hay definida una operación externa, llamada **producto por escalar**, que verifica las siguientes propiedades:

- **a)** $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $u, v \in V$.
- **b)** $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$ para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.
- **c)** $(\lambda\beta)u = \lambda(\beta u)$ para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.
- **d)** $1\,u = u$ para todo $u \in V$ (1 es el elemento neutro del producto por escalar).

- Llamamos **vectores** a los elementos de V y **escalares** a los elementos de $\mathbb{R}$.

Espacio vectorial

- **Ejemplo.** Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales.

  1) $\mathbb{R}^n$: las n-tuplas de números reales

  2) $\mathcal{M}_{m\times n}$: las matrices de tamaño $m \times n$

  3) $\mathbb{R}[x]$: los polinomios con coeficientes reales

  4) $\mathbb{R}_n[x]$: los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales

- **Ejemplo.** Los siguientes conjuntos **NO** son espacios vectoriales.

  1) El conjunto formado por un único elemento (no nulo), $V = \{ -7 \}$

  2) $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1 \}$

  (Solución)

Subespacio vectorial

Subespacio vectorial

- Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y W es un subconjunto no vacío de V, decimos que W es un **subespacio vectorial** de V si es un espacio vectorial utilizando las mismas operaciones de suma y producto por escalar.

- **Caracterización (I)**

$$\left.\begin{array}{c} W \text{ es subespacio} \\ \text{vectorial de } V \end{array}\right\} \text{ si y solo si } \left\{\begin{array}{cc} u+v \in W & \text{para todo } u,v \in W, \\ \lambda u \in W & \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}\,. \end{array}\right.$$

- **Caracterización (II)**

$$\left.\begin{array}{c} W \text{ es subespacio} \\ \text{vectorial de } V \end{array}\right\} \text{ si y solo si } \left\{ \lambda u+\beta v \in W \quad \begin{array}{c} \text{para todo } u,v \in W, \\ \text{para todo } \lambda,\beta \in \mathbb{R}\,. \end{array}\right.$$

Subespacio vectorial

- Si V es un espacio vectorial, entonces V y $\{ 0 \}$ son dos subespacios vectoriales de V.

- **Ejemplo.** Justifica si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

  1) $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$

  2) $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \}$

  3) $T = \{ (2t, 4t, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}$

  4) $P = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(3) = 0 \}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$

  5) $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

  6) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ invertible. $V = \{ X \in \mathcal{M}_{n\times 1} \mid AX = 0 \}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}$

  (Solución)

Subespacio vectorial

- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y W un subconjunto de V.
  Si $0 \notin W$, entonces W **NO** es un subespacio vectorial de V.

- **Ejemplo.** Justifica si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

  1) $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 1 \}$

  2) $T = \{ 1 + ax + bx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

  3) $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2a & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$

  4) $W = \{ (t, t^2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}$

  (Solución)

Unión e intersección de conjuntos

- Sean A y B dos conjuntos.
    - La **unión** de A y B es

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \ \text{ o bien } \ x \in B \,\}.$$

    - La **intersección** de A y B es

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B \,\}.$$

Unión, intersección y suma de subespacios

- **Intersección de subespacios.**
  - **Teorema.** Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y W y S son dos subespacios vectoriales de V, entonces $W \cap S$ es subespacio vectorial de V.

- **Unión de subespacios**.
  - En general, $W \cup S$ **NO** es un subespacio vectorial de V.

- **Suma de subespacios**.
  - Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y W y S son dos subespacios vectoriales de V, se define el subespacio vectorial **suma** de W y S como el menor subespacio vectorial que contiene a W y a S.

Unión, intersección y suma de subespacios

- **Ejemplo.**

1) Sabiendo que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, determina si

a) $S \cap T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

b) $S \cup T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

2) Sabiendo que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, determina si

a) $S \cap T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

b) $S \cup T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(Solución)

Dependencia e independencia lineal

Combinación lineal

- Si V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$, llamamos **combinación lineal** de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ a cualquier vector de la forma

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \in V\,,$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Combinación lineal

- **Ejemplo.**

1) Sean los vectores $u = (1, 0, 0)$ y $v = (0, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) El vector $(2, -2, 0)$ es combinación lineal de u y v.

b) El vector $(0, 0, 1)$ no es combinación lineal de u y v.

2) Sean los polinomios $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 1 + x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

a) El polinomio $r(x) = 2$ no es combinación lineal de $p(x)$ y $q(x)$.

b) El polinomio $s(x) = 2 + x + x^2$ es combinación lineal de $p(x)$ y $q(x)$.

(Solución)

Dependencia e independencia lineal

- Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$, decimos que el conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \dots, u_k \}$ es **linealmente dependiente** si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ <u>no todos nulos</u> tales que

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \,.$$

- En caso contrario decimos que el conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \dots, u_k \}$ es **linealmente independiente**.

Dependencia e independencia lineal

- **Ejemplo.** Justifica si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

1)
$$\begin{aligned} u &= (1,0,1)\,, \\ v &= (1,1,0)\,, \\ w &= (1,1,1)\,, \\ t &= (1,2,1)\,. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} p(x) &= x^2+x+1\,, \\ q(x) &= 2x+1\,, \\ r(x) &= x^2+1\,. \end{aligned}$$

(Solución)

Dependencia e independencia lineal

- **Proposición.** Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y tenemos los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+r} \in V$, entonces se cumple:

  1) Si $0 \in \{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$, entonces $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ son linealmente dependientes.

  2) $v \in V$ es linealmente independiente si y solo si $v \neq 0$.

  3) Si $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ son linealmente dependientes, entonces $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+r} \}$ también son linealmente dependientes.

  4) Si $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+r} \}$ son linealmente independientes, entonces $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ también son linealmente independientes.

  5) $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ son linealmente dependientes si y solo si al menos uno de los vectores es combinación lineal del resto.

Rango

- **Proposición.** Un conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subseteq \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas filas son los vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ tiene rango k.

- **Ejemplo.** Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

  1) $T = \{ (1, 1, 2, 2), (0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2) \}$.

  2) $S = \{ (1, 1, 2, 2), (0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (1, 1, 1, 1) \}$.

  (Solución)

Sistema generador

Sistema generador

- Si W es un subespacio vectorial de V, decimos que $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subset W$ es un **sistema generador** de W si todo elemento de W se puede expresar como combinación lineal del conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$.

Sistema generador

- **Ejemplo.** Determina si los siguientes conjuntos son sistemas generadores de los espacios indicados.

1) $S = \{\, (0,1),\ (1,0),\ (1,-1) \,\}$ de $\mathbb{R}^2$.

2) $P = \{\, 1,\ x,\ x^2 \,\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

3) $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2$.

4) $T = \{\, (0,3,0),\ (1,0,0) \,\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(Solución)

Subespacio generado

- Si $S = \{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subset V$, con V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, llamamos **subespacio vectorial generado por** S (es decir, $\langle S \rangle$) al conjunto de todos los vectores obtenidos como combinación lineal de los elementos de S.

- $\langle S \rangle$ es el subespacio vectorial de V más pequeño (con menor cantidad de elementos) que contiene a S.

- **Ejemplo.** Describe los siguientes subespacios vectoriales.

  1) $\langle (1, 0) \rangle$

  2) $\langle (2, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$

  3) $\langle x^2 + 1 \rangle$

  (Solución)

Bases y dimensión

Base y dimensión

- Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, decimos que el conjunto de vectores $B = \{ v_1, v_2 \dots, v_n \} \subset V$ es una **base** de V si

  1) B es un conjunto linealmente independiente,

  2) B es un sistema generador de V.

- Si B tiene n elementos, entonces todas las bases de V tienen n elementos.

- Si cambiamos el orden de los elementos de B obtenemos una base B' distinta.

- Llamamos **dimensión** de V, $\dim(V)$, al número de elementos de B.

Base y dimensión

- **Ejemplo.**

1) $B = \{ (1,0), (0,1) \}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2) $B = \{ (1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1) \}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Se llama **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

3) $B = \{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Sea llama **base estándar** de $\mathbb{R}_n[x]$.

4) El espacio vectorial trivial $V = \{ 0 \}$ tiene dimensión 0 ya que $\{ 0 \}$ es un sistema generador de V pero no es linealmente independiente.

5) $B = \{ 1, x, x^2, \ldots \}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$.

Base y dimensión

- **Teorema.** Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces

  1) $\dim(V)$ es el número mínimo de vectores que forman un sistema generador de V.

  2) $\dim(V)$ es el número máximo de vectores de V linealmente independientes.

  3) Si W es subespacio vectorial de V, entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$.

  4) Si W es subespacio vectorial de V, entonces

  $\dim(W) = \dim(V)$ si y solo si $W = V$.

  5) Si W y S son dos subespacios vectoriales de V, entonces

  $\dim(W + S) = \dim(W) + \dim(S) - \dim(W \cap S)$.

Base y dimensión

6) Si $S = \{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ es un sistema generador de V ($m \geq \dim(V)$), entonces existe un subconjunto de S linealmente independiente.

7) Si $u_1, u_2, \ldots, u_r \in V$ son linealmente independientes ($r \leq \dim(V)$), existen vectores $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n \in V$ tales que $\{ u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n \}$ es una base de V.

- **Teorema.** Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$ y $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de n vectores de V, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1) S es una base de V.

2) S es un sistema generador de V.

3) S es linealmente independiente.

Base y dimensión

- **Ejemplo.** Encuentra una base y determina la dimensión de los siguientes subespacios.

1) $S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x + 2y - z = 0,\ 2x - y + 3z = 0 \,\}$

2) $W = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; 2x - y + 3z = 0,\ 4x - 2y + 6z = 0,\ -6x + 3y - 9z = 0 \,\}$

3) $T = \langle\, x^3 + x^2 + x,\ x^3 - 1,\ x^2 + x + 1,\ x^2 + 1,\ 2x^2 + x + 2 \,\rangle$

(Solución)

Unión, intersección y suma de subespacios

- **Ejemplo.** Calcula una base de $S+T$ siendo

1) $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \}$ y
$T = \langle (1,1,1), (1,1,0), (-1,-1,0) \rangle$.

2) $S = \{ a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a-c-d=0,\ b+c=0 \}$ y
$T = \langle 1+x^2+x^3,\ 1-x-x^2,\ x+2x^2+x^3 \rangle$.

