

# Condensados de Bose-Einstein

## Introducción

Desde su descubrimiento original, el estudio de los superconductores y los superfluidos ha sido un área de trabajo muy productiva tanto desde el punto de vista teórico como experimental. Ambos temas tienen en común con la condensación de Bose-Einstein que sus propiedades son consecuencia de la física cuántica, pero al mismo tiempo observables en materia a escala macroscópica, lo que permite también investigar en ellos muchas sorprendentes predicciones de la teoría cuántica.

Recordemos algunos momentos históricos clave relacionados con estos fenómenos.

1. En 1908, mediante la aplicación de un ciclo de Hampson-Linde, Onnes consiguió, en un laboratorio de la Universidad neerlandesa de Leiden, licuar Helio 4 a una temperatura de 4,22 K y presión ambiente. Ganó el Premio Nobel por ello en 1913.
2. En 1911, el propio Onnes se dedicó a medir la conductividad eléctrica de algunos metales como el mercurio (que solidifica a presión ambiente a unos  $-39^{\circ}\text{C}$ ), estaño y plomo, a muy bajas temperaturas. Al contrario de lo que pensaba Lord Kelvin, Onnes creía que la resistencia eléctrica de estos metales debía decrecer con la temperatura y que, eventualmente, llegaría a cero. En Abril de 1911, encontró que, a 4,2 K, la resistencia de un alambre de mercurio sólido sumergido en helio líquido se hacía súbitamente igual a cero. Inmediatamente, se dio cuenta de que el Mercurio había llegado a un nuevo estado, que llamó supraconductividad.
3. En 1924, el científico indio Bose envió una carta a Einstein buscando su ayuda para publicar un artículo sobre la estadística de los fotones o cuantos de luz. En este artículo, Bose era capaz de obtener la ley de radiación de Planck sin hacer referencia alguna a la física clásica. Einstein tradujo el artículo de Bose al alemán y consiguió que lo publicaran. Posteriormente, ambos colaboraron en otros artículos en 1925 y llegaron al concepto que ahora se conoce como gas de Bose, que describe la distribución estadística de partículas idénticas cuyo espín sea un número entero (fotones, átomos de Helio 4, etc). Estas partículas se denominan **bosones**. Los bosones pueden compartir estado cuántico entre ellos (al contrario que los fermiones, que han de obedecer el Principio de exclusión de Pauli). Einstein propuso que, si se enfriaran suficientemente un conjunto de átomos bosónicos, muchos caerían a su estado fundamental de mínima energía, llegándose a un nuevo estado de la materia que llamamos condensado de Bose-Einstein.
4. La superfluidez en Helio 4 a presión ambiente y una temperatura por debajo de 2,17 K fue observada por primera vez en 1937 por Kapitsa y, de forma independiente, también por Allen y Misener. Un líquido superfluido está caracterizado por tener viscosidad nula, de manera que fluye sin pérdida de energía.

# Estadística de Bose-Einstein

En el contexto de la física cuántica, la llamada estadística de Bose-Einstein describe cómo un conjunto de partículas idénticas de espín entero (bosones), que se asume que no interactúan entre ellas, ocupan una serie de estados discretos de energía cuando se tiene equilibrio termodinámico (es decir, hay un valor único en el sistema para la presión, temperatura y resto de variables termodinámicas). Los bosones no tienen que satisfacer el principio de exclusión de Pauli, que prohíbe que dos partículas idénticas se encuentren en exactamente el mismo estado cuántico, ya que este principio se aplica a los fermiones (estos siguen la estadística de Fermi-Dirac). Tanto la estadística de Bose-Einstein como la de Fermi-Dirac tienen como límite clásico (para alta temperatura o baja concentración de partículas) la conocida estadística de Maxwell-Boltzmann que describe el gas ideal que conocemos del estudio de la Termodinámica básica.

Según la estadística de Bose-Einstein, el número de ocupación promedio de un estado de energía  $\varepsilon(\mathbf{k})$ , siendo  $\hbar\mathbf{k}$  el correspondiente valor del momento lineal en ese estado, es

$$f_{BE}(\varepsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/(k_B T)} - 1} \quad (1)$$

siendo  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta del sistema,  $\mu$  el potencial químico, que es la energía que se produciría si hubiera un cambio en el número de partículas (para fotones, vale cero y, para átomos bosónicos, ha de ser menor que todos los niveles de energía  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  permitidos).

Utilizaremos esta expresión para comprender qué es un condensado de Bose-Einstein.

## Condensación de Bose-Einstein

A diferencia de un gas clásico o un gas de Fermi-Dirac, el gas ideal de Bose-Einstein presenta una transición de fase de carácter termodinámico que da lugar a la condensación de Bose-Einstein. Esta transición es bastante peculiar, ya que se produce en partículas que no interactúan entre ellas (la transición está provocada por la estadística de las partículas y no por sus interacciones). En la transición, todas las variables termodinámicas presentan un cambio abrupto de comportamiento, que ocurre cuando la temperatura del sistema iguala a la llamada temperatura crítica  $T_c$ .