(Solución)

Coordenadas y cambio de base

Coordenadas

- Todo elemento de V se puede expresar de forma **única** como combinación lineal de los elementos de una base.

- Si $v \in V$ y $B = \{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ es un base de V, entonces existen unos únicos valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \,.$$

- Decimos que los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son las **coordenadas** de $v \in V$ con respecto de la base B y lo denotamos por

$$v = [\lambda_1,\, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]_B \,.$$

Coordenadas

- **Ejemplo.**

1) En $\mathbb{R}^2$, calcula las coordenadas de $v = (2, -4)$ con respecto a las bases:

a) $B = \{ (1,0), (0,1) \}$ (base canónica de $\mathbb{R}^2$).

b) $B' = \{ (1,1), (0,2) \}$.

2) En $\mathbb{R}_2[x]$, calcula las coordenadas de $p(x) = 6x^2 - 2x + 3$ con respecto a las bases:

a) $B = \{ 1, x, x^2 \}$ (base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$).

b) $B' = \{ x^2, x+1, -5 \}$

(Solución)

Vectores linealmente independientes y coordenadas

- **Proposición.** Un conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subseteq V$ es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas columnas (o filas) son las coordenadas de los vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ tiene rango k.

- **Ejemplo.** Si $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $q(x) = 4x^2 + 3x + 2$ y $r(x) = 6x^2 + 4x + 3$. ¿Los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o independientes?

  1) $T = \{ p(x),\ q(x),\ r(x) \}$

  2) $S = \{ p(x),\ q(x) \}$

  (Solución)

Matriz de cambio de base

- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y sean $B = \{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ y $B' = \{ w_1, w_2, \ldots, w_n \}$ dos bases de V.

- Podemos escribir

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \lambda_1^1 w_1 + \lambda_2^1 w_2 + \cdots + \lambda_n^1 w_n = [\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_n^1]_{B'} \, , \\
u_2 &= \lambda_1^2 w_1 + \lambda_2^2 w_2 + \cdots + \lambda_n^2 w_n = [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2]_{B'} \, , \\
&\vdots \\
u_n &= \lambda_1^n w_1 + \lambda_2^n w_2 + \cdots + \lambda_n^n w_n = [\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n]_{B'} \, .
\end{aligned}
$$

- La **matriz de cambio de base de B a B'** es

$$
P_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \in M_n \, .
$$

Matriz de cambio de base

- En la columna j están las coordenadas del vector u_j con respecto a la base B' (para $j = 1, 2, \ldots, n$).
- La matriz de cambio de base de B' a B es la inversa de $P_{B' \leftarrow B}$: $P_{B \leftarrow B'} = (P_{B' \leftarrow B})^{-1}$.
- Si $v \in V$ es un vector con coordenadas $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_B$ y $v = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]_{B'}$, se cumple

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = P_{B' \leftarrow B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ o equivalentemente, } v_{B'}^T = P_{B' \leftarrow B}\, v_B^T\,.$$

Matriz de cambio de base

- **Ejemplo.**

1) Si $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,1,0)\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^3$, calcula:

a) La matriz de cambio de base de B' a B.

b) Las coordenadas con respecto a la base canónica del vector $v \in \mathbb{R}^3$ sabiendo que $v = [1,0,-2]_{B'}$.

2) Si $B = \{\,1,\ x,\ x^2\,\}$ y $B' = \{\,x^2-2x+1,\ 2x-2,\ 2\,\}$ son dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$, calcula:

a) La matriz de cambio de base de B' a B.

b) Las coordenadas del vector $p(x) = 1+2x-2x^2$ con respecto a la base B'.

(Solución)

Soluciones

Pág. 5

1) Utilizando las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un escalar y el elemento neutro es el $(0, 0, \dots, 0)$.

2) Utilizando las operaciones suma de matrices y producto de una matriz por un escalar y el elemento neutro es el $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

3) Utilizando las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar y el elemento neutro es el $0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots$

4) Utilizando las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar y el elemento neutro es el $0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$.

Pág. 5

1) No es un subespacio vectorial porque $-7 \in V$ pero $4 \cdot (-7) \notin W$.

2) No es un subespacio vectorial porque no contiene al neutro: $(0, 0) \notin V$ ya que $0 \neq 3 \cdot 0 + 1$.

Pág. 8

1) W sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ porque:

- Si (x, y), $(z, t) \in W$, ¿$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t) \in W$? Cierto ya que
$$\left.\begin{array}{lcl} (x, y) \in W & \Rightarrow & y = 2x \\ (z, t) \in W & \Rightarrow & t = 2z \end{array}\right\} + \ \Rightarrow y + t = 2x + 2z = (2x + z).$$

- Si $(x, y) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in W$? Cierto ya que
$$\left.\begin{array}{lcr} (x, y) \in W & \Rightarrow & y = 2x \\ & & \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \times \ \Rightarrow \lambda y = \lambda 2x = 2(\lambda x).$$

2) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ porque $(1, 0) \in S$ pero $2(1, 0) \notin S$ porque $2 + 0 \neq 1$.

3) T sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ porque:

- Si $(2t, 4t, -t)$, $(2s, 4s, -s) \in T$, ¿$(2t, 4t, -t) + (2s, 4s, -s) \in W$? Cierto ya que $(2t, 4t, -t) + (2s, 4s, -s) = (2(t + s), 4(t + s), -(t + s))$ con $s + t \in \mathbb{R}$.

- Si $(2t, 4t, -t) \in T$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda(2t, 4t, -t) \in W$? Cierto ya que
$\lambda(2t, 4t, -t) = (2(\lambda t), 4(\lambda t), -(\lambda t))$ con $\lambda t \in \mathbb{R}$.

4) P sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ porque:

- Si $p(x),\ q(x) \in P$, ¿$p(x) + q(x) \in P$? Cierto ya que
  $$\left.\begin{array}{r}p(x) \in P \ \Rightarrow \ p(3) = 0 \\ q(x) \in P \ \Rightarrow \ q(3) = 0\end{array}\right\} + \ \Rightarrow p(3) + q(3) = 0.$$
- Si $p(x) \in P$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda p(x) \in W$? Cierto ya que
  $$\left.\begin{array}{r}p(x) \in P \ \Rightarrow \ p(3) = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \times \ \Rightarrow \lambda p(3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

5) N sí es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$ porque:

- Si $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} \in N$, ¿$A + B \in P$? Cierto ya que
  $A + B = \begin{pmatrix} a+b & 2(a+b) \\ 0 & -(a+b) \end{pmatrix}$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda A \in W$? Cierto ya que $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & 2(\lambda a) \\ 0 & -(\lambda a) \end{pmatrix}$.

6) Como A es invertible, existe A^{-1}. Entonces, $AX = 0 \ \Rightarrow \ A^{-1}AX = A^{-1}0 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ I_n X = 0 \ \Rightarrow \ X = 0$. Es decir, $V = \{\, 0 \,\}$ que es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}$.

Pág. 9

1) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ ya que $(0,0) \notin S$ porque $0 \neq 0+1$.

2) T no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ ya que $0 = 0 + 0\,x + 0\,x^2 \notin T$ porque el sistema $\left\{\begin{array}{l} 1 = 0\,, \\ a = 0\,, \\ b = 0\,, \end{array}\right.$ no tiene solución.

3) N no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$ ya que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin N$ porque el sistema

$\left\{\begin{array}{l} a = 0\,, \\ a+1 = 0\,, \\ 2a = 0\,, \\ -a = 0\,, \end{array}\right.$ no tiene solución.

4) W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ ya que $(1,1,0) \in W$ pero $2\,(1,1,0) \notin W$.

Pág. 12

1) **a)** $S \cap T$ sí es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ por ser intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

b) $S \cup T$ no es subespacio vectorial porque $(1,0) \in S \subset S \cup T$ y $(0,7) \in T \subset S \cup T$ pero $(1,0) + (0,7) = (1,7) \notin S \cup T$ porque $(1,7) \notin S$ ni $(1,7) \notin T$.

2) **a)** $S \cap T$ sí es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ por ser intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

b) $S \cup T$ no es subespacio vectorial porque $(1,2) \in S \subset S \cup T$ y $(1,3) \in T \subset S \cup T$ pero $(1,2)+(1,3)=(2,5) \notin S \cup T$ porque $(2,5) \notin S$ ni $(2,5) \notin T$.

Pág. 15

1) **a)** Cierto porque $(2,-2,0) = 2\,u - v$.

b) Cierto porque $(0,0,1) = \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,2,0) \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 1\,\alpha\,, \\ 0 = 2\,\beta\,, \\ 1 = 0 \end{array} \right.$ no tiene solución.

2) **a)** Cierto porque $2 = \alpha\,(1+x) + \beta\,(1+x^2) \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = \alpha + \beta\,, \\ 0 = \alpha\,, \\ 0 = \beta\,, \end{array} \right.$ no tiene solución.

b) Cierto porque $s(x) = p(x) + q(x)$.

Pág. 17

1) Si $(0,0,0) = \alpha\,(1,0,1) + \beta\,(1,1,0) + \gamma\,(1,1,1) + \lambda\,(1,2,1)$, entonces

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma + \ \ \lambda \\ 0 = \qquad \beta + \gamma + 2\lambda \\ 0 = \alpha \qquad + \gamma + \ \ \lambda \end{array}\right. \underset{E_3 \to E_3 - E_1}{\sim} \left\{\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma + \ \ \lambda \\ 0 = \qquad \beta + \gamma + 2\lambda \\ 0 = \quad -\beta \end{array}\right. \underset{E_3 \to E_3 + E_2}{\sim}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma + \ \ \lambda \\ 0 = \qquad \beta + \gamma + 2\lambda \\ 0 = \qquad\qquad \gamma + 2\lambda \end{array}\right. \text{ es un SCI con solución: } \left\{\begin{array}{l} \alpha = -s\,, \\ \beta = 0\,, \\ \gamma = -2s\,, \\ \lambda = s \end{array}\right. \text{ con } s \in \mathbb{R}.$$

Deducimos que los vectores $\{\,u,\ v,\ w,\ t\,\}$ son linealmente dependientes.

2) Si $0 = 0 + 0\,x + 0\,x^2 = \alpha\,(1 + x + x^2) + \beta\,(1 + 2x) + \gamma\,(1 + x^2)$, entonces

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \alpha + \ \ \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + 2\beta \\ 0 = \alpha \qquad + \gamma \end{array}\right. \underset{\substack{E_2 \to E_2 - E_1 \\ E_3 \to E_3 - E_1}}{\sim} \left\{\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \qquad \beta - \gamma \\ 0 = \quad -\beta \end{array}\right. \underset{E_3 \to E_3 + E_2}{\sim} \left\{\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \qquad \beta - \gamma \\ 0 = \qquad\quad -\gamma \end{array}\right.$$

es un SCD con solución: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Deducimos que los vectores $\{\,p(x),\ q(x),\ r(x)\,\}$ son linealmente independientes.

Pág. 19

1) Como $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{=}$
$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ deducimos que los vectores de T son linealmente dependientes.

2) Como $S = T \cup \{ (1,1,1,1) \}$ y los vectores de T son linealmente dependientes, también lo son los de S.

Pág. 22

1) S sí es sistema generador de $\mathbb{R}^2$ porque si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, el sistema $(a,b) = \alpha\,(0,1) + \beta\,(1,0) + \gamma\,(1,-1)$ tiene solución:

$\left\{ \begin{array}{ll} a = & \beta + \gamma \\ b = \alpha & \quad - \gamma \end{array} \right.$ es SCI con solución: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = b + t\,, \\ \beta = a - t\,, \\ \gamma = t\,, \end{array} \right.$ con $t \in \mathbb{R}$.

2) P sí es sistema generador de $\mathbb{R}_2[x]$ porque si $a + b\,x + c\,x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, el sistema

$a + b\,x + c\,x^2 = \alpha\,1 + \beta\,x + \gamma\,x^2$ tiene solución: $\left\{\begin{array}{l} \alpha = a\,, \\ \beta = b\,, \\ \gamma = c\,, \end{array}\right.$ con $t \in \mathbb{R}$.

3) R no es sistema generador de $\mathcal{M}_2$ porque si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$, el sistema

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir,

$\left\{\begin{array}{l} a = \alpha + 2\beta + \gamma \\ b = \quad -\ \beta \\ c = \qquad \beta + \gamma \\ d = 0 \end{array}\right.$ no tiene solución si $d \neq 0$.

4) T no es sistema generador de $\mathbb{R}^3$ porque si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, el sistema

$(a, b, c) = \alpha\,(0, 3, 0) + \beta\,(1, 0, 0)$, es decir, $\left\{\begin{array}{l} a = \beta \\ b = 3\alpha \\ c = 0 \end{array}\right.$ no tiene solución si $c \neq 0$.

Pág. 23

1) $\langle\, (1,0)\,\rangle = \{\, \alpha\,(1,0) \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R}\,\}$.

2) $\langle\, (2,1,0),\, (0,1,1)\,\rangle = \{\, \alpha\,(2,1,0) + \beta\,(0,1,1) \;\big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,\}$.

3) $\langle\, x^2+1\,\rangle = \{\, \alpha\,(x^2+1) \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R}\,\}$.

Pág. 29

1) Buscamos un sistema generador de S resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-\ \ z=0 \\ 2x-\ \ y+3z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=t\,, \\ z=t\,, \end{array}\right. \quad \text{con } t\in\mathbb{R}.\ \text{Entonces, } S=\langle\,(-1,1,1)\,\rangle.$$

Como el sistema generador está formado por un único elemento no nulo, es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de S es $\{\,(-1,1,1)\,\}$.

2) Buscamos un sistema generador de W resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-\ \ y+3z=0 \\ 4x-2y+6z=0 \\ -6x+3y-9z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=2t+3s\,, \\ z=s\,, \end{array}\right. \quad \text{con } t,s\in\mathbb{R}.\ \text{Entonces,}$$

$S=\langle\,(1,2,0),\,(0,3,1)\,\rangle$. Como además esos dos vectores son linealmente independientes (ya que tienen rango 2) una base de W es $\{\,(1,2,0),\,(0,3,1)\,\}$.

2) Buscamos un sistema generador de W resolviendo el sistema
$\left\{\begin{array}{r} 2x - \;\, y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t + 3s\,, \\ z = s\,, \end{array}\right.$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} W &= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x = \alpha,\; y = 2\alpha + 3\beta,\; z = \beta \,\} = \\ &= \{\, (\alpha,\, 2\alpha + 3\beta,\, \beta) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} = \\ &= \{\, (\alpha,\, 2\alpha,\, 0) + (0,\, 3\beta,\, \beta) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} = \\ &= \{\, \alpha(1,\, 2,\, 0) + \beta(0,\, 3,\, 1) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} = \langle (1,2,0),\, (0,3,1) \rangle\,. \end{aligned}$$

Como además esos dos vectores son linealmente independientes (ya que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$), una base de W es $\{\, (1,2,0),\, (0,3,1) \,\}$.

3) Como ya tenemos un sistema generador de T, solo hay que comprobar que son linealmente independientes (pasando a coordenadas con respecto de la base estándar):

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1 \\ F_5 \to F_5 - 2F_1}}{=}$$

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3\to F_3-F_2 \\ F_5\to F_5-F_2}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3\leftrightarrow F_5}{=}$$

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_4\to F_4-F_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Entonces, una base de T es $\{ x^3 - x,\ x^3 + x^2 + x,\ 2x^2 + x + 2 \}$.

Pág. 30

1) Buscamos un sistema generador de S. Para ello, resolvemos el sistema

$$x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -s - t\,, \\ y = s\,, \\ z = t\,. \end{cases}$$ Entonces, podemos escribir

$$S = \{ (-s-t, -s, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \} = \{ (-s, -s, 0) + (-t, 0, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ s(-1, -1, 0) + t(-1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle\,.$$

Ya conocemos un sistema generador de $S+T = \langle\, (-1,1,0),\, (-1,0,1),\, (1,1,1),\, (1,1,0),\, (-1,-1,0)\,\rangle$. Eliminamos los vectores linealmente dependientes para obtener la base:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2+F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-F_1 \\ F_5\to F_5+F_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Deducimos que una base de $S+T$ es $\{\,(1,1,0),\, (-1,0,1),\, (1,1,1)\,\}$.

2) Buscamos un sistema generador de S. Para ello, resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a \quad -c-d=0 \\ \quad b+c \quad =0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} a=\alpha+\beta\,, \\ b=-\alpha\,, \\ c=\alpha\,, \\ d=\beta\,. \end{array}\right.$$ Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} S &= \{\,(\alpha+\beta)-\beta x+\alpha x^2+\beta x^3\in\mathbb{R}_3[x] \;\big|\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,\} = \\ &= \{\,(\alpha+\alpha x^2)+(\beta-\beta x+\beta x^3)\in\mathbb{R}_3[x] \;\big|\; s,t\in\mathbb{R}\,\} = \\ &= \{\,\alpha(1+x^2)+\beta(1-x+x^3)\in\mathbb{R}_3[x] \;\big|\; s,t\in\mathbb{R}\,\} = \langle\, 1+x^2,\, 1-x+x^3\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Ya conocemos un sistema generador de
$S+T=\langle\, 1+x^2,\, 1-x+x^3,\, 1+x^2+x^3,\, 1-x-x^2,\, x+2x^2+x^3 \,\rangle$. Eliminamos los vectores linealmente dependientes para obtener la base. Para ello, trabajamos en coordenadas con respecto a la base $B=\{\,1,\, x,\, x^2,\, x^3\,\}$.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-F_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_4\to F_4-F_2 \\ F_5\to F_5+F_2}}{=}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3\leftrightarrow F_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_5\to F_5+F_3}{=}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_5\to F_5-F_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Deducimos que una base de $S+T$ es $\{\,1+x^2,\, 1-x+x^3,\, 1-x-x^2,\, 1+x^2+x^3\,\}$.

Pág. 33

1) a) Resolvemos el sistema: $(2,-4) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 = \alpha\,, \\ -4 = \beta\,. \end{cases}$ Entonces, $v = [2,-4]_B$.

b) Resolvemos el sistema: $(2,-4) = \alpha(1,1) + \beta(0,2) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 = \alpha \\ -4 = \alpha + 2\beta \end{cases} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\,, \\ \beta = 3\,. \end{cases}$ Entonces, $v = [2,-3]_{B'}$.

2) a) Resolvemos el sistema: $6x^2 - 2x + 3 = \alpha\cdot 1 + \beta\, x + \gamma\, x^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3 = \alpha\,, \\ -2 = \beta\,, \\ 6 = \gamma\,. \end{cases}$ Entonces, $p(x) = [3,-2,6]_B$.

b) Resolvemos el sistema: $6x^2 - 2x + 3 = \alpha\, x^2 + \beta\,(x+1) + \gamma\cdot(-5) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 6 = \alpha \\ -2 = \beta \\ 3 = \beta - 5\gamma \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6\,, \\ \beta = -2\,, \\ \gamma = -1\,. \end{cases}$ Entonces, $p(x) = [6,-2,-1]_{B'}$.

Pág. 34

1) Calculamos las coordenadas de los vectores de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$, la base $B = \{\,1,\ x,\ x^2\,\}$:

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 1 = [1,2,3]_B\,, \qquad q(x) \qquad = 4x^2 + 3x + 2 = [2,3,4]_B\,,$$
$$r(x) = 6x^2 + 4x + 3 = [3,4,6]_B\,.$$

Como $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 =$ nº de vectores de T, deducimos que los vectores de T son linealmente independientes.

2) Como $S \subset T$ y T es linealmente independiente, S también es linealmente independiente.

Pág. 37

1) **a)** Como B es la base canónica, las coordenadas de los vectores de B' con respecto a la base B son:

$$(1,1,0) = [1,1,0]_B, \qquad (0,1,1) = [0,1,1]_B \qquad \text{y} \qquad (0,1,0) = [0,1,0]_B\,,$$

y entonces $P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Como $v_B^T = P_{B\leftarrow B'}\ v_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $v = [1, -1, 0]_B$.