Partimos de la estadística de un gas de Bose-Einstein (1). El número total de partículas  $N$  que hay en el volumen total del gas  $V$  será la suma de las que hay en cada uno de los posibles estados, es decir,

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/(k_B T)} - 1} \quad (2)$$

Vamos a considerar el límite termodinámico, en el que el volumen del gas se hace muy grande y se puede reemplazar la suma en posibles valores de  $\mathbf{k}$  por una integral, pasando del discreto al continuo,

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (3)$$

La ecuación (2) se transforma entonces en

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/(k_B T)} - 1} d^3k \quad (4)$$

A partir de ella, la densidad de partículas en el gas de bosones es

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/(k_B T)} - 1} d^3 k \quad (5)$$

Pasando esta integral a coordenadas esféricas e integrando en los ángulos de estas coordenadas,

$$n = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/(k_B T)} - 1} k^2 dk \quad (6)$$

Conviene expresar esta integral en términos de la energía. Para ello, usamos la relación entre energía y número de onda  $k$  de una partícula libre (recordemos que consideramos que no hay interacciones),

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (7)$$

Despejando  $k$  de aquí, tendremos

$$n = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/(k_B T)} - 1} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (8)$$

La integral anterior se calcula con ayuda de un desarrollo en serie. El resultado es

$$n = \left( \frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2} \left( e^{\mu/k_B T} \right) \quad (9)$$

donde la función  $g$  está definida como

$$g_{3/2}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p^{3/2}} \quad (10)$$

El siguiente paso es despejar la parte del potencial químico en la ecuación anterior,

$$g_{3/2} \left( e^{\mu/k_B T} \right) = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} n \quad (11)$$

Si la temperatura es alta o la densidad de partículas es baja, la parte derecha de esta expresión es pequeña. En este caso, se puede aproximar la función  $g_{3/2}(z) \simeq z$ , es decir, llegamos a

$$e^{\mu/k_B T} \simeq \left( \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} n \Rightarrow \mu \simeq -\frac{3}{2} k_B T \ln \left( \frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2 n^{2/3}} \right) \quad (12)$$

Este es el **límite clásico**. El potencial químico es negativo y el gas está descrito aproximadamente por la estadística de Maxwell-Boltzmann.

El comportamiento del gas de bosones sufre una **transición de fase** si enfriamos el gas hasta llegar a cierta **temperatura crítica**  $T_c$  determinada por el momento en que el potencial químico se hace cero. En ese momento, la función  $g_{3/2}(z)$  alcanza su valor máximo (por encima de aquí, la serie diverge), dado por

$$z = e^{0/k_B T_c} = 1 \Rightarrow g(1) = 2,612 \quad (13)$$

En la transición de fase, entonces,

$$n = \left( \frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} 2,612 \Rightarrow T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left( \frac{n}{2,612} \right)^{2/3} \quad (14)$$

Finalmente, por debajo de la transición de fase, es decir, cuando enfriamos el gas por debajo de la temperatura crítica, el potencial químico  $\mu$  es siempre cero y tenemos un **condensado de Bose-Einstein**.

Veamos lo que ocurre cuanto  $T < T_c$ . Einstein se dio cuenta de que, cuando el potencial químico  $\mu$  se hace cero, el número de partículas en el estado fundamental de energía mínima se hace grande, proporcional al tamaño del sistema. Supongamos que  $N$  es el número total de partículas del gas y  $N_0$  el número de partículas en el estado fundamental. Por la estadística de Bose-Einstein,

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\mu/k_B T} - 1} \Rightarrow \mu = -k_B T \ln \left( 1 + \frac{1}{N_0} \right) \quad (15)$$

Si  $N_0$  se hace grande, entonces  $\mu$  se hace cero. Es decir, por debajo de la temperatura crítica, el potencial químico es nulo, como ya adelantamos. La densidad de partículas en el condensado por debajo de la temperatura crítica se puede separar en las que están en el estado fundamental  $n_0$  y las que están en otro estado, que llamaremos 'normal',  $n_n$ ,

$$n = n_0 + n_n \quad (16)$$

La fracción de partículas en el estado fundamental se puede calcular de manera parecida a la integral anterior y se obtiene

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (17)$$

En consecuencia,

1. A temperatura crítica, en la transición de fase, el número de partículas en el estado fundamental tiende a cero.
2. A temperatura  $T = 0$  todas las partículas están en el estado fundamental.
3. A temperatura  $0 < T < T_c$ , hay un gran número de partículas en el estado fundamental, que constituyen el condensado.