2) a) Como B es la base estándar, las coordenadas de los vectores de B' con respecto a la base B son:

$$x^2 - 2x + 1 = [1, -2, 1]_B, \qquad 2x - 2 = [-2, 2, 0]_B \qquad \text{y} \qquad 2 = [2, 0, 0]_B\,,$$

y entonces $P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculamos la inversa de $P_{B\leftarrow B'}$ para obtener $P_{B'\leftarrow B}$:

$$(P_{B\leftarrow B'} \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2+2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1\to F_1-F_3 \\ F_2\to F_2-2F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \to -F_2/2 \\ F_3 \to F_3/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) =$$

$= (I_3 \mid P_{B' \leftarrow B})$.

Entonces, $v_{B'}^T = P_{B' \leftarrow B}\, v_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ y por lo tanto, $p(x) = [-2, -1, \frac{1}{2}]_{B'}$.

Tema 9. Aplicaciones lineales

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Aplicación lineal

Aplicación

- Si A y B son dos conjuntos, llamamos **aplicación** de A en B (denotado por $f: A \longrightarrow B$) a una *ley* o *regla* que asigna a cada elemento $x \in A$ un *único* elemento de B, denotado por $f(x) \in B$.

- Decimos que A es el conjunto **origen** y B es el conjunto de **llegada** o **destino**.

- Llamamos **imagen** de $x \in A$ al valor $f(x) \in B$ y **antiimagen** de $f(x) \in B$ al valor $x \in A$.

- **Ejemplo.**

  1) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $f(n) = -n$

  2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

Aplicación lineal

- Si V y W son dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, decimos que $f\colon V \longrightarrow W$ es una **aplicación lineal** (o homomorfismo) si

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

para todo $u, v \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O equivalentemente, si

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) & \text{para todo } u, v \in V\,, \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) & \text{para todo } u \in V \text{ y para todo } \lambda \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

- Si $V = W$ decimos que la aplicación lineal es un **endomorfismo**.

Aplicación lineal

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son lineales.

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x - y,\ z + x)$

2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (y,\ x^2)$

3) $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ con $f(p(x)) = p'(x)$

4) $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2$ con $f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b & 2 \\ -c & a + b \end{pmatrix}$

(Solución)

Aplicación lineal

- **Proposición.** Si $f: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se cumple:

  1) $f(0) = 0$

  2) $f(-v) = -f(v)$ para todo $v \in V$

  3) $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_k f(u_k)$ para todo $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$ y para todo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

- **Ejemplo.** Determina si la siguiente aplicación es lineal.

  1) $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ con $f(p(x)) = p(x) + 2$ para todo $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

  (Solución)

Núcleo e imagen

Núcleo e imagen

- Si $f\colon V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se define:
  - El **núcleo** de f como
$$\ker(f) = \{\, v \in V \;\big|\; f(v) = 0 \,\}\,.$$
  - La **imagen** de f como
$$\mathrm{Im}\,(f) = \{\, f(v) \in W \;\big|\; v \in V \,\}\,.$$

Núcleo e imagen

- **Proposición.** Si $f\colon V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces

1) $\ker(f)$ es un subespacio vectorial de V.

2) $\mathrm{Im}\,(f)$ es un subespacio vectorial de W y el **rango** de f es $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$.

3) Si $\{\, u_1, u_2, \ldots, u_k \,\}$ es un sistema generador de V, entonces $\{\, f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k) \,\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}\,(f)$ (que puede ser distinto de W).

4) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, se cumple

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(V)\,.$$

Núcleo e imagen

- **Ejemplo.** Calcula el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales.

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x - y, z)$.

2) $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ con $f(p(x)) = p'(x)$.

3) $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ con $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d)x^3 + (b - 2c)x^2 + cx + a$.

(Solución)

Aplicaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

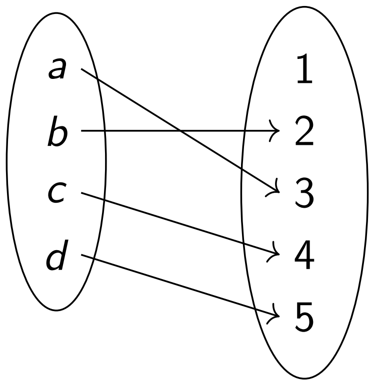
Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

- Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** si para $x, y \in \mathrm{Dom}\,(f)$ con

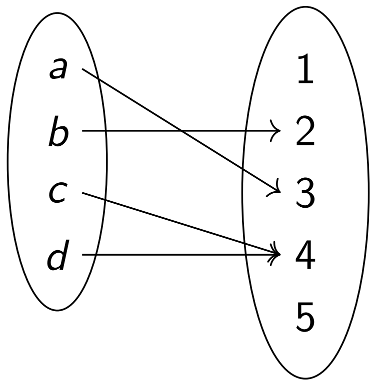
$$f(x) = f(y), \qquad \text{entonces } x = y\,.$$

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son inyectivas.

1) $f : \quad A \longrightarrow B$



2) $g : \quad A \longrightarrow B$



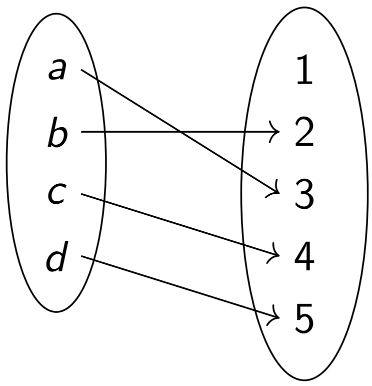
(Solución)

Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

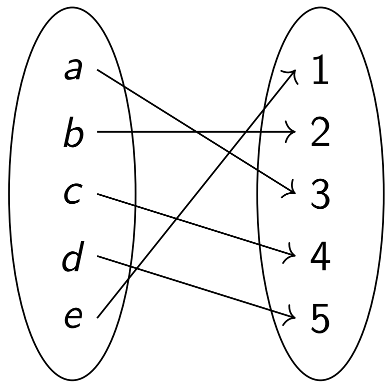
- Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si para todo $y \in B$ existe $x \in A$ con $f(x) = y$, es decir, si
$$\mathrm{Im}\,(f) = B\,.$$

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son sobreyectivas.

1) $f : \quad A \longrightarrow B$



2) $g : \quad A \longrightarrow B$



(Solución)

Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

- Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ con $f(x) = x^2$

3) $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

4) $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ con $f(x) = x^2$

(Solución)

Aplicación inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

- **Caracterización.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,
  - f es inyectiva si y solo si $\ker(f) = \{ 0 \}$.
  - f es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{Im}\,(f) = W$.

- **Proposición.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,
  - f es inyectiva si y solo si $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(V)$.
  - f es sobreyectiva si y solo si $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(W)$.

Matriz asociada a una aplicación lineal

Matriz asociada a una aplicación lineal

- Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sean

$$B = \{\, u_1,\ u_2, \dots, u_n \,\} \quad \text{y} \quad B' = \{\, w_1,\ w_2, \dots, w_m \,\}$$

  bases de V y de W respectivamente.

- Podemos escribir

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= \lambda_1^1 w_1 + \lambda_2^1 w_2 + \cdots + \lambda_m^1 w_m = [\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_m^1]_{B'}\ ,\\
f(u_2) &= \lambda_1^2 w_1 + \lambda_2^2 w_2 + \cdots + \lambda_m^2 w_m = [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_m^2]_{B'}\ ,\\
&\ \vdots\\
f(u_n) &= \lambda_1^n w_1 + \lambda_2^n w_2 + \cdots + \lambda_m^n w_m = [\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_m^n]_{B'}\ .
\end{aligned}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal

- La **matriz asociada a f respecto de las bases B y B'** es

$$M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m^1 & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}\,.$$

- En la columna j están las coordenadas del vector $f(u_j)$ con respecto a la base B' (para $j = 1, 2, \dots, n$).

Matriz asociada a una aplicación lineal

- Si $v \in V$ es un vector con coordenadas $v = [\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n]_B$ y $f(v) = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]_{B'}$, entonces se cumple

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = M_{B' \leftarrow B}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

o equivalentemente,

$$(f(v))_{B'}^T = M_{B' \leftarrow B}(f)\ v_B^T .$$

Matriz asociada a una aplicación lineal

- Si $f: V \longrightarrow V$ es la identidad, es decir,

$$f(v) = v \qquad \text{para todo } v \in V\,,$$

y B y B' son dos bases de V, entonces

$$M_{B' \leftarrow B}(f) = P_{B' \leftarrow B}\,.$$

Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Ejemplo.** Calcula la matriz asociada de las siguientes aplicaciones lineales respecto a las bases indicadas.

  1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, -z)$

  $B = \{\, (1, 0, 0), \ (0, 1, 0), \ (0, 0, 1) \,\}$ y

  $B' = \{\, (1, 0), \ (0, 1) \,\}$

  2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a, b, c) = (a + b)x^2 + a + b + c$

  $B = \{\, (1, 0, 0), \ (1, 1, 0), \ (1, 1, 1) \,\}$ y

  $B' = \{\, 1, \ x, \ x^2 \,\}$

  (Solución)

Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Ejemplo.**

1) Obtén una base del núcleo y de la imagen de $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ sabiendo que la matriz asociada a f con respecto a las bases

$$B = \{ (1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,2,0),\ (0,0,0,1) \} \quad \text{y}$$
$$B' = \{ 1,\ x,\ x^2 \}$$

es

$$M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Solución)

Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Proposición.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sea M la matriz asociada a f. Entonces,

  1) f es inyectiva si y solo si $\text{rg}\,(M) = \dim(V)$.

  2) f es sobreyectiva si y solo si $\text{rg}\,(M) = \dim(W)$.

- **Corolario.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,

  1) Si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces f no es inyectiva.

  2) Si $\dim(W) > \dim(V)$, entonces f no es sobreyectiva.

Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones lineales son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ dada por $f(x, y, z) = (x,\ x + y,\ x - 2y,\ 3z\ , 2x + z)$

2) $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a\,x^2 + b\,x + c) = c\,x^2 + a\,x + b$

(Solución)

Soluciones

Pág. 5

1) f es una aplicación lineal porque

- Si $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. ¿$f((x, y, z) + (a, b, c)) = f(x, y, z) + f(a, b, c)$?. Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f((x,y,z)+(a,b,c)) = f(x+a, y+b, z+c) = \\ = (x+a-y-b, z+c+x+a) \\ f(x,y,z)+f(a,b,c) = (x-y, z+x)+(a-b,\ c+a) = \\ = (x+a-y-b, z+c+x+a) \end{array}\right\} \boxed{=}$$

- Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿$f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z)$? Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z) = (\lambda x - \lambda y,\ \lambda z + \lambda x) \\ \lambda f(x,y,z) = \lambda(x-y,\ z+x) = (\lambda x - \lambda y,\ \lambda z + \lambda x) \end{array}\right\} \boxed{=}$$

2) No es una aplicación lineal porque $f(2(1, 0)) = f(2, 0) = (0, 4)$ pero $2f(1, 0) =$ $= 2(0, 1) = (0, 2) \neq (0, 4)$.

3) f es una aplicación lineal porque

- Si $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in \mathbb{R}_2[x]$. ¿$f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$? Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f(p(x)+q(x)) = f((a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) = \\ = 2(a_1+a_2)x+(b_1+b_2) \\ f(p(x))+f(q(x)) = 2a_1x+b_1+2a_2x+b_2 \end{array}\right\} \boxed{=}$$

- Si $ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. ¿$f(\lambda(ax^2+bx+c))=\lambda f(ax^2+bx+c)$? Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda(ax^2+bx+c))=f(\lambda ax^2+\lambda bx+\lambda cz)=2\lambda ax+\lambda b \\ \lambda f(ax^2+bx+c)=\lambda(2ax+b) \end{array}\right\} \boxed{=}$$

4) No es una aplicación lineal porque $f(0+0x+0x^2)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pág. 6 No es una aplicación lineal porque $f(0)=0+2\neq 0$.

Pág. 10

1)
- $\ker(f)=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0)\,\}=$
$=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-y,z)=(0,0)\,\}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0,\ z=0\,\}$.
Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{r} x-y=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow$ SCI: $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\,, \\ y=\lambda\,, \\ z=0\,, \end{array}\right.$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \ker(f)&=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=0\ \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}\,\}= \\ &=\{\,(\lambda,\lambda,0) \mid \lambda\in\mathbb{R}\,\}=\{\,\lambda\,(1,1,0) \mid \lambda\in\mathbb{R}\,\}=\langle\,(1,1,0)\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Como el núcleo está generado por un único vector, es linealmente independiente y por lo tanto, una base del núcleo es $\{\,(1,1,0)\,\}$ y $\dim(\ker(f))=1$.

- Como $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$,

$$\text{Im}\,(f) = \langle\, f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)\,\rangle = \langle\,(1,0),\ (-1,0),\ (0,1)\,\rangle\,.$$

Además, como $(-1,0) = -1(1,0)$:

$$\text{Im}\,(f) = \langle\,(1,0),\ (-1,0), (0,1)\,\rangle = \langle\,(1,0),\ (0,1)\,\rangle = \mathbb{R}^2\,,$$

y una base de $\text{Im}\,(f)$ es $\{(1,0),\ (0,1)\}$ y $\dim(\text{Im}\,(f)) = 2$.

2)

- $\ker(f) = \{\, p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;\big|\; f(p(x)) = 0\,\} = \{\, ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \;\big|\; 2ax + b = 0\,\}$.

Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{r} 2a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\;$ SCI: $\left\{\begin{array}{l} a = 0\,, \\ b = 0\,, \\ c = \lambda\,, \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{\, ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \;\big|\; a = 0,\ b = 0,\ c = \lambda \ \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \\ &= \{\,\lambda \;\big|\; \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \langle\, 1\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Como el núcleo está generado por un único vector, es linealmente independiente y por lo tanto, una base del núcleo es $\{\,1\,\}$ y $\dim(\ker(f)) = 1$.

- Como $\{\,1,\ x,\ x^2\,\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$,

$$\text{Im}\,(f) = \langle\, f(1),\ f(x),\ f(x^2)\,\rangle = \langle\, 0,\ 1,\ 2x\,\rangle = \langle\, 1,\ 2x\,\rangle = \mathbb{R}_1[x]\,,$$

y una base de $\text{Im}\,(f)$ es $\{\,1,\ 2x\,\}$ y $\dim(\text{Im}\,(f)) = 2$.

3) $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ con $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)x^3 + (b-2c)x^2 + cx + a.$

- $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \right\} =$
  $= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; a + cx + (b-2c)x^2 + (a+d)x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \right\}.$

  Resolvemos el sistema $\left\{ \begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \\ a + d &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$ SCD: $a = b = c = d = 0$. Entonces,

  $$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; a = b = c = d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Como el núcleo está generado por el vector nulo, no es linealmente independiente y por lo tanto el núcleo no tiene base y $\dim(\ker(f)) = 0$.

- Como $4 = \dim(\mathcal{M}_2) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}\,(f))$, deducimos que $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 4$ y como $\mathrm{Im}\,(f)$ es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ que también tiene dimensión 4, deducimos que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_3[x]$ y una base es $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Pág. 12

1) Es inyectiva.

2) No es inyectiva porque $f(c) = 4 = f(d)$.

Pág. 13

1) No es sobreyectiva porque no hay elementos del dominio cuya imagen sea a.

2) Es sobreyectiva.

Pág. 14

1)
- No es inyectiva porque $f(2) = f(-2) = 4$.
- No es sobreyectiva porque no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = -5$.
- No es biyectiva porque no es inyectiva/sobreyectiva.

2)
- No es inyectiva porque $f(2) = f(-2) = 4$.
- Es sobreyectiva porque si $y \in [0, \infty)$, existe $\sqrt{y} \in \text{Dom}\,(f)$ tal que $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.
- No es biyectiva porque no es inyectiva.

3)
- Es inyectiva porque si $f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x^2 = y^2$ y deducimos que $x = y$.
- No es sobreyectiva porque no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = -5$.
- No es biyectiva porque no es sobreyectiva.

4)
- Es inyectiva porque si $f(x) = f(y)$, es decir, si $x^2 = y^2$ deducimos que $x = y$.
- Es sobreyectiva porque si $y \in [0, \infty)$, existe $-\sqrt{y} \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tal que $f(\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$.
- Es biyectiva porque es inyectiva y sobreyectiva.

Pág. 21

1) Calculamos $f(1,0,0) = (1,0) = [1,0]_{B'}$, $f(0,1,0) = (1,0) = [1,0]_{B'}$ y $f(0,0,1) = (0,-1) = [0,-1]_{B'}$, y obtenemos $M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$.

2) Calculamos $f(1,0,0) = x^2 + 1 = [1,0,1]_{B'}$, $f(1,1,0) = 2x^2 + 2 = [2,0,2]_{B'}$ y $f(1,1,1) = 2x^2 + 3 = [3,0,2]_{B'}$, y obtenemos $\mathcal{M}_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$.

Pág. 22

- $\ker(f) = \{\, v \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; f(v) = 0 \,\} = \left\{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \;\Big|\; M_{B' \leftarrow B}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Resolvemos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ \qquad \alpha_2 + 2\alpha_3 + \ \alpha_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = s \\ \alpha_3 = t \\ \alpha_4 = -s - 2t \end{array} \right.$ con $s, t \in \mathbb{R}$. Entonces, el núcleo es

$$\ker(f) = \{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \mid \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = s,\ \alpha_3 = t,\ \alpha_4 = -s - 2t \text{ con } s, t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ [0, s, t, -s - 2t]_B \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle [0, 1, 0, -1]_B,\ [0, 0, 1, -2]_B \rangle .$$

Pasamos de coordenadas a vectores:

$$[0, 1, 0, -1]_B = 0(1, 0, 0, 0) + 1(1, 1, 0, 0) + 0(1, 1, 2, 0) - 1(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 0, -1)\,,$$
$$[0, 0, 1, -2]_B = 0(1, 0, 0, 0) + 0(1, 1, 0, 0) + 1(1, 1, 2, 0) - 2(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 2, -2)\,.$$

Por lo tanto, $\ker(f) = \langle\, (1,1,0,-1)\,, (1,1,2,-2)\,\rangle$ y como
$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$
los vectores son independientes y una base de $\ker(f)$ es $\{\, (1,1,0,-1)\,, (1,1,2,-2)\,\}$ y $\dim(\ker(f)) = 2$.

- Como B es base de $\mathbb{R}^4$, $\text{Im}\,(f) = \langle\, f(1,0,0,0),\ f(1,1,0,0),\ f(1,1,2,0),\ f(0,0,0,1)\,\rangle$. Usamos la fórmula $f(v)^T = M_{B\leftarrow B'}(f)v^T$ para calcular

$$[f(1,0,0,0)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[f(1,1,0,0)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f(1,1,2,0)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f(0,0,0,1)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, [1,1,0]_{B'},\ [2,0,1]_{B'},\ [4,0,2]_{B'},\ [2,0,1]_{B'}\,\rangle$. Además, como

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - 2F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

sabemos que $\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, [1,1,0]_{B'},\ [2,0,1]_{B'}\,\rangle$ y al pasar de coordenadas a vectores obtenemos:

$$[1,1,0]_{B'} = 1 + x \quad \text{y} \quad [2,0,1]_{B'} = 2 + x^2\,.$$

Entonces, una base de $\mathrm{Im}\,(f)$ es $\{\,1+x,\ 2+x^2\,\}$ y $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$.

Pág. 24

1) Si B y B' son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$ respectivamente, calculamos:

$$f(1,0,0) = (1,1,1,0,2) = [1,1,1,0,2]_{B'}\,,$$
$$f(0,1,0) = (0,1,-2,0,0) = [0,1,-2,0,0]_{B'}\,,$$
$$f(0,0,1) = (0,0,0,3,1) = [0,0,0,3,1]_{B'}\,.$$

Entonces $M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y como $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{=}$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_5}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 3F_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Al ser $\text{rg}\,(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, la aplicación es inyectiva pero no es sobreyectiva (ni biyectiva) ya que $\text{rg}\,(A) = 3 < 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$.

2) Si B es a base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$, calculamos:

$$f(1) = x^2 = [0,0,1]_B\,,\ f(x) = 1 = [1,0,0]_B\,,\ f(x^2) = x = [0,1,0]_B\,,$$

entonces $M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\text{rg}\,(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, la aplicación es inyectiva y sobreyectiva y, por lo tanto, también biyectiva.

Tema 10. Diagonalización. Autovalores y autovectores.

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Introducción

Introducción

- **Ejemplo.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,2,3) = (2,4,6)\,, \quad f(0,1,2) = (0,4,8) \quad \text{y} \quad f(0,-1,1) = (0,-5,5)\,.$$

Calcula $M_{B \leftarrow B}(f)$ siendo $B = \{\,(1,2,3),\,(0,1,2)\,,(0,-1,1)\,\}$.

(Solución)

Valores y vectores propios

Introducción

- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal con $A = M_{B\leftarrow B}(f)$ para cierta base B de V. Si $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, estudiaremos la ecuación
$$f(v) = \lambda v\,, \qquad \text{es decir,} \qquad Av^T = \lambda v^T\,.$$
- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene

  1) para $\lambda = 1$, $u = (1,1)$ es solución de $Au^T = \lambda u^T$.

  2) para $\lambda = 2$, $v = (2,1)$ es solución de $Av^T = \lambda v^T$.

  (Solución)

Valor propio

- Sea $f: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** o **autovalor** de f si existe $v \in V$ no nulo tal que $f(v) = \lambda v$.

- **Ejemplo.** Dada $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

  $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2y + z,\ 3z)$, se cumple:

  1) 2 es valor propio de f con $v = (2, 2, 0)$

  2) 3 es valor propio de f con $v = (1, 1, 1)$

  (Solución)

Valor propio

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz cuadrada, entonces

  1) La suma de los elementos de la diagonal de A coincide con la suma de todos sus valores propios.

  2) El determinante de A coincide con el producto de todos sus valores propios.

Vector propio

- Sean $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Decimos que $v \in V$ es un **vector propio** o **autovector** de f asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ si $f(v) = \lambda v$.

- El conjunto de todos los vectores propios asociados al mismo valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ se denota por

$$V_\lambda = \left\{ v \in V \;\middle|\; f(v) = \lambda v \right\}.$$

- **Ejemplo.** Dada $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

  $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2y + z,\ 3z)$, se cumple:

  1) $(2, 2, 0)$ es un vector propio asociado al valor propio 2

  2) $(1, 1, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio 3

  (Solución)

Valores y vectores propios

- **Proposición.** Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si A es la matriz asociada a f respecto una base de V, para $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica:

  1) $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$.

  2) V_λ es un subespacio vectorial de V llamado **subespacio propio de λ**.

  3) $\dim(V_\lambda) = n - \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n)$.

  4) Si $v \in V_\lambda$ y $u \in V_{\tilde{\lambda}}$, entonces u y v son linealmente independientes.

  5) λ es valor propio de f si y solo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Cálculo de los valores propios

- **Ejemplo.** Calcula los valores propios de la siguientes aplicaciones lineales.

  1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y) = (5x + 3y,\ 2y)$

  2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

$$B = M_{B_C \leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Solución)

Cálculo del subespacio propio

- **Ejemplo.** Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\, 2y + z,\, 3z)\,,$$

calcula el subespacio propio asociado a los valores propios

(a) $\lambda = 2$

(b) $\lambda = 3$

(Solución)

Polinomio característico

- Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.
- Si A es la matriz asociada a f con respecto a una base de V, sabemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de f si y solo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si consideramos λ como una incógnita, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ es un polinomio de grado n llamado **polinomio característico**.
- Las raíces de $p(\lambda)$ son los valores propios de f.

Multiplicidad algebraica y geométrica

- Sea $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si λ es un valor propio de f, entonces

  - la **multiplicidad algebraica** de λ ($m_a(\lambda)$) es la multiplicidad del valor λ como raíz del polinomio característico;
  - la **multiplicidad geométrica** de λ ($m_g(\lambda)$) es la dimensión del subespacio propio V_λ:
  $$m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n),$$
  siendo A la matriz asociada a f con respecto a una base de V.

- Si λ es un valor propio de f, entonces
$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

- **Ejemplo.** Calcula $m_a(\lambda)$ y $m_g(\lambda)$ de los valores propios indicados.

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x - 3y,\ y)$ y $\lambda = 1$

2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

$$A = M_{B_C \leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda = 3$$

(Solución)

Diagonalización

Diagonalización

- Decimos que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$ son **semejantes** si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n$ invertible tal que

$$A = PBP^{-1}\,.$$

- Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n$.

Aplicación diagonalizable

- Sea $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Decimos que f es **diagonalizable** si existe una base de V respecto a la cual, la matriz asociada a f es diagonal.

- **Proposición.** Sea $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces,

$$f \text{ es diagonalizable} \quad \text{si y solo si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{existe una base de } V \\ \text{formada por vectores} \\ \text{propios de } f\,. \end{array} \right.$$

Criterio de diagonalizabilidad

- **Teorema.** Sea $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios distintos de f, entonces

$$f \text{ es diagonalizable } \text{ si y solo si } \begin{cases} m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \cdots + m_a(\lambda_k) = n\,, \\ m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, k\,. \end{cases}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$ siendo
  - D una matriz diagonal cuyas entradas son los valores propios de A;
  - P es una matriz cuyas columnas son vectores propios de A.

Diagonalización

- **Teorema.** Sea $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si $A \in \mathcal{M}_n$ es la matriz asociada a f con respecto a una base de V, se cumple:

  1) Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

  2) Si $A \in \mathcal{M}_n$ es simétrica, entonces es diagonalizable.

Diagonalización

- **Estudio de la diagonalizabilidad de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$.**
  - Si A es simétrica, entonces es diagonalizable.

1º/ Calcular el polinomio característico $p(\lambda)$.

2º/ Calcular las raíces de $p(\lambda)$ y sus multiplicidades algebraicas.

- Si hay n raíces distintas, entonces A es diagonalizable.

3º/ Calcular las multiplicidades geométricas.

4º/ Comprobar que se cumple el criterio de diagonalizabilidad.

5º/ Si A es diagonalizable, calcular los subespacios propios.

6º/ Escribir la matriz de paso P en función de la matriz diagonal D elegida.

Diagonalización

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones lineales son diagonalizables y calcula, en su caso, una base respecto a la cual la matriz asociada es diagonal.

1) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $f(x, y, z, t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right]^T$

2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (3x + y + z,\ x + 3y + z,\ x + y + 3z)$

3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (x - y + 3z,\ 2y + z,\ 2z)$
(Solución)

- **Ejemplo.** Calcula A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. *(Solución)*

Soluciones

Pág. 3

Calculamos las coordenadas:

$$\begin{aligned}
f(1,2,3) &= (2,4,6) = 2(1,2,3) + 0(0,1,2) + 0(0,-1,1) = [2,0,0]_B \\
f(0,1,2) &= (0,4,8) = 0(1,2,3) + 4(0,1,2) + 0(0,-1,1) = [0,4,0]_B \\
f(0,-1,1) &= (0,-5,5) = 0(1,2,3) + 0(0,1,2) + 5(0,-1,1) = [0,0,5]_B
\end{aligned}$$

y obtenemos la matriz $M_{B\leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Pág. 5

1) Cierto porque $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Cierto porque $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pág. 6

1) Cierto porque $f(2,2,0) = (4,4,0) = 2(2,2,0)$.

2) Cierto porque $f(1,1,1) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$.

Pág. 8

1) Cierto porque $f(2,2,0) = (4,4,0) = 2(2,2,0)$.

2) Cierto porque $f(1,1,1) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$.

Pág. 10

1) Como $f(1,0) = (5,0) = [5,0]_{B_c}$ y $f(0,1) = (3,2) = [3,2]_{B_c}$, deducimos que $A = M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)$. Por lo tanto, los valores propios de f son 5 y 2.

2) Como $\det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$, deducimos que f tiene dos valores propios: 2 y 3.

Pág. 11

Como $f(1,0,0) = (1,0,0) = [1,0,0]_{B_c}$, $f(0,1,0) = (1,2,0) = [1,2,0]_{B_c}$ y $f(0,0,1) = (1,1,3) = [1,1,3]_{B_c}$, deducimos que $A = M_{B_C \leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Como

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 2I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI: $\left\{ \begin{array}{l} x = \beta\,, \\ y = \beta\,, \\ z = 0\,, \end{array} \right.$

con $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces, $V_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \beta,\ y = \beta,\ z = 0 \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \} =$
$= \{ (\beta, \beta, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1,0) \rangle$.

(b) Como

$$V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 3I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$

SCI: $x = y = z = \beta$ con $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces,
$V_3 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \beta \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \} = \{ (\beta, \beta, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R} \} =$
$= \langle (1,1,1) \rangle$.

Pág. 14

1) Como $f(1,0) = (1,0) = [1,0]_{B_c}$ y $f(0,1) = (-3,1) = [-3,1]_{B_c}$, entonces $A = M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$ y deducimos que $m_a(1) = 2$.

Además, $m_g(1) = 2 - \mathrm{rg}\,(A - 1I_2) = 2 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$.

2) Calculamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-2-\lambda)^2(3-\lambda)$ y deducimos que $m_a(3) = 1$.

Además, utilizamos la desigualdad $1 \leq m_g(3) \leq m_a(3) = 1$ para deducir que $m_g(3) = 1$.

Pág. 21

1) Calculamos $p(\lambda) = \det\,(M_{B_c \leftarrow B_c}(f) - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-1-\lambda)(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2+3\right] = (-1-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+4)$. Como $\lambda^2-2\lambda+4$ es un polinomio sin raíces reales, los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$ con $m_a(-1) = m_a(1) = 1$. Como $m_a(-1) + m_a(1) = 1+1 = 2 \neq 4$, la aplicación no es diagonalizable.

2) Calculamos $f(1,0,0) = (3,1,1) = [3,1,1]_{B_c}$, $f(0,1,0) = (1,3,1) = [1,3,1]_{B_c}$ y $f(0,0,1) = (1,1,3) = [1,1,3]_{B_c}$, entonces, $A = M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= -(\lambda-2)^2(\lambda-5)$ y deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$ con $m_a(2) = 2$ y $m_a(5) = 1$.

Calculamos las multiplicidades geométricas:

$m_g(5) = 1$ porque $1 \leq m_g(5) \leq m_a(5) = 1$ y

$m_g(2) = 3 - \text{rg}\,(A - 2I_3) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$

Como se cumple el criterio de diagonalizabilidad: $\left\{ \begin{array}{l} 3 = m_a(2) + m_a(5) = 2+1 \checkmark \\ m_a(2) = 2 = m_g(2) \checkmark \\ m_a(5) = 1 = m_g(5) \checkmark \end{array} \right.$

deducimos que f es diagonalizable.

Para obtener la base que pide el enunciado, necesitamos los subespacios propios. Calculamos

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A-2I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI con solución:

$\left\{ \begin{array}{l} x = -\alpha - \beta\,, \\ y = \alpha\,, \\ z = \beta\,, \end{array} \right.$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$V_2 = \{ (-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \{ (-\alpha, \alpha, 0) + (-\beta, 0, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} =$
$= \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$,

y como esos dos vectores son linealmente independientes porque

$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, una base de V_2 es $\{ (-1,1,0), (-1,0,1) \}$.

Además,

$$V_5 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A-5I_3)X=0$, es decir, $\left\{\begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow$ SCI con solución: $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha\,, \\ y=\alpha\,, \\ z=\alpha\,, \end{array}\right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$V_5 = \{\, (\alpha,\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \langle\, (1,1,1) \,\rangle$, y como V_5 está generado por un único vector no nulo, una base de V_5 es $\{\, (1,1,1) \,\}$.

Acabamos deduciendo que, si $B = \{\, (-1,1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,1) \,\}$, entonces $M_{B\leftarrow B}(f)$ es diagonal.

3) Calculamos $f(1,0,0)=(1,0,0)=[1,0,0]_{B_c}$, $f(0,1,0)=(-1,2,0)=[-1,2,0]_{B_c}$ y $f(0,0,1)=(3,1,2)=[3,1,2]_{B_c}$, entonces $A = M_{B_C\leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $p(\lambda)=\det(A-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$

$=(1-\lambda)(2-\lambda)^2$ y deducimos que los valores propios son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=2$ con $m_a(1)=1$ y $m_a(2)=2$.

Calculamos las multiplicidades geométricas:
$m_g(1) = 1$ porque $1 \leq m_g(1) \leq m_a(1) = 1$ y

$$m_g(2) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Como no se cumple el criterio de diagonalizablidad (porque $m_a(2) = 2 \neq 1 = m_g(2)$, deducimos que f no es diagonalizable.

Pág. 21

Comprobamos primero si A es diagonalizable. Como el polinomio característico es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$, deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$. Al ser $A \in \mathcal{M}_3$ y tener 3 valores propios distintos, A es diagonalizable con $A = PDP^{-1}$ siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calculamos la matriz de paso $P \in \mathcal{M}_3$:

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - I_3)X = 0$, es decir, $\left\{\begin{array}{r} y + z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ SCI con solución:
$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha\,, \\ y = 0\,, \\ z = 0\,, \end{array}\right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, $V_1 = \{\,(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R}\,\} = \langle\,(1, 0, 0)\,\rangle$, y como V_1 está generado por un único vector no nulo, una base de V_1 es $\{\,(1, 0, 0)\,\}$.

$$V_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 3I_3)X = 0$, es decir, $\left\{\begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ 3z = 0 \\ 2z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ SCI con solución:
$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha\,, \\ y = 2\alpha\,, \\ z = 0\,, \end{array}\right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, $V_3 = \{\,(\alpha, 2\alpha, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R}\,\} = \langle\,(1, 2, 0)\,\rangle$, y como V_3 está generado por un único vector no nulo, una base de V_3 es $\{\,(1, 2, 0)\,\}$.

$$V_5=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (A-5I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

resolvemos el sistema $(A-5I_3)X=0$, es decir, $\left\{\begin{aligned}-4x+y+z&=0\\-2y+3z&=0\\0&=0\end{aligned}\right.$ $\Rightarrow$ SCI con solución:

$\left\{\begin{array}{l}x=5\alpha\,,\\y=12\alpha\,,\\z=8\alpha\,,\end{array}\right.$ con $\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces,

$V_5=\{\,(5\alpha,12\alpha,8\alpha)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha\in\mathbb{R}\,\}=\langle\,(5,12,8)\,\rangle$, y como V_5 está generado por un único vector no nulo, una base de V_5 es $\{\,(5,12,8)\,\}$.

Concluimos que $P=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&12\\0&0&8\end{pmatrix}$ y calculamos P^{-1}:

$$\left(P\,\middle|\,I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&5&1&0&0\\0&2&12&0&1&0\\0&0&8&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2/12\\F_3\to F_3/8}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&5&1&0&0\\0&1&6&0&1/2&0\\0&0&1&0&0&1/8\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2-6F_3\\F_1\to F_1-5F_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-5/8\\0&1&0&0&1/2&-3/4\\0&0&1&0&0&1/8\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1/2&-5/8\\0&1&0&0&1/2&-3/4\\0&0&1&0&0&1/8\end{array}\right)=\left(I_3\,\middle|\,P^{-1}\right).$$

Entonces, $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD \cdot D \cdots DP^{-1} = PD^n P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/8 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Tema 11. Espacios euclídeos

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

Producto escalar

Producto escalar

- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Decimos que la aplicación $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un **producto escalar** si verifica:

  1) $u \cdot v = v \cdot u$ para todo $u, v \in V$ (simetría).

  2) $u \cdot u > 0$ para todo $u \in V$ con $u \neq 0$ (positividad).

  3) $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w)$ para todo $u, v, w \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bilinealidad).

- En particular, $u \cdot 0 = 0$ para todo $u \in V$.

Espacio euclídeo

- Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar.

- **Ejemplos.**

  1) $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = xa + yb + zc$
  (Producto escalar estándar sobre $\mathbb{R}^3$)

  2) $\cdot : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
  $(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$
  (Producto escalar estándar sobre $\mathbb{R}_2[x]$)

  (Solución)

Matriz de Gram

Matriz de Gram

- Sea $B = \{\, e_1,\ e_2, \ldots, e_n \,\}$ una base de un espacio euclídeo V. Llamamos **matriz de Gram** con respecto a la base B a

$$G_B = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \ldots & e_1 \cdot e_n \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \ldots & e_2 \cdot e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n \cdot e_1 & e_n \cdot e_2 & \ldots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n \,.$$

- La matriz de Gram siempre es simétrica y definida positiva.
- Una matriz $G \in \mathcal{M}_n$ simétrica es definida positiva si

$$\det(G_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{con} \quad G_i = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{22} & \cdots & g_{1i} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i1} & g_{22} & \cdots & g_{ii} \end{pmatrix} \,.$$

Matriz de Gram

- **Ejemplo.** Calcula la matriz de Gram de:

  1) el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica
  $B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

  2) el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base
  $B' = \{ (2,3,1), (0,1,1), (0,0,2) \}$

  (Solución)

Coordenadas y matriz de Gram

- Sea V un espacio euclídeo y G_B la matriz de Gram del producto escalar con respecto a una base B de V. Si $u, v \in V$ tienen como coordenadas $u = [\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_B$ y $v = [\beta_1,\, \beta_2, \ldots, \beta_n]_B$, entonces,

$$u \cdot v = (\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\ G_B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

- **Ejemplo.**

  1) Si $B = \{\, (0,1),\, (2,1)\,\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $G_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula $u \cdot v$ con $u = [1,1]_B$ y $v = [0,1]_B$.

  (Solución)

Norma de un vector

Norma de un vector

- Sea V un espacio euclídeo. Se define la **norma** de $u \in V$ como
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}\,.$$
- Decimos que $u \in V$ es **unitario** si $\|u\| = 1$.
- **Ejemplo.** Calcula:

  1) $\|v\|$ si $v = (1, 1, 1)$ con el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$

  2) $\|p(x)\|$ si $p(x) = x + 2$ con el producto escalar $\cdot : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $(a_0 + a_1 x) \cdot (b_0 + b_1 x) = a_0 b_0 + 2a_1 b_1$

  (Solución)

Norma de un vector

- **Propiedades.** Sea V un espacio euclídeo. Se cumple:

  1) $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$.

  2) $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.

  3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.

  4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$ (Desigualdad triangular).

  5) $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ para todo $u, v \in V$ (Desigualdad de Cauchy–Schwarz).

Distancia y ángulo

- Sean V un espacio euclídeo y $u, v \in V$. Se define
  - la **distancia** entre u y v como
  $$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)};$$
  - el **ángulo** entre u y v al único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que
  $$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$
- **Ejemplo.** Calcula el ángulo formado por los vectores $u = (1, 1)$ y $v = (1, 0)$ con los siguientes productos escalares:

1) Producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$

2) $\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \cdot (a, b) = 3ax + yb$

(Solución)

Bases ortogonales y ortonormales

Vectores ortogonales

- Sea V un espacio euclídeo. Decimos que $u, v \in V$ son **ortogonales** si $u \cdot v = 0$. Se denota por $u \perp v$.

- **Ejemplo.** Comprueba si los siguientes vectores son ortogonales.

  1) $u = (2, -1)$ y $v = (1, -2)$ con el producto estándar

  2) $u = (2, -1)$ y $v = (1, -2)$ con el producto escalar definido por
  $$G_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  (Solución)

Base ortogonal

- Sea V un espacio euclídeo. Decimos que $B = \{\, e_1,\ e_2, \dots, e_n \,\}$ es una **base ortogonal** de V si

$$e_i \perp e_j \qquad \text{para todo } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ con } i \neq j\,.$$

- **Ejemplo.**

1) La base $B = \{\, (1,0,0),\ (0,-1,0),\ (0,0,2) \,\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar

2) La base $B = \{\, 1,\ 2x,\ 3x^2 \,\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar $\cdot : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$

(Solución)

Base ortonormal

- Sea V un espacio euclídeo. Decimos que $B = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ es una **base ortonormal** de V si

  1) B es una base ortogonal;

  2) $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Si $B = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ es una base ortogonal, entonces

$$B' = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$$

es una base ortonormal.

Vector ortogonal a un subespacio vectorial

- Sea V un espacio euclídeo y sea W un subespacio vectorial de V. Decimos que $u \in V$ es **ortogonal** a W ($u \perp W$) si es ortogonal a todo elemento de W.

- Basta probar que $u \in V$ es ortogonal a todos los elementos de un sistema generador de W.

- **Ejemplo.**

  1) El vector $u = (5, 1, -2)$ es ortogonal al subespacio $W = \langle\, (1, -1, 2),\ (0, 2, 1) \,\rangle$ con el producto escalar estándar

  (Solución)

Proyección ortogonal

- Sea V un espacio euclídeo y W un subespacio vectorial de V. Si $\{ c_1, c_2, \dots, c_k \}$ es una base *ortonormal* de W, se define la **proyección ortogonal** de $u \in V$ sobre W como

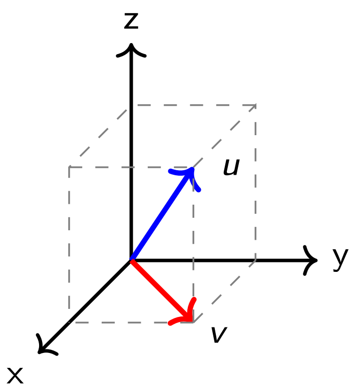
$$Pr\big|_W(u) = (u \cdot c_1)c_1 + (u \cdot c_2)c_2 + \cdots + (u \cdot c_k)c_k \in W \, .$$

- El vector $z = u - Pr\big|_W(u)$ es ortogonal a W: $z \perp W$.

Proyección ortogonal

- **Ejemplo.**

  1) En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar, consideramos el subespacio vectorial $W = \langle\, (1,0,0),\ (0,1,0)\, \rangle$.



$$v = Pr\big|_W(u)$$

El vector v es la proyección ortogonal de $u \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano horizontal $z = 0$ (sobre W)

Método de ortonormalización de Gram–Schmidt

- Si V es un espacio euclídeo y W es un subespacio vectorial de V, el **método de ortonormalización de Gram–Schmidt** permite pasar de una base cualquiera $B = \{ w_1, w_2, \ldots, w_k \}$ de W a una base *ortonormal* $B' = \{ c_1, c_2, \ldots, c_k \}$.

1. Cálculo de $c_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$.
2. Cálculo de $c_2 = \dfrac{z_2}{\|z_2\|}$ con $z_2 = w_2 - Pr\big|_{\langle c_1 \rangle}(w_2) = w_2 - (w_2 \cdot c_1)c_1$.
3. Cálculo de $c_3 = \dfrac{z_3}{\|z_3\|}$ con

   $$z_3 = w_3 - Pr\big|_{\langle c_1, c_2 \rangle}(w_3) = w_3 - \Big[(w_3 \cdot c_1)c_1 + (w_3 \cdot c_2)c_2\Big].$$
4. Se continua de igual modo hasta calcular el último vector c_k.

- **Ejemplos.**

1) Sea $B = \{ (3,4,0), (1,0,0), (3,0,-4) \}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula, a partir de esta, una base ortonormal con el método de ortonormalización de Gram-Schmidt

2) Sea $B = \{ (1,1,-1,0), (1,-1,1,0), (-1,1,1,0) \}$ una base de W. Calcula, a partir de esta, una base ortonormal con el método de ortonormalización de Gram-Schmidt

(Solución)

Soluciones

Pág. 4

1) Es un producto escalar porque si $(x, y, z), (a, b, c), (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = ax + yb + zc = ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z)$.
- $(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 > 0$ si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
- $(\alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c)) \cdot (r, s, t) = (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c) \cdot (r, s, t) =$
  $= \alpha(xr + ys + zt) + \beta(ar + bs + ct) = \alpha((x, y, z) \cdot (r, s, t)) + \beta((a, b, c) \cdot (r, s, t))$.

2) Es un producto escalar porque si $a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2, c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 =$
  $= b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 = (b_0 + b_1x + b_2x^2) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2)$.
- $(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 > 0$ si $a_0 + a_1x + a_2x^2 \neq 0$.
- $(\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \beta(b_0 + b_1x + b_2x^2)) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2) =$
  $= (\alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)x^2) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2) =$
  $= \alpha(a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2) + \beta(b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2) =$
  $= \alpha((a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2)) + \beta((b_0 + b_1x + b_2x^2) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2))$.

Pág. 7

1) Calculamos

$$G_B = \begin{pmatrix} (1,0,0)\cdot(1,0,0) & (1,0,0)\cdot(0,1,0) & (1,0,0)\cdot(0,0,1) \\ (0,1,0)\cdot(1,0,0) & (0,1,0)\cdot(0,1,0) & (0,1,0)\cdot(0,0,1) \\ (0,0,1)\cdot(1,0,0) & (0,0,1)\cdot(0,1,0) & (0,0,1)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Calculamos

$$G_{B'} = \begin{pmatrix} (2,3,1)\cdot(2,3,1) & (2,3,1)\cdot(0,1,1) & (2,3,1)\cdot(0,0,2) \\ (0,1,1)\cdot(2,3,1) & (0,1,1)\cdot(0,1,1) & (0,1,1)\cdot(0,0,2) \\ (0,0,2)\cdot(2,3,1) & (0,0,2)\cdot(0,0,2) & (0,0,2)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pág. 8

1) $u \cdot v = (1,1)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$

Pág. 10

1) $\|(1,1,1)\| = \sqrt{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$

2) $\|p(x)\| = \sqrt{(x+2)\cdot(x+2)} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}.$

Pág. 12

1) $\cos\alpha = \dfrac{(1,1)\cdot(1,0)}{\|(1,1)\|\|(1,0)\|} = \dfrac{1+0}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}.$

2) $\cos\alpha = \dfrac{(1,1)\cdot(1,0)}{\|(1,1)\|\|(1,0)\|} = \dfrac{3+0}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+0}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}.$

Pág. 14

1) No son ortogonales porque $(2,-1)\cdot(1,-2) = 4 \neq 0$.

2) Son ortogonales porque $u \cdot v = (2,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$.

Pág. 15

1) Cierto porque $(1,0,0)\cdot(0,-1,0) = 0$, $(1,0,0)\cdot(0,0,2) = 0$ y $(0,-1,0)\cdot(0,0,2) = 0$.

2) Cierto porque $1\cdot 2x = 0$, $1\cdot 3x^2 = 0$ y $2x\cdot 3x^2 = 0$.

Pág. 17

1) Cierto porque $(5,1,-2)\cdot(1,-1,2) = 5-1-4 = 0$ y $(5,1,-2)\cdot(0,2,1) = 2-2 = 0$.

Pág. 21

1) Si denotamos $w_1 = (3,4,0)$, $w_2 = (1,0,0)$ y $w_3 = (3,0,-4)$, calculamos:

$$c_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(3,4,0)}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0\right);$$

$$z_2 = w_2 - Pr\Big|_{\langle\, c_1\,\rangle}(w_2) = w_2 - (w_2 \cdot c_1)c_1 = (1,0,0) - \Big((1,0,0)\cdot\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0\right)\Big)\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0\right) =$$

$$= (1,0,0) - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0\right) = (1,0,0) - \left(\tfrac{9}{25},\ \tfrac{12}{25},\ 0\right) = \left(\tfrac{16}{25},\ \tfrac{-12}{25},\ 0\right),$$

$$c_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{\left(\tfrac{16}{25},\ \tfrac{-12}{25},\ 0\right)}{\tfrac{1}{25}\sqrt{16^2+12^2}} = \frac{5}{4}\left(\tfrac{16}{25},\ \tfrac{-12}{25},\ 0\right) = \left(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{-3}{5},\ 0\right);$$

$$z_3 = w_3 - Pr\Big|_{\langle\, c_1,\, c_2\,\rangle}(w_3) = w_3 - \Big[(w_3\cdot c_1)c_1 + (w_3\cdot c_2)c_2\Big] =$$

$$= (3,0,-4) - \Big[\Big((3,0,-4)\cdot\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0\right)\Big)\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0\right) + \Big((3,0,-4)\cdot\left(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{-3}{5},\ 0\right)\Big)\left(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{-3}{5},\ 0\right)\Big] =$$

$$= (3,0,-4) - \Big[\tfrac{9}{5}\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right) + \tfrac{12}{5}\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{-3}{5}, 0\right)\Big] = (3,0,-4) - \Big[\left(\tfrac{27}{25}, \tfrac{36}{25}, 0\right) + \left(\tfrac{48}{25}, \tfrac{-36}{25}, 0\right)\Big] =$$

$$= (3,0,-4) - \left(\tfrac{75}{52}, 0, 0\right) = (0,0,-4),$$

$$c_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{(0,0,-4)}{\sqrt{4^2}} = (0,0,-1);$$

entonces la base ortonormal es $\{\, c_1,\ c_2,\ c_3 \,\}$.

2) Si denotamos $w_1 = (1,1,-1,0)$, $w_2 = (1,-1,1,0)$ y $w_3 = (-1,1,1,0)$, calculamos:

$$c_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,1,-1,0)}{\sqrt{3}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right);$$

$$z_2 = w_2 - Pr\Big|_{\langle\, c_1\,\rangle}(w_2) = w_2 - (w_2 \cdot c_1)c_1 =$$

$$= (1,-1,1,0) - \left((1,-1,1,0)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) =$$

$$= (1,-1,1,0) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right),$$

$$c_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right)}{\tfrac{1}{3}\sqrt{16+4+4}} = \tfrac{3}{2\sqrt{6}}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right) = \left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right);$$

$$z_3 = w_3 - Pr\Big|_{\langle\, c_1,\, c_2\,\rangle}(w_3) = w_3 - \Big[(w_3 \cdot c_1)c_1 + (w_3 \cdot c_2)c_2\Big] =$$

$$= (-1,1,1,0) - \left[\left((-1,1,1,0)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) + \right.$$

$$\left. + \left((-1,1,1,0)\cdot\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right)\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right] =$$

$$= (-1,1,1,0) - \left[\tfrac{-1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) - \tfrac{2}{\sqrt{6}}\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right] =$$

$$= (-1,1,1,0) - (-1,0,0,0) = (0,1,1,0),$$

$$c_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$$

entonces la base ortonormal es $\{\, c_1,\ c_2,\ c_3 \,\}$